

Raport stiintific

privind implementarea proiectului in perioada ianuarie – decembrie 2012

Echipa: director de proiect, doi cercetatori cu experienta, doi doctoranzi. Ana Agore si-a sustinut teza de doctorat in 1 octombrie 2012, obtinind distinctia maxima. Costel Bontea si-a inceput stagiul doctoral in 1 octombrie 2011 in cotutela intre UB si Free Univ. Brussel: stagiile acestuia in 2012 la universitatea partenera fiind finantate exclusiv din proiect.

Rezumat raport stiintific 2012: 10 articole publicate/acceptate dintre care 9 in reviste cotate ISI - factorul de impact (IF) pentru anul 2011 este indicat. Alte 7 articole sunt trimise spre publicare toate in reviste cotate ISI. 5 expuneri la conferinte internationale si 2 la workshop-uri universitare.

Articole publicate/acceptate in etapa 2012 (toate mentioneaza finantarea din grant):

[ACM1] A.L. Agore, S. Caenepeel, G. Militaru – The center of the category of bimodules and descent data for non-commutative rings, *J. Algebra Appl.* 11 (2012), 1-17. (IF 2011: 0.483)

[M2] G. Militaru – Representable functors for corings, *Comm. Algebra* 40 (2012), no.5, 1766-1796. (IF 2011: 0.347)

[AM3] A. L. Agore and G. Militaru – Schreier type theorems for bicrossed products, *Cent. Eur. J. Math.* 10 (2012), no.2, 722-739. (IF 2011: 0.440)

[ABM4] A. L. Agore, C. G. Bontea, and G. Militaru – Classifying bicrossed products of Hopf algebras, acceptat in *Algebr. Represent. Theory*, DOI:10.1007/s10468-012-9396-5 (IF 2011: 0.595).

[ACM5] A.L. Agore, S. Caenepeel, G. Militaru – Braidings on the category of bimodules, Azumaya algebras and epimorphisms of rings, acceptat in *Applied Cat. Structures* - DOI: 10.1007/s10485-012-9294-3, (IF 2011: 0.600)

[A6] A.L Agore – Coquasitriangular structures for extensions of Hopf algebras, acceptat in *Glasgow Math. J.* - DOI: 10.1017/S0017089512000444, (IF 2011: 0.571)

[A7] A.L. Agore – Crossed product of Hopf algebras, acceptat in *Comm. Algebra* (IF 2011: 0,347)

[ABM8] A. L. Agore, C. G. Bontea, and G. Militaru – Classifying coalgebra split extensions of Hopf algebras, acceptat in *J. Algebra Appl.* - DOI: 10.1142/S0219498812502271, (IF 2011: 0.483)

[B9] S. Burciu – Subgroups of odd depth - a necessary condition, acceptat in *Czechoslovak Math. J.* (IF 2011: 0.262)

[AM10] A. L. Agore, G. Militaru – Unified products and split extensions of Hopf algebras, acceptat in *AMS Contemporary Math* – va apare in 2013.

Articole trimise spre publicare in etapa 2012(toate mentioneaza finantarea din grant):

[ABM11] A. L. Agore, C. G. Bontea, and G. Militaru – The classification of all crossed products $H_4 \# k[C_n]$, trimis spre publicare la *Internat. J. Algebra Comp.* (IF 2011: 0.453)

[AM12] A. L. Agore, G. Militaru – Bicrossed descent theory of exact factorizations and the number of types of groups of finite order, trimis la *J. Algebra* (IF 2011: 0.613)

[B13] S. Burciu – On coideal subalgebras of cocentral Kac algebras and a generalization of Wall's conjecture, trimis la *J. Algebra*, revision R1 a fost facuta (IF 2011: 0.613)

[B14] S. Burciu – On the irreducible representations of generalized quantum doubles, trimis la *Adv. Math.* (IF 2011: 1.177)

[B15] S. Burciu, A. Bruguières – On normal tensor functors and coset decompositions for fusion categories, trimis la *Applied Cat. Structures* (IF 2011: 0.600)

[B16] C. G. Bontea – Classifying bicrossed products of two Sweedler's Hopf algebras, trimis la *Cent. Eur. J. Math.* (IF 2011: 0.440)

[CI17] V. Chari, B. Ion – BGG reciprocity for current algebras, trimis la *Compositio Math.* (IF 2011: 1.187)

Diseminarea rezultatelor (talk-uri ale membrilor proiectului):

[C1] G. Militaru - *Classifying bicrossed products of quantum groups*, Algebra Geometry Mathematical Physics, Brno, septembrie 2012. Expunere conferinta internationala.

[C2] G. Militaru - *Extending structures: the level of groups*, Groups and their actions, Bedlewo, iulie 2012. Expunere conferinta internationala.

[C3] A.L. Agore - *Bicrossed descent theory of exact factorizations and the number of types of groups of finite order*, Groups and their actions, Bedlewo, iulie 2012. Expunere conferinta internationala

[C4] C. Bontea - *Classifying crossed product of quantum groups*, Algebra Geometry Mathematical Physics(AGMP), Brno, septembrie 2012. Expunere conferinta internationala.

[C5] A. L. Agore - *Deformations and descent type theory for Hopf algebras*, Algebra Geometry Mathematical Physics, Brno, septembrie 2012. Expunere conferinta internationala

[C6] G. Militaru - *Classifying bicrossed products. Deformations and descent type theory for quantum groups*, Hopf Algebra Workshop, Brussel VUB, 19 martie 2012.

[C7] B. Ion – *The Hopf-Poincare-Birkhoff-Witt theorem*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, USA. Colocviu, Februarie 2012.


Rezumatul rezultatelor stiintifice obtinute:

Continutul articolelor [ACM1], [AM3], [ACM5] si [AM10] a fost detaliat in raportul din 2011 fiind trimise spre publicare in acea etapa. Articolul [M2], parte a **obiectivului II, problema 2b)**, studiaza patru probleme referitoare la functori reprezentabili. Fie R si S doua inele, C un R -coring si ${}^C\mathcal{M}$ categoria de C -comodule stangi. Se arata ca categoria tuturor functorilor reprezentabili ${}^C\mathcal{M} \rightarrow {}_S\mathcal{M}$ este categoria opusa categoriei ${}^C\mathcal{M}_S$. Mai mult, pentru un (S,R) -bimodul U sunt date conditii necesare si suficiente pentru ca functorul $U \otimes_R -: {}^C\mathcal{M} \rightarrow {}_S\mathcal{M}$ reprezentabil, echivalenta de categorii, separabil sau Frobenius. Articolul [ABM4] se inscrie in **primul obiectiv** si grantului si trateaza **problema 1b)**, anume, clasificarea pana la un izomorfism ce stabilizeaza A a algebrelor Hopf care factorizeaza prin doua algebra Hopf date A si H . Echivalent, sunt clasificate pana la un izomorfism stang A -liniar de algebra Hopf toate produsele bicrossed intre A si H . Se arata ca aceste obiecte sunt clasificate de un obiect coomological $\mathcal{H}_2(A,H)$. In constructia lui $\mathcal{H}_2(A,H)$ rolul central este jucat de anumite elemente din produsul $CoZ(H,A) \times Aut_{CoAlg}(H)$, unde $CoZ(H,A)$ este multimea aplicatiilor unitare cocentrale $H \rightarrow A$ iar $Aut_{CoAlg}(H)$ este multimea automorfismelor unitare de coalgebra $H \rightarrow H$. Printre numeroase alte aplicatii si exemple, sunt descrise prin generatori si relatii si clasificate toate produsele bicrossed intre H_4 si $k[C_n]$. Numarul tipurilor de izomorfism ale acestor grupuri cuantice este determinat folosind teorema Dirichlet. Ca o consecinta, grupul de automorfisme al acestor grupuri cuantice este de asemenea determinat. Articolul [A6] se incadreaza in **primul obiectiv** al grantului, **problema 1a)**. Teorema principala stabileste o corespondenta bijectiva intre multimea tuturor structurilor coquasitriangulare pe un produs unified arbitrar al lui A cu H si un set de date (p, τ, u, v) ce corespund componentelor produsului unified. Ca aplicatie sunt obtinute conditii necesare si suficiente pentru ca dublul cuantic generalizat introdus de Majid sa fie algebra Hopf coquasitriangulata. De asemenea, sunt prezentate exemple explicite. Articolul [A7] se incadreaza in **primul obiectiv** al grantului, **problema 1a)**. Sunt studiate produsele crossed de algebre Hopf. O algebra Hopf E este izomorfa cu un produs crossed intre doua algebre Hopf A si H daca si numai daca E factorizeaza printr-o subalgebra Hopf normala A si o subcoalgebra H . Sunt studiate principalele proprietati ale produselor crossed precum: universalitatea constructiei, existenta integralelor, comutativitate, involutivitate. Din punct de vedere categorical, sunt descrise toate structurile braided pe categoria pe comodule peste un produs crossed in functie de componentele produsului crossed. Articolul [ABM8] se inscrie in **primul obiectiv** al grantului si trateaza **problema 1a)**, anume, clasificarea tuturor produselor crossed pentru doua algebre Hopf date A si H . Se arata ca orice extindere a lui A prin H care splitteaza in categoria coalgebrelor este echivalenta cu un produs crossed al lui A cu H asociat unui sistem crossed de algebre Hopf. Problema clasificarii extinderilor lui A prin H care splitteaza in categoria algebrelor Hopf se reduce astfel la una pur computationala. Se arata ca multimea sistemelor crossed asociate

perechii (A, H_4) , unde H_4 e algebra Hopf 4-dimensională a lui Sweedler, e în bijecție cu mulțimea $\mathcal{ZP}(A)$ a tuturor elementelor centrale și primitive ale lui A (rezultat valabil pentru orice algebra Hopf A). Mai mult, mulțimea claselor de echivalență de produse *crossed* ale lui A cu H_4 e în bijecție cu o mulțime factor a lui $\mathcal{ZP}(A)$. Pentru ilustrare, se consideră în final câteva cazuri explicite de alegere a lui A , printre care algebra Hopf polinomială și algebra Hopf semisimplă p -dimensională. În articolul [B9], parte a **primului obiectiv, problema 2d**), este dată o condiție combinatorială pentru ca un subgrup cu *trivial core* să fie un subgrup de *adancime impară*. Condiția este expusă ca o anumită matrice cu intrări $\{0, 1\}$ să aibă *rank maximal*. Articolul [ABM11] este o continuare a lucrării [ABM8] și se înscrie de asemenea în **primul obiectiv** al grantului, **problema 1a**). Cu ajutorul metodei dezvoltate în [ABM8] e dată o clasificare a tuturor produselor *crossed* ale lui H_4 cu $k[C_n]$, unde cea din urmă e algebra Hopf grupală asociată grupului ciclic cu n elemente, C_n . Rezultatul obținut este că mulțimea sistemelor *crossed* asociate perechii $(H_4, k[C_n])$ e în bijecție cu mulțimea $CS(n, k)$ a tuturor perechilor (t, λ) , unde $t : C_n \rightarrow C_2$ e o funcție unitară și λ e o rădăcină a lui ± 1 (semnul fiind dictat de semnătura lui t), iar mulțimea claselor de echivalență de produse *crossed* ale lui H_4 cu $k[C_n]$ e în corespondență bijectivă cu o anumită mulțime factor a lui $CS(n, k)$. Articolul [AM12] se încadrează în **primul obiectiv** al grantului, **problema 1b**). Dacă A este un subgrup al lui G și H o factorizare A -formă a lui G atunci se arată orice altă "factorizare" A -formă H' a lui G este izomorfă cu deformarea H_r , unde $r : H \rightarrow A$ este o aplicație descendentă. La fel ca în cazul algebrilor Hopf, se arată că există un izomorfism între tipurile de izomorfism ale tuturor factorizărilor A -formelor lui G și obiectul coomologic $\mathcal{HA}(A, G \mid \blacktriangleright, \blacktriangleleft)$. Principala aplicație arată că orice grup cu n elemente este izomorf cu o r -deformare a grupului ciclic C_n și este obținută o formulă explicită pentru înmulțirea oricărui grup cu n elemente. Articolul [B13] este parte a **primului obiectiv, problema 1c**). Se arată că orice subalgebră coideală a unei algebre Hopf finite dimensionale este un modul ciclic peste algebra Hopf duală. Folosind această descriere s-au enumerat subalgebrele coideale ale unei algebre Hopf semisimple de tip Kac contribuind la studiul algebrilor Hopf semisimple. Această enumerare a subalgebrilor coideale permite demonstrarea unei conjecturi formulate de R. Guralnick și F. Xu. În articolul [B14], **parte a obiectivului II, problema 2e**), este realizată o descriere a reprezentărilor ireductibile ale dublurilor quantice generalizate asociate unui skew pairing de algebre Hopf. În particular se obține o descriere a reprezentărilor ireductibile ale dublurilor quantice Drinfeld semisimple. Această descriere este obținută folosind teoria Clifford pentru algebrele Hopf semisimple dezvoltată de autor într-o lucrare precedentă. Este de asemenea arătat că inelul Grothendieck ale acestor dubluri quantice generalizate are o structură similară inelelor care sunt asociate functorilor Green. În articolul [B15], **parte a obiectivului II, problema 2d**), sunt introduse noțiunile de dublu coset relativ la două subcategorii de fuziune a unei categorii de fuziune date. Se poate defini subcategoria radicală a unei subcategorii de

fuziune a unei categorii de fuziune. Folosind notiunea de coset se poate arata ca pentru subcategoriile de fuziune normale radicalul acestora coincide cu comutatorul lor. Ca aplicatie se obtin criterii noi pentru a stabili cand un functor tensorial este normal. De asemenea se da o descriere a imaginii unui functor tensorial normal intre oricare doua categorii de fuziune. Articolul [B16] este parte din **primul obiectiv, problemei 1b)** si reprezinta o aplicare a metodelor dezvoltate in [ABM10] intr-un caz concret, anume, in clasificarea tuturor produselor bicrossed a doua algebre Hopf ale lui Sweedler. Se arata ca, exceptand perechea triviala, perechile potrivite asociate perechii (H_4, H_4) sunt parametrizate de corpul de baza k . Fiecarui element λ din k ii corespunde un produs bicrossed, $\mathcal{H}_{4,\lambda}$, care e o algebra Hopf 16-dimensională, punctată, unimodulară și ne-semisimplă. Clasele de izomorfism ale acestor algebre Hopf sunt reprezentate de produsul tensorial al lui H_4 cu H_4 , $\mathcal{H}_{4,0}$ și $\mathcal{H}_{4,1}$, cea din urmă dovedindu-se a fi izomorfa cu dublul Drinfel'd al lui H_4 . Articolul [CI17], ce contribuie la realizarea **obiectivului II, problema 2b)**, tratează existența unei dualități într-o categorie de reprezentări ale algebrelor Lie current, de tipul celei descoperite de Bernstein-Gelfand-Gelfand în cazul categoriei \mathcal{O} asociate unei algebre Lie semisimple. Rezultatul principal (conjecturat de Chari în 2011) stabilește egalitatea dintre multiplicitatea unui obiect simplu într-un modul Weyl local și multiplicitatea unui modul Weyl global în acoperirea proiectivă a unui obiect simplu. În principiu, categoria de interes este categoria reprezentărilor finite dimensionale pentru algebra anvelopantă cuantizată a unei algebre Lie afine. Studiul acestei categorii a fost redus la studiul categoriei de module ponderate graduate ce au componentele omogene finite dimensionale, pentru așa numitele algebre Lie current. În [CI17] identificăm această categorie cu categoria modulelor ponderate pentru algebra parabolică maximală specială a unei algebre Lie afine. Caracterele modulelor Weyl sunt identificate cu limite de polinoame Macdonald.

3.12.2012


Director proiect,
Prof. dr. Gigel Militaru