

## **Sinteza lucrării: etapa finala 15 septembrie 2009**

**Proiectul de cercetare nr. 24/28.09.2007**  
**„Grupuri, grupuri cuantice, coringuri și teoria reprezentării”**

**Director: prof. dr. Gigel Militaru**

**Rezumat:** Etapa 2009 a contractului: **16 iulie 2008 -15 septembrie 2009**. Criteriile de performanță din contract conform anexei IIb) din contractul de finanțare prevedeau pentru etapa 2009: un articol acceptat în reviste cotate ISI și unul în reviste indexate în baze de date internaționale. În această perioadă au fost publicate 7 articole în reviste cotate ISI (5 din ele acceptate tot în această etapă), au fost acceptate alte două articole spre publicare în revista cotată ISI și un articol în revista internațională recenzată în bazele de date. Au fost trimise spre publicare 7 articole. Miodrag Iovanov a făcut un stagiu de cercetare de două luni în 2008 la universitate MIT (Boston) și altul de 10 zile în august 2009; Ana Agore, Miodrag Iovanov și Gigel Militaru au efectuat un stagiu de cercetare de 9 zile în iulie 2008 la Free Univ. Brussel; Dragos Fratila a efectuat două stagii de cercetare în iulie și august 2009 la Univ. din Koln și la Univ. Jacobs din Germania. Saptaminal sub conducerea directorului de proiect a avut loc **Seminarul Stiintific Studentesc de Algebra** (joi de la 14 la 16) al cărui program în etapa menționată îl anexăm.

### **Articole științifice publicate/acceptate în etapa 2009:**

#### **Articole publicate în reviste cotate ISI în etapa 2009 :**

- [1] **A. L. Agore**, A. Chirvasitu, **B. Ion**, **G. Militaru**: *Bicrossed products for finite groups*, Algebras and Representation Theory, 12(2009), 481-488 (acceptat în 29 octombrie 2008)
- [2] **A.L. Agore**, **G. Militaru**, *Crossed Product of groups. Applications*. Arabian J. Sci. and Engineering (AJSE), 33 (2008), 1-17 (acceptat în 17 septembrie 2008)
- [3] M. Beattie, **M.C. Iovanov**, S. Raianu, *The Antipode of a dual quasi-Hopf algebra with nonzero integrals is bijective*, Algebras and Representation Theory 12 (2009), 251-255.
- [4] **M.C. Iovanov**, *The Generating Condition for Coalgebras*, Bulletin of the London Mathematical Society 41 (2009), no.3, 483-494.
- [5] **M.C. Iovanov**, *When does the Rational Torsion Split off for Finitely Generated Modules*, Algebras and Representation theory (2009), no. 2-5, 287-309.

#### **Articole acceptate spre publicare în reviste cotate ISI în etapa 2009:**

- [6] **A. L. Agore**, **D. Fratila**, *Crossed products of cyclic groups*, acceptat pentru publicare în Czechoslovak Mathematical Journal în 1 septembrie 2009.
- [7] **M.C. Iovanov**, L. Kadison, „*When is a weak quasi-Hopf algebra Frobenius*”, acceptată spre publicare în Proceedings of the American Mathematical Society în ianuarie 2009, 10p.

### **Articole acceptate spre publicare in reviste recenzate in baze de date internationale.**

[8] **B. Ion**, *Generalized exponents of small representations*. I. Acceptata spre publicare in Representation Theory, acceptat pentru publicare pe 21 iunie 2009.

### **Articole publicate in reviste cotate ISI in etapa 2009 si raportate in etapa 2008 ca acceptate spre publicare:**

[9] **M.C. Iovanov**, J. Verduynsteyne, *Cofrobenius corings and adjoint functors*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 212 (2008), Issue 9, 2111-2146.

[10] **M.C. Iovanov**, C. Nastasescu, B. Torrecillas-Jover, *The Dickson Subcategory Splitting Conjecture for Pseudocompact Algebras*, Journal of Algebra, vol. 320 (2008), no. 5, 2144-2155.

### **Articole trimise spre publicare:**

[11] **A. L. Agore, G. Militaru**, *Deformation of a marched pair and Schreier type theorems for bicrossed product of groups*, trimis spre publicare la revista cotate ISI in 29 Martie 2009.

[12] **G. Militaru**, *Serre Theorem for involutory Hopf algebras*, trimis spre publicare la revista cotate ISI in 13 iulie 2009.

[13] **A. L. Agore**, *Categorical constructions for Hopf algebras*, trimisa la revista cotate ISI in 22 iulie 2009

[14] **A.L. Agore**, *Monomorphisms of coalgebras*, trimisa spre publicare in *Colloquium mathematicum (revista recenzata in baze de date internationale)* in 24 august 2009.

[15] **B. Ion**, *A Poincare-Birkhoff-Witt theorem for Hopf algebras with central coradical*. 14 pg. Trimis spre publicare in 10 Mai 2009

[16] **B. Ion**, *Generalized exponents of small representations*. II. 70 pg., trimis spre publicare in 18 Iunie 2009

[17] **M.C. Iovanov**, *Abstract Integrals in Algebra*, trimisa spre publicare, 29p

### **Detalierea studiului intreprins**

Articolele [1], [2] si [10] dau raspunsuri la probleme formulate in obiectivele contractului. Este demonstrat ca un produs bicrossed a doua grupuri ciclice de ordin finit din care unul are ordin prim este izomorf cu un produs semidirect. Acesta problema naste natural intrebarea privind clasificarea produselor bicrossed similara cu cea a produselor crossed de grupuri. Primele rezultate privind clasificare au fost date in [10] cind au fost date teoreme de tip Schreier privind produsele bicrossed de grupuri. am dat o noua teorema de structura a produselor bicrossed de grupuri realizandu-le ca grup factor ale unei sume fibrante de doua produse semidirecte de grupuri iar apoi am urmarit problema mai generala de ,deformare a sistemelor marched pair'. Ca aplicatie a noii abordari am dat raspuns complet la asa numita „invariance under twisting problem” si apoi ca si consecinta a ei am dat doua teoreme de

clasificare a produselor bicrossed care ne conduc la un filon nou și tentant de exploatat și pe viitor: construcția a două mulțimi punctate care va joaca rolul grupurilor de coomologie pentru produsele bicrossed. Tema e foarte promitatoare pentru abordari. În [2] este reluată problema clasică a clasificării extinderilor de grupuri, cu tehnica categorială și este demonstrată o teoremă mai generală a celebrei teoreme a lui Schreier pentru extinderi de grupuri. În [11] este introdus conceptul de categorie Serre pornind de la teoreme celebre în teoria reprezentării de grupuri demonstrată de Chevalley și Serre. Sunt date teoreme care generalizează teorema Serre de la nivel de grupuri la cel de algebre Hopf involutorii: sunt date 3 largi clase de exemple de categorii Serre: reprezentările, coreprezentările sau modulele Yetter-Drinfel'd care au rangul Hator inversabil în inelul de baza sunt toate categorii Serre.

În [13] este demonstrată existența unei algebre Hopf colibere pe fiecare bialgebra (resp. algebra), i.e. functorul uituc de la categoria algebrilor Hopf la categoria bialgebrilor (resp. algebrilor) are un adjunct la dreapta. În acest fel, răspundem afirmativ unei probleme vechi de 40 de ani pusă de Sweedler. Mai mult, în cursul demonstrației coegalizatorii și coprodusele în categoria algebrilor Hopf sunt complet descrise. În [14] sunt demonstrate condiții necesare și suficiente pentru ca un morfism de coalgebre să fie monomorfism. De exemplu, un morfism între coalgebrele  $C$  și  $D$  este monomorfism dacă și numai dacă primele grupuri de coomologie ale coalgebrilor  $C$  și  $D$  coincid. Mai mult, este demonstrată și o condiție elementară ce implică doar elementele produsului cotensor al lui  $C$  cu  $C$  peste  $D$ . De asemenea, sunt obținute și condiții necesare și suficiente pentru ca un morfism de algebre Hopf să fie monomorfism.

Rezultatele obținute în [9], [15], [16]. Teorema Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) este cel mai important rezultat structural ce privește algebra anvelopantă a unei algebre Lie. Algebra anvelopantă  $U(L)$  a unei algebre Lie  $L$  este o algebra filtrată, filtrarea fiind cea dată prin asocierea gradului 1 fiecărui element din  $L$ . În ultimele două decenii, odată cu apariția așa numitelor grupuri cuantice a crescut și interesul față de astfel de teoreme structurale pentru clase mai generale de algebre. Mai precis, în sensul original grupurile cuantice sunt deformări ale algebrilor anvelopante, deformări care rămân în categoria algebrilor Hopf. Deși, în cazul exemplurilor inițiale de grupuri cuantice teoreme de tip PBW au fost obținute relativ ușor, pentru grupuri cuantice în sens mai larg (algebre Hopf cu diferite proprietăți, nu există un consens în această privință) aceste rezultate devin dificile și cu atât mai importante. Menționăm aici numai că în schema de clasificare a algebrilor Hopf finite dimensionate pointed (Andruskiewitsch și Schneider, Ann. of Math, to appear) a astfel de teorema PBW joacă un rol central. Această teoremă a fost obținută de Kharchenko în 1999 pentru o relativă clasă restrânsă de algebre Hopf, dar aparent suficient pentru a fi de folos în lucrări deosebit de importante cum ar fi cea menționată anterior. Toate demonstrațiile teoremei PBW și a generalizărilor ce există până la acest moment în literatură se bazează pe manipularea combinatorială a generatorilor și relațiilor pentru a obține baze PBW. A fost abordată problema existenței bazelor PBW într-un context mult mai natural. De remarcat că în teorema PBW originală  $U(L)$  este într-adevăr o algebra Hopf iar filtrarea dată de grad este o filtrare canonică ce poate fi construită pentru orice algebra Hopf: filtrarea coradicală. Deci rezultatul original poate fi enunțat ca: algebra graduată asociată filtrării coradicală este o algebra polinomială. Pentru ca filtrarea coradicală să fie o filtrare de algebre Hopf (adică algebra graduată asociată să rămână algebra Hopf) este necesar și suficient ca coradicalul să fie o subalgebra Hopf. Se studiază algebrele Hopf astfel încât coradicalul este o algebra Hopf centrală. De remarcat că în contrast cu alte rezultate din literatură nu impunem ipoteze asupra generatorilor algebrei și nici asupra relațiilor ce ar putea fi satisfăcute de potențiali generatori. Tehnicile folosite nu mai sunt, în consecință, combinatoriale ci geometrice, bazându-se pe

rezultate din teoria schemelor grupale afine. Rezultatul obtinut este urmatorul: Fie  $H$  o algebra Hopf astfel incat coradicalul sau  $H_0$  este o subalgebra Hopf centrala pentru un corp algebric inchis de caracteristica zero. Atunci, exista  $P$  o multime PBW cu urmatoarele proprietati: 1) elementele din  $P$  sunt liniar independente peste  $H_0$ ; 2) dupa localizarea coradicalului la idealul sau de augmentare  $P$  devine o baza PBW. Mai mult,  $P$  este o baza PBW in  $H$  in urmatoarele conditii: a)  $H_0$  reprezinta o schema afina pro-finita (de exp.  $H_0$  e finit dimensionala); b) algebra generata de  $H_0$  si  $P$  este o algebra Hopf. Conditia b) este si necesara. In contrast cu alte rezultate din literatura, toate ingredientele sunt disponibile si in caracteristica pozitiva. Mai mult toate rationamentele sunt valabile fara modificare in cazul in care algebra graduata asociata lui  $H$  este neteda (lucru valabil intotdeauna in caracteristica zero). Rezultatul deschide o intreaga directie de studiu in acest tip de probleme, identificand proprietatile conceptuale care sunt necesare pentru ca anumite clase de algebre Hopf sa aiba proprietati bune (de exp baze PBW). Istoricul subiectului din [16] cat si rezultatele obtinute au fost detaliate in rapoartele anterioare. Mentionam ca varianta trimisa spre publicare (70 pg.) contine rezultate detaliate in cazul sistemelor exceptionale de radacini (rezultate care lipseau din prima versiune -aprox. 40 pg.- descrisa in raportul anterior). Rezultatul principal poate fi enuntat astfel: coeficientul Fourier asociat unei ponderi mici in nucleul Cherednik are forma  $(1-t^{v_1}) \dots (1-t^{v_n})$  unde  $v=(v_1, \dots, v_n)$  este un vector, numit vectorul defect al ponderii. (aceast forma este valida pentru asa numitele ponderi normale, pentru celelalte ponderi fiind nevoie de un termen de corectie pe care nu il mentionam pentru a pastra concizia enuntului.) Vectorul defect reflecta combinatorica expresiilor minimale ale ponderii data, mai precis distributia radacinilor negative in cadrul acestor expresii. Articolul contine un appendix ce include formule explicite (odata fixat un sistem de coordonate pentru sistemul de radacini) pentru vectorul defect. O consecinta imediata este o prima formula pentru exponentii generalizati asociati unei ponderi mici. In formula sunt prezente numai multiplicitatile reprezentarii parametrizate de ponderea in chestiune si vectorul defect. Aceasta formula generalizeaza procedura clasica Shapiro-Steinberg pentru calcularea exponentilor clasici ai unui group Lie (exponentii generalizati asociati radacinii maximale). Formula este in intregime explicita, usor de folosit si implementat computational.

Detalierea rezultatelor din articolele [3]-[8], [17]. In [3] se obtine bijectivitatea antipodului algebrelor quasi-Hopf; in timp ce injectivitatea era cunoscuta, avand o demonstratie care copiaza rezultatul clasic de la algebre Hopf, surjectivitatea s-a dovedit a fi o problema care a necesitat cu totul alte tehnici. In [7] se raspunde complet unei conjecturi propuse de acad. C. Nastasescu pentru coalgebre, si anume daca conditia de generator (la dreapta) implica cea de a fi proiectiv la stanga. Reciproca este cunoscuta a fi adevarata, iar proprietatea de a fi proiectiv la stanga este echivalenta cu  $C = \text{quasi-co-Frobenius}$  la dreapta, o notiune foarte importanta in teoria coalgebrelor. In acest articol sunt explicate toate legaturile intre aceste proprietati omologice-categoricale care erau necunoscute anterior, in acelasi timp si comparativ cu cazul clasic al inelelor. In [5] si [7] se examineaza un tip de problema cunoscut sub numele de „splitting problem”. In general, data fiind o categorie de module peste un inel  $A$  si o subcategorie  $T$  numita „clasa de torsiune” inchisa la subobiecte, obiecta cat si sume directe, se pune problema cand orice  $A$ -modul (sau orice  $A$ -modul de un anumit tip particular, spre exemplu finit generat) se descompune intr-o suma directa intre partea lui „de torsiune” si un alt submodul. In [5] s-a rezolvat aceasta problema pentru algebre pseudocompacte  $A$  si o clasa de torsiune a modulelor semiartiniane (clasa Dickson), rezolvandu-se astfel in acest caz in afirmativ o conjectura care afirma ca daca are loc acest splitting problem atunci orice modul este de torsiune in raport cu aceasta clasa Dickson, echivalent, algebra  $A$  este semiartiniana. In [7] s-a abordat acelasi tip de problema pentru algebre profinite si o subcategorie de torsiune naturala ce se regaseste in acest caz in categoria  $A$ -modulelor stangi, anume subcategoria  $A$ -

modulelor rationale. Se studiaza aici problema „cand este partea rationala sumant direct in orice modul finit generat”. Se obtin rezultate generale, caracterizand cazul algebrelor comutative, si in cazul necomutativ caracterizand complet cazul algebrelor locale. Drept consecinta, se obtine si caracterizarea in cazul acestei probleme in care se cere ca partea rationala sa fie sumant direct in orice modul. Se construiesc si o serie larga de exemple in aceasta directie. In particular, rezultatele obtinute aici ce se incadreaza in obiectivele acestui proiect, generalizeaza si obtine drept caz particular toate rezultatele obtinute in prealabil de cativa autori romani si straini in 3 articole diferite ISI in aceasta directie. In aceasta privinta, mentionam continuarea cu data recenta a teoriei dezvoltate aici si publicate deja: rezultatul general – al caracterizarii complete a algebrelor  $A$  care au proprietatea ca partea rationala a oricarui modul finit generat este un sumant direct – se dovedeste a fi mai dificil de intuit, dar intentionam sa abordam si aceasta problema. In [6] s-a dezvoltat o teorie generala in care au unificat o serie de concepte de tip Frobenius existente pentru algebre, coalgebre, functori si coring-uri, intr-un context categoric, via tehnici generale ce implica folosirea contextelor de tip Morita. In cadrul obiectivului „Integrale pentru Coalgebre” reamintim – conform raportului de jumatate e an 2008-2009 – am urmarit introducerea notiunii de integrala in contextul pur algebric al coalgebrelor. Aceasta notiune generalizeaza pe cea de la algebre Hopf si grupuri (local) compacte. Motivatia introducerii si studiului acestui concept este urmatoarea: in cazul unui group compact  $G$ , algebra functiilor reprezentative  $R(G)$  este de fapt o algebra Hopf, iar integrala Haar la stanga al lui  $G$  este o integrala in sens de algebre Hopf pentru  $R(G)$ . Aici, structura comultiplicativa (si nu cea multiplicativa) este cea care retine proprietatile algebrice (teoria reprezentarii) si chiar topologice ale grupului  $G$ . Asadar, este natural de investigat acest concept in contextul coalgebrelor. Se dovedeste a exista o legatura stransa intre integrale – privite drept anumite spatii de functii – si proprietati de tip Frobenius, ceea ce generalizeaza rezultate clasice fundamentale de la algebrele Hopf. Unul dintre rezultatele principale arata ca o coalgebra este co-Frobenius daca si numai daca pentru orice (co)representare  $M$  finit dimensionala la stanga ( $C^*$ -modul rational finit dimensional) spatiul integralelor asociate  $\text{Hom}(C, M)$  are aceeasi dimensiune cu reprezentarea propriu-zisa  $M$ , echivalent, aceeaasi afirmatie la dreapta. De fapt, se demonstreaza mai multe rezultate de acest tip, care explica legaturile intre proprietati de existenta si unicitate ale integralelor si proprietatile de tip Frobenius si quasi-Frobenius ale coalgebrelor. Mai mult, aceste tehnici permit obtinerea de noi caracterizari care generalizeaza si extind caracterizari existente pentru aceste notiuni, si in acealasi timp obtin drept caz particular rezultate fundamentale din teoria algebrelor Hopf. In acelasi timp se construiesc o clasa larga de exemple, care totodata determina toate legaturile in prealabil necunoscute intre cateva clase importante de coalgebre (semiperfect, quasi-coFrobenius, Frobenius, la stanga si respectiv dreapta). In cazul analizei functionale – grupurilor local compacte – aceste integrale se dovedesc a fi integrale vectoriale propriu-zise cu o anumita proprietate de invarianta „quantica”.

Visita de cercetare a lui M.C.Iovanov la MIT in lunile August-Septembrie 2008, finantata din acest proiect a avut ca consecinta scrierea si finalizarea in perioada August 2008 – Septembrie 2009 a unui articol, ce a avut ca obiectiv rezolvarea unei probleme propuse si incercate in prealabil de L. Kadison (U.Penn) G.Bohm (Ungaria) si Kszlachanyi (Ungaria), si anume „cand este o algebra Hopf slaba (weak Hopf algebra) Frobenius”. Aceste algebre, impreuna cu algebrele quasi-Hopf introduse de Drinfeld au constituit obiectul unor studii intense in ultimii 20 de ani, fiind legate cu multe domenii ale matematicii si fizicii: topologie, geometrie, fizica matematica. Folosind metode moderne legate de teoria categoriilor tensoriale, precum si o idee a lui P. Etingof (MIT), in timpul acestei vizite am reusit sa rezolvam complet aceasta problema. Am demonstrat ca in general algebrele weak-Hopf nu sunt Frobenius (chiar o clasa mai generala cunoscuta drept weak quasi-Hopf algebras), dar sunt Frobenius intr-un sens

precis categorical, exprimat in limbajul categoriilor tensoriale. Am demonstrat cu o demonstratie directa ca ele sunt quasi-Frobenius (rezultat cunoscut anterior, dar cu o demonstratie foarte tehnica), si avem un rezultat care caracterizeaza exact cazul in care o astfel de algebra  $H$  este Frobenius: aceasta se intampla daca si numai daca „algebra baza”  $A$  a lui  $H$ , care este semisimpla, are blocurile de dimensiuni egale. Demonstratia se bazeaza pe reconstructia de tip Tannaka-Krein a categoriilor tensoriale si algebrelor weak quasi-Hopf. Un alt proiect demarat in perioada raportata (mai exact in ultima parte a acestei perioade) este legat de obtinerea unor demonstratii noi si foarte scurte pentru multe rezultate fundamentale ale algebrelor Hopf precum si rezultate noi cum ar fi obtinerea unei conjecturi a lui Suslin, folosind din nou tehnici introduse initial de M.C. Iovanov in „*Generalized Frobenius Algebras and the Theory of Hopf Algebras*” (articol trimis spre publicare ISI scris in cadrul acestui proiect). Aceste noi demonstratii sunt importante ca fiind singurele care explica paralelismul cu grupurile local compacte, existenta si unicitatea masurii Haar: demonstratiile clasice la algebre Hopf obtin intai aceasta unicitate si apoi bijectivitatea antipodului; demonstratiile noi, foarte scurte, realizeaza intai bijectivitatea antipodului si apoi existenta si unicitatea integralelor, in analogie cu grupurile local compacte (acesta este un proiect comun al lui M.C. Iovanov cu S. Raianu, USA).

**Programul Seminarul Stiintific Studentesc de Algebră**  
**in anul universitar 2008-2009**

<b>Data</b>		<b>Titlul expunerii</b>
16.10.2008	Dragoș Frățilă	Reprezentări de grupuri finite: ortogonalitatea caracterelor
23.10.2008	Dragoș Frățilă	Teorema lui Higman și problema integralității inelului grupal
30.10.2008	Dragoș Frățilă	Teorema lui Burnside, Reciprocitate Frobenius, Teorema lui Frobenius, Teorema lui Ito
06.11.2008	Dragoș Frățilă	Teoremele de densitate ale lui Artin și Brauer
13.11.2008	Alexandru Chirvășitu	Criteriul de ireductibilitate al lui Mackey și aplicații
20.11.2008	Gigel Militaru	Teorema “faithfully-flat descent” a lui Grothendieck
27.11.2008	Gigel Militaru	Ecuția cuantică Yang-Baxter: algebra Hopf quasitriangulare, teorema Drinfel’d (Larson-Towber).
04.12.2008	Gigel Militaru	Module Yetter-Drinfel’d vs QYBE: teorema Yetter. Construcții de module Yetter-Drinfel’d.
11.12.2008	Gigel Militaru	Teorema FRT. Grupurile cuantice $GL_q(2)$ , $SL_q(2)$
18.12.2008	Ana Agore	Ecuția cuantică Yang-Baxter pe mulțimi: braided sets si solutii afine pentru ecuatiia braid
08.01.2009	Ana Agore	Ațiuni compatibile, operatori braided, 1-cocicli bijectivi: teorema de echivalență dintre ele.
15.01.2009	Ana Agore	Cycle stets vs soluții la QYBE. Exemple de cycle sets.

19.02.2009	Adriana Balan	Dualitate Tannaka Krein I
26.02.2009	Adriana Balan	Dualitate Tannaka Krein II
05.03.2009	Adriana Balan	Dualitate Tannaka Krein III
12.03.2009	Adriana Balan	Dualitate Tannaka Krein IV
19.03.2009	Alexandru Chirvășitu	Categorii C-Frobenius; când functorul diagonal este Frobenius I
26.03.2009	Alexandru Chirvășitu	Categorii C-Frobenius; când functorul diagonal este Frobenius II
02.04.2009	Ana Agore	Coalgebre Colibere I
09.04.2009	Ana Agore	Coalgebre Colibere II
16.04.2009	Ana Agore	Duala finită a unei algebre, adjuncția Kostant și aplicații
23.04.2009	Joia Mare	-
30.04.2009	Dragoș Frățilă	Construcția algebrei universale cu o coacțiune (Tambara's construction)
07.05.2009	Dragoș Frățilă	Construcția algebrei Hopf liber generată de o bialgebră (Takeuchi's construction)
14.05.2009	Gigel Militaru	Epimorfisme în categoria Rings
21.05.2009	Gigel Militaru	Teorema lui Serre pentru algebre Hopf involutorii

Director de proiect

Bucuresti, 10 septembrie 2009

Prof. dr. Gigel Militaru