

Sinteza lucrării: etapa intermediară 15 ianuarie 2009

Proiectul de cercetare nr. 24/28.09.2007

„Grupuri, grupuri cuantice, coringuri și teoria reprezentării”

Director: prof. dr. Gigel Militaru

Rezumat: În 2008 au fost publicate sau sunt acceptate și sunt în curs de publicare în reviste cotate ISI 8 articole și au fost trimise spre publicare alte 6 articole. Patru articole sunt în curs de finalizare. Toate menționează finanțarea din contractul 24/28.07.2007 și sunt parte a obiectivelor asumate în proiectul de cercetare. Miodrag Iovanov a făcut un stagiu de cercetare de două luni, finanțat integral din grant, la renumita universitate MIT (invitat de prof. P. Etingof) iar Ana Agore, Miodrag Iovanov și Gigel Militaru au efectuat un stagiu de documentare și cercetare de 9 zile la Free Univ. Brussel (invitați de prof. S. Caenepeel).

Obiectivele științifice ale proiectului în etapa intermediară 2009 conform contractului :

- Construcții topologice de algebre Hecke.
- Demararea proiectului pentru scrierea unei monografii în coordonarea directorului de proiect care să fie trimisă spre publicare la o editură de prestigiu din străinătate
- Bialgebroizi pentru factorizări de algebre

Detalierea studiului întreprins

Etapa intermediară 2009 a început la încheierea decontării pentru 2008 în 15 iulie 2008. În cadrul obiectivului „**construcții topologice de algebre Hecke**” rezultatele sunt ilustrate în articolul [BI 1]. A doua lucrare [BI 2] este în acest moment finalizată în proporție de 95%. Rezultatul principal în [BI 2] este o formulă explicită pentru coeficienții Fourier ai ponderilor mici. O consecință imediată este o formulă explicită pentru exponenții generalizați ai reprezentărilor mici. Pentru a obține formula pentru coeficienții Fourier câteva noi concepte au fost introduse și studiate:

- Expresii minimale. A fost arătat că expresiile minimale pentru ponderi mici nu au multiplicități.
- Descompuneri (bloc) canonice. A fost arătat că ponderile mici sunt parametrizate de descompunerile lor (bloc) canonice.
- Invarianti numerici pentru expresii minimale. Au fost definiți și calculați explicit anumiți invarianti numerici pentru expresii minimale. Aceste numere formează o parte importantă din formula pentru coeficienții Fourier (vectorul cut-off).
- Vectorul defect al unei ponderi mici. Acest vector este determinat de cunoșterea rădăcinilor relevante pentru ponderea în chestiune. O definiție canonică a acestui

vector lipseste in acest moment (desi este explicat in [BI 2] ca pentru o astfel de definite va fi nevoie de o abordare din punctul de vedere al asa-numitelor grafuri puternic regulate) dar o formula explicita a fost data pentru fiecare sistem de radacini in parte.

In cadrul obiectivului **“Demararea proiectului pentru scrierea unei monografii in coordonarea directorului de proiect care sa fie trimisa spre publicare la o editura de prestigiu din strainatate”** care va continua pana la finalizarea acestui proiect de cercetare mentionam ca a fost inceput in toamna anului 2008 redactarea acestei monografii: pana in acest moment fiind scrise peste 250 de pagini. Este un proiect amplu care speram sa fie finalizat cu succes in toamna lui 2010 asa cum ni l-am asumat. In prima jumatate a anului 2009 vom incepe tehnoredactarea a ceea ce am scris pana acum in cadrul acestei monografii.

In cadrul obiectivului **„Bialgebroizi pentru factorizari de algebre”** am urmarit o subproblema a lor si anume „Integrale pentru coalgebre si aplicatii”, un al obiectiv al acestui proiect demarat la sfirsitul anului 2007 si inceputul anului 2008: complexitatea problemei si posibilele ei ramificatii in alte ramuri ale matematicii ne-a facut sa alocam o perioada importanta de timp acestei probleme. Am urmarit extinderea notiunii de integrala Haar din teoria grupurilor compacte sau mai general, al algebrilor Hopf intr-un cadru pur algebric al teoriei coalgebrilor. Dat fiind un grup compact G cu o masura Haar invarianta la translatii la stanga μ si integrala asociata, se introduce in mod natural functiile reprezentative ale acestui grup care sunt in stransa legatura cu teoria reprezentarii grupului G . Pe multimea $R(G)$ a functiilor reprezentative ale grupului G se poate introduce in mod natural o structura de algebra Hopf, in care multiplicarea este multiplicarea obisnuita a functiilor, iar comultiplicarea unei functii f este data de o formula mai speciala. Motivatia studiului conceptului de integrala intr-un context mai general este observatia ca singura structura care are de a face si codifica (in intregime) teoria reprezentarii grupului G este structura comultiplicativa, cea multiplicativa putand fi definita pentru orice multime G (nu numai pentru grupuri compacte). Aceasta generalizare a notiunii de integrala din analiza functionala abstracta – teoria grupurilor local compacte – si de la algebrele Hopf – la coalgebre, a fost realizata cu succes in [MI 8]. Rezultatul demonstrat aici este acela ca o coalgebra C este co-frobenius daca si numai daca pentru orice coreprezentare de dimensiune finita M (la stanga, sau echivalent, la dreapta) dimensiunea spatiului integralelor peste orice comodul M ($\text{Hom}(C, M)$) are dimensiune egala cu $\dim(M)$. S-au obtinut chiar o serie de rezultate mai generale, de caracterizare a proprietatilor co-Frobenius la stanga sau la dreapta in functie de proprietati ale integralelor; in plus o serie de exemple au fost construite in acest articol, prin

care se arata ca rezultatele obtinute sunt cele mai bune posibile pe de o parte, si pe de alta parte se obtin toate relatiile dintre clasele importante de coalgebre: semiperfecte, quasi-Frobenius, co-Frobenius (stanga/dreapta). In plus, am aratat legatura acestor obiecte cu analiza armonica abstracta (teoria grupurilor compacte), unde aceste integrale devin integrale in sensul analizei, cu o proprietate de invarianta „cuantica” (cuantificata de reprezentarea M). De asemenea, aplicam aceste rezultate pentru a obtine noi demonstratii pentru rezultatele clasice din teoria algebrelor Hopf, aratand in acest fel ca aceasta teorie reprezinta intr-adevar o generalizare a tuturor acestor situatii mentionate mai sus. Un alt aspect important in aceeași tematica generala il reprezinta rezultatele din [MI 7]. In acest articol se extinde teoria algebrelor si coalgebrelor co-Frobenius la cea a algebrelor quasi-Frobenius si quasi-co-Frobenius (QcF). Demonstram, pe langa alte cateva caracterizari noi ale coalgebrelor QcF, ca acestea sunt acele coalgebre cu proprietatea ca C este izomorfa intr-un sens mai slab cu dualul sau rational $\text{Rat}(C_C)$ (echivalent la dreapta), adica anumite puteri ale acestor obiecte sunt izomorfe ca module (sau comodule). Aceasta caracterizare simetrica este in spiritul celor ale algebrelor Frobenius si quasi-Frobenius, coalgebrelor co-Frobenius si algebrelor Hopf cu integrale, si ofera si posibilitatea extinderii caracterizarilor categoricale ale acestor obiecte, cat si obtinerea unor noi demonstratii simple ale unor rezultate fundamentale ale algebrelor Hopf, si anume, algebrele Hopf cu integrale nenule la stanga (echivalent, la dreapta) sunt aceleasi cu cele care sunt co-Frobenius, sau QcF, sau semiperfecte sau cu parte rationala nenula la stanga, sau echivalent, la dreapta; unicitatea integralelor este obtinuta din nou ca o consecinta. Tot ca o consecinta a metodelor din [MI 7] este obtinuta o demonstratie foarte scurta a unui alt rezultat celebru fundamental al teoriei algebrelor Hopf care afirma ca intr-o algebra Hopf cu integrale antipodul este bijectiv, rezultat la care gasim o demonstratie scurta bazata pe tehnici legate de teoria reprezentarilor: proprietati ale modulelor si comodulelor. Aceasta demonstratie noua este foarte promitatoare, intrucat deja pare sa aiba consecinte neateptate: s-a demonstrat un fapt mai general – tot in cadrul acestui proiect – in articolul [MI 5], si anume ca antipodul unei algebre „dual quasi-Hopf” (o generalizare a algebrelor Hopf introdusa de Drinfel'd din motive ce au de a face cu mecanica cuantica) cu integrale este bijectiv. Aici, incercarile precedente de a adapta tehnicile din demonstratia clasica a lui Radford a bijectivitatii antipodului nu au dat rezultate, lucru care da importanta acestei noi demonstratii a acestui fapt clasic. In aceeași directie de cercetare a proprietatilor coalgebrelor QcF este si articolul de curand acceptat [MI 6] de prestigioasa Societate Londoneza de Matematica. Aici se obtin legaturile anterior necunoscute intre proprietatile categoricale omologice ale unei coalgebre C si proprietatea de a fi QcF (intr-o parte). Aceste legaturi sunt

de interes in comparatie cu legaturile din cazul dual al algebrelor. Pentru o coalgebra C conditia de a fi proiectiv la stanga este echivalenta cu QcF la dreapta, si implica faptul ca C este generator la dreapta. Demonstram ca implicatia inversa nu este adevarata decat in cazul in care C este semiperfecta la dreapta sau are filtrarea coradical finita, si dam o clasa larga de exemple in care aceasta implicatie nu este adevarata, si mai precis, aratam ca orice coalgebra se scufunda intr-o coalgebra generator. O noua directie de cercetare in acelasi domeniu a fost abordata de echipa noastra de cercetare pe parcursul acestui an, incepand cu vizita la MIT a lui M.C.Iovanov in August – Septembrie. Aceasta directie este reprezentata de teoria categoriilor tensoriale. Acestea reprezinta generalizari ale unei game variate de structuri, cum ar fi (co)reprezentarile algebrelor Hopf, ale algebrelor quasi-Hopf, ale algebrelor weak-Hopf sau mai general ale weak quasi-Hopf algebrelor. O serie de rezultate de clasificari de algebre Hopf, precum si teoreme fundamentale in teoria acestor algebre se pot obtine in contextul mult mai general al categoriilor tensoriale, iar drept consecinta, aceste rezultate se reobtin in toate celelalte contexte (ale algebrelor weak/quasi/weak-quasi Hopf). Folosind tehnici de acest tip, am abordat o problema deschisa care intreba daca algebrele weak Hopf sunt algebre Frobenius (algebrele Hopf, care sunt generalizari ale algebrei grupale ale unui grup finit sunt intotdeauna Frobenius, adica reprezentarea regulata duala ei sunt izomorfe). Am dat un raspuns complet la aceasta intrebare, construind o clasa generala de contraexemple de algebre weak-Hopf avand baza o algebra semisimpla A care nu are toate blocurile de aceeaasi dimensiune; demonstratia se bazeaza pe reconstructia de tip Tannaka-Krein a categoriilor tensoriale/algebrelor weak Hopf. In cazul in care algebra de baza A nu are proprietatea afirmata anterior, algebra weak-quasi Hopf H de baza A este Frobenius. Aceste rezultate au fost trimise spre publicare in [MI 9]. Pe de alta parte, semnalam publicarea in acest an a unui alt articol, legat de asemenea de teoria coalgebrelor si comodulelor, [MI 3] impreuna cu C.Nastasescu si cu Blas Torrecillas Jover (Universitatea din Almeria), care raspunde la o problema deschisa importanta in teoria generala a studiului categoriei modulelor (reprezentarilor) asociate unui inel. In general, dat fiind un inel A si categoria de module asociata, de multe ori este convenabil sa studiem o anumita parte de torsiune a modulelor asociata intr-un mod canonic. De exemplu, acesta este cazul grupurilor abeliene cu partea de torsiune clasica. Daca aceasta este sumand direct intr-un anumit obiect, atunci avem o modalitate buna de intelegere a obiectului respectiv. In cazul unei categorii generale si a unui anumit "functor de torsiune" se pune astfel problema daca suntem in situatia ca orice obiect sa se poate descompune intr-o suma directa intre partea de torsiune si un alt obiect, putand astfel fi mult mai usor inteles. Articolul in cauza [MI 3] da un raspuns explicit acestui tip de

intrebare pentru cazul important al algebrelor profinite (echivalent algebre care sunt dualul unei coalgebre) si asa numita torsiune generala Dickson, o torsiune naturala care exista in orice categorie Grothendieck, si deci si in categoria de module peste un inel. Mai precis, se raspunde pozitiv in acest caz la o conjectura care afirma ca daca acest tip de proprietate are loc pentru algebra A , atunci ea incesi trebuie sa fie un obiect de „torsiune” in raport cu aceasta torsiune Dickson, echivalent, este semiartiniana. Tot in aceasta clasa a problemelor de tip splitting – prevazute de altfel in etapele proiectului nostru pe 2008 – se gasesc rezultatele din [MI 4], care studiaza problema splitting-ului in raport cu partea rationala a unui modul; anume, in cazul unei algebre profinite A , se pune problema cand partea de torsiune rationala (in linii mari, partea de torsiune rationala este suma submodulelor de torsiune finit dimensionale) a oricarui modul stang finit generat este un sumant direct in acel modul. Rezultatul principal – completat de o serie de alte rezultate conexe si exemple – arata ca o astfel de algebra trebuie sa fie domeniu de valuare discreta daca este infinit dimensionala (altfel, problema devine triviala).

In acelasi timp, s-a finalizat cu succes un articol publicat [MI 1] impreuna cu J. Verduyn, in care se trateaza o problema generala a exprimarii si unificarii tuturor conceptelor de tip Frobenius intr-un context functorial categoric; acesta este obtinut pe baza unei abordari mai generale ce implica folosirea contextelor Morita. Aceasta lucrare este deja citata intr-un studiu legat de acelasi subiect, a unor autori straini. Tot in aceeasi directie a obiectelor de tip Frobenius s-a finalizat publicarea unui alt articol [MI 2]; aici sunt generalizate o serie de concepte cum ar fi extinderile Frobenius de inele, coring-urile Frobenius si anumiti functori Frobenius intr-o singura notiune de extindere Frobenius de coring-uri. Se obtin rezultate de caracterizare a acestor extinderi de coring-uri, iar rezultatele existente in cazurile particulare amintite se obtin drept cazuri particulare. Mai mult, se obtin si anumite rezultate de finitudine ale extinderilor Frobenius de coring-uri, cu aplicatii mai ales la algebre, care explica modul in care rezultate acestea de finitudine apar atat la extinderile Frobenius de inele cat si la coring-urile Frobenius.

Tot in cadrul obiectivului „**Bialgebroizi pentru factorizari de algebre**” am urmarit structura de coring asociata unui bialgebroid si am inceput demersul studiului functorilor reprezentabili asociati categoriei de coreprezentari alei unui coring. Teorema principala din lucrarea [GM 1] inceputa in toamna acestui an si aflata in curs de finalizare va raspunde problemei si va unifica numeroase rezultate demonstrate in diverse cazuri speciale in teoria algebrelor Hopf. Modul de abordare a problemei, la nivelul maxim de generalitate posibil, va fi insa diferit de

cel utilizat până acum pentru diverse categorii de reprezentări sau coreprezentări asociate acțiunilor ori coacțiunilor de algebre Hopf.

Dorim să menționăm totodată că alte două obiective ale proiectului de cercetare începute în anul 2008 au primit noi răspunsuri prin articole scrise de membrii proiectului. Este vorba de obiectivele „**Produce bicrossed : structura și clasificare**” și ‘**Produce general la nivel de algebre și grupuri cuantice : probleme de structura și clasificare**’ astfel: am lucrat la problema clasificării produselor crossed între două grupuri ciclice (finite sau infinite) și determinarea când un produs crossed e grup ciclic (articolul [AF 1]). Primul rezultat de acest tip a fost dat de Holder care descrie prin generatori și relații produsele crossed între grupuri ciclice finite. Am completat acest rezultat cu descrierea tuturor produselor crossed între toate tipurile de grupuri ciclice (nu neapărat finite). Problema se poate reformula în limbaj de extensii: dacă avem un șir scurt exact de grupuri, în ce condiții grupul din mijloc este ciclic? Una dintre condițiile necesare (și evidente) este ca cele două grupuri din margine să fie ciclice. Faptul interesant aici este că dacă considerăm produsul direct (caz special de crossed) obținem tocmai Teorema Chineza a Resturilor transpusă în limbaj de grupuri: produsul direct a două grupuri ciclice este ciclic dacă și numai dacă grupurile sunt finite și au ordine coprime. Folosind descrierea tuturor produselor crossed de două grupuri ciclice în termeni de generatori și relații și am determinat exact când acestea sunt grupuri ciclice (vezi [AF 1]). Lucrând echivalent cu „crossed systems” în loc de șiruri scurte exacte am descris condițiile necesare și suficiente ca un produs crossed să fie grup ciclic.

Primul rezultat de structura a produselor bicrossed de grupuri a fost dat de trei dintre membrii proiectului în lucrarea [ACIM]: un produs bicrossed a două grupuri ciclice de ordin finit din care unul are ordin prim este izomorf cu un produs semidirect. Acesta problema naște natural întrebarea privind clasificarea produselor bicrossed similară cu cea a produselor crossed de grupuri. Problema de clasificare a produselor bicrossed de grupuri a fost începută la începutul anului 2008 și continuată în timpul unei vizite de studiu la Free Univ. Brussel în iulie 2009: în acest moment se află în fază de redactare [AM 2]: am dat o nouă teoremă de structura a produselor bicrossed de grupuri realizându-le ca grup factor ale unei sume fibrante de două produse semidirecte de grupuri iar apoi am urmărit problema mai generală de ,deformare a sistemelor marched pair’. Ca aplicație a noii abordări am dat răspuns complet (i.e. condiții necesare și suficiente) la așa numita „invariance under twisting problem” și apoi ca și consecință a ei am dat două teoreme de clasificare a produselor bicrossed care ne conduc la un filon nou și tentant de exploatat și pe viitor: construcția a două mulțimi punctate care va joaca

rolul grupurilor de coomologie pentru produsele bicrossed. Tema e foarte promitatoare pentru abordari ulterioare ale ei care speram sa fie facute.

Articole publicate in reviste cotate ISI in anul 2008:

[MI 1] M.C. Iovanov, J. Verduyck, *Cofrobenius corings and adjoint functors*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 212 (2008), Issue 9, 2011-2146.

[MI 2] M.C. Iovanov, *Frobenius Extensions of Corings*, Communications in Algebra (2008), no. 3, 869-892.

[MI 3] M.C. Iovanov, C. Nastasescu, B. Torrecillas-Jover, *The Dickson Subcategory Splitting Conjecture for Pseudocompact Algebras*, Journal of Algebra, vol. 320 (2008), no. 5, 2144-2155.

[AM 1] A.L. Agore, G. Militaru, *Crossed Product of groups. Applications*. Acceptata spre publicare in AJSE si va apare in numarul din decembrie 2008, (revista cotate ISI in categoria stiintele naturii si stiintele ingineresti).

Articole acceptate spre publicare in reviste cotate ISI in anul 2008:

[ACIM] A. L. Agore, A. Chirvasitu, B. Ion, G. Militaru: *Bicrossed products for finite groups*, va apare in Algebras and Representation Theory.

[MI 4] M.C. Iovanov, "When does the Rational Torsion Split off for Finitely Generated Modules", va apare, Algebra and Representation Theory.

[MI 5] M.Beattie, M.C. Iovanov, S. Raianu, "The antipode of a dual quasi-Hopf algebra with integrals is bijective", va apare, Algebra and Representation Theory.

[MI 6] M.C. Iovanov, „The generating condition for coalgebras”, va apare, London Mathematical Society (the Bulletin or the Journal).

Articole trimise spre publicare in anul 2008:

[MI 7] M.C. Iovanov, "Generalized Frobenius Algebras and the Theory of Hopf Algebras.

[MI 8] M.C. Iovanov, *Abstract Integrals in Algebra*.

[MI 9] M.C. Iovanov, L. Kadison, „When is a weak quasi-Hopf algebra Frobenius”.

[BI 1] B. Ion, *Generalized exponents of small representations. I: Prologue*. 31 pg.

[BI 2] B. Ion, *Generalized exponents of small representations. II: Fourier coefficients*. 42 pg.

[AF 1] A. L. Agore, D. Fratila, *Crossed products of cyclic groups*.

Articole in curs de finalizare (incepute in 2008):

[BI 3] B. Ion, *Generalized exponents of small representations. III: Quasi-symmetric functions.*

[BI 4] B. Ion, *Generalized exponents of small representations. IV: Combinatorics.*

[GM 1] G. Militaru, *Representable functors for corings* (titlul provizoriu),

[AM 2] A.L. Agore, G. Militaru (titlul provizoriu): *The classification of bicrossed products of groups.*

Proiectul demarat al scrierii unui Monografii stiintifice:

[GM 2] G. Militaru: (titlul provizoriu) *Categorical Methods in noncommutative algebra,*

Concluzii:

Consideram ca toate obiectivele si activitatile asumate in etapa intermediara 2009 a proiectului de cercetare au fost indeplinite si depasite in ceea ce priveste realizarile stabilite prin criteriile de performanta. In aceasta etapa, prin contract (anexa II b) a fost stabilit ca vom publica doua articole (unul in revista cotate ISI si unul in revista necotate ISI) in acest moment putem raporta ca avem **7 articole publicate sau in curs de publicare in reviste cotate ISI si alte 6 sunt trimise spre publicare.**

Director de proiect

Bucuresti, 29 decembrie 2008

Prof. dr. Gigel Militaru