# Proiect:ID 1005,
# Coinele, algebre Hopf şi categorii braided monoidale,
# Director: C. Năstăsescu
# SINTEZA LUCRĂRII

Cercetarea pe temele propuse în proiect s-a concretizat în următoarele articole:

- [1] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu şi M. Năstăsescu, Strongly involutory functors, trimisă spre publicare la Communications in Algebra.
- [2] D. Bulacu, S. Caenepeel, B. Torrecillas, Involutory (Dual) Quasi-Hopf Algebras, trimisă spre publicare la Journal of Algebra.
- [3] G. Barad, On a remark of Loday about the Associahedron and Algebraic K-Theory, acceptată de Analele Ştiinţifice ale Universităţii Ovidius Constanţa. Seria Matematică.

Prezentăm în continuare principalele rezultate ale acestor lucrări.

În lucrarea [1] tema principală de studiu o constituie functorii tare involutivi pe categorii abstracte. Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie, un functor tare involutiv pe $\mathcal{C}$ este un functor contravariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ care acţionează ca identitatea pe obiecte şi pentru care $F^2(f) = f$ pentru orice morfism $f$ în $\mathcal{C}$. Exemplele care motivează studiul acestor functori pot fi construite atunci când considerăm: (a) transpusa unei matrice, unde matricele sunt privite ca morfisme de spaţii vectoriale; (b) operatorul adjunct al unui operator liniar si continuu între spaţii Hilbert; (c) inversul unui morfism într-un grupoid. Am studiat proprietăţi de bază ale functorilor tare involutivi. Am considerat problema determinării tuturor functorilor tare involutivi pe categoria $\mathcal{F}$ a spaţiilor vectoriale peste un corp dat. Pentru aceasta am studiat mai întâi functorii tare involutivi pe un schelet $\mathcal{F}_0$ al lui $\mathcal{F}$. Descrierea acestor functori care sunt şi $K$-liniari am dat-o în următorul rezultat.

**Teoremă.** *Pentru fiecare număr natural $n$ considerăm o matrice inversabilă simetrică $A_n$ de tip $n \times n$. Considerăm şi o mulţime $(\alpha_{m,n})_{m,n\in\mathbf{Z}_+}$ de elemente din $K^*$ pentru care $\alpha_{m,n}\alpha_{n,p} = \alpha_{m,p}$ pentru orice $m, n, p \in \mathbf{Z}_+$. Atunci functorul contravariant $T : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0$ care acţionează ca identitatea pe obiecte şi este definit prin $T(X) = \alpha_{m,n}A_nX^tA_m^{-1}$ pentru orice $m, n \in \mathbf{Z}_+$ şi orice $X \in M_{m,n}(K) \simeq Hom(K^m, K^n)$ este $K$-liniar şi tare involutiv.*
*Mai mult, orice functor $K$-liniar şi tare involutiv $T : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0$ este de această formă.*

Mai mult, am clasificat aceşti functori până la o echivalenţă naturală. Pentru a descrie functorii tare involutivi şi $K$-liniari pe $\mathcal{F}$, am demonstrat următorul rezultat.

**Teoremă.** *(1) Fie $\mathcal{C}$ o categorie, $\mathcal{C}_0$ un schelet al său şi $T : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_0$ un functor tare involutiv. Pentru orice $M \in \mathcal{C}$ fie $\alpha_M : M \to M_0$ şi $\gamma_M : M_0 \to M$ izomorfisme pentru care $\alpha_M\gamma_M$ este $T$-invariant, şi astfel încât pentru orice $M \in \mathcal{C}_0$ avem $\alpha_M = \gamma_M = 1_M$. Atunci functorul $\overline{T} = F(T, (\alpha_M)_{M\in\mathcal{C}}, (\gamma_M)_{M\in\mathcal{C}}) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, acţionând ca identitatea pe obiecte şi definit prin $\overline{T}(f) = \gamma_M T(\alpha_N f \alpha_M^{-1})\gamma_N^{-1}$ pentru orice morfism $f : M \to N$, este un functor tare involutiv şi $\overline{T}_{|\mathcal{C}_0} = T$.*
*(2) Fie $U : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un functor tare involutiv pe $\mathcal{C}$, şi fie $U_0$ restricţia lui $U$ la $\mathcal{C}_0$. Atunci pentru orice obiect $M$ din $\mathcal{C}$ există izomorfisme $\alpha_M : M \to M_0$ şi $\gamma_M : M_0 \to M$ astfel încât $\alpha_M\gamma_M$ este $T_0$-invariant, $\alpha_M = \gamma_M = 1_M$ pentru orice $M \in \mathcal{C}_0$, şi $T = F(T_0, (\alpha_M)_{M\in\mathcal{C}}, (\gamma_M)_{M\in\mathcal{C}})$.*

Am arătat că functorii tare involutivi au aplicaţii în extinderea conceptului de inversă generalizată a unei matrice. Mai precis am demonstrat următorul rezultat.

**Teoremă.** *Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu proprietatea că orice morfism $f$ din $\mathcal{C}$ se poate scrie $f = u \circ v$ pentru un monomorfism $u$ şi un epimorfism $v$ (aceasta se întâmplă în situaţia în care $\mathcal{C}$ este categorie abeliană). Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un functor tare involutiv cu proprietatea că $T(g) \circ g$ este izomorfism pentru orice monomorfism $g$. Atunci pentru orice morfism $f : M \to N$ din $\mathcal{C}$ există un unic morfism $f^\dagger : N \to M$ care satisface următoarele proprietăţi.*
*(1) $f = f \circ f^\dagger \circ f$ şi $f^\dagger = f^\dagger \circ f \circ f^\dagger$*
*(2) $f \circ f^\dagger$ şi $f^\dagger \circ f$ sunt morfisme $T$-simetrice.*

Ca aplicaţie a acestui rezultat am demonstrat următoarea.

**Propoziţie.** *Fie $\phi$ un automorfism al corpului comutativ $K$ astfel încât $\phi^2 = Id$. Presupunem că $\sum_{i=1,n} \phi(\alpha_i)\alpha_i = 0$ dacă şi numai dacă $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, pentru orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Atunci pentru orice $A \in M_{m,n}(K)$ există o unică matrice $A^\dagger \in M_{n,m}(K)$ care satisface următoarele proprietăţi.*
*(1) $A = AA^\dagger A$ şi $A^\dagger = A^\dagger AA^\dagger$.*
*(2) $(AA^\dagger)^\phi = (AA^\dagger)^t$ şi $(A^\dagger A)^\phi = (A^\dagger A)^t$.*

În cazul în care $K$ este corpul numerelor complexe şi $\phi$ este conjugarea complexă, un corolar al propoziţiei de mai sus este celebrul rezultat al lui Moore şi Penrose privind inversa generalizată a unei matrice. Un alt corolar care prezintă interes îl obţinem pentru cazul în care $K$ este un corp real închis şi $\phi$ este identitatea.

În lucrarea [2] sunt studiate algebrele quasi-Hopf involutorii. Din punct de vedere al categoriilor monoidale, conceptul de algebră quasi-Hopf se defineşte de aşa natură încât categoria (bi)reprezentărilor sale să fie o categorie monoidală cu dualitate la stânga şi la dreapta. Astfel, orice concept legat de noţiunea quasi-Hopf trebuie sa aibă o interpretare braided monoidală. Cel puţin aşa este cazul în ceea ce priveşte algebrele quasi-Hopf quasi-triangulare, ribbon sau factorizabile. În cazul algebrelor Hopf există o interpretare monoidală pentru conceptul de involutorie, ea se datorează lui Majid. Mai exact, pentru o algebră Hopf finit dimensională $H$, pătratul antipodului are urma egală cu rangul reprezentării teoretice a lui $H$ sau al dublului cuantic asociat lui $H$, $D(H)$, considerat în categoria braided a reprezentarilor lui $D(H)$. În plus, corelat cu anumite rezultate recente ale lui Larson, Radford, Etingof şi Gelaki, acest rang este zero dacă $H$ nu este semisimplă sau cosemisimplă, în caz contrar el coincide cu dimensiunea uzuală a lui $H$ deoarece $H$ este involutorie. De aceea, într-un articol recent am calculat rangul reprezentării teoretice a lui $H$ şi al dublului cuantic asociat lui $H$, $D(H)$, pentru $H$ o algebră quasi-Hopf finit dimensională, ajungând astfel la o plauzibilă definiţie a conceptului de algebră quasi-Hopf involutorie.

Având acest concept de algebră quasi-Hopf involutorie, în cadrul acestei faze a proiectului, am arătat ca el este compatibil cu un un punct de vedere recent datorat lui Etingof, Nikshych şi Ostrik. Mai precis, dacă $k$ este un corp algebric închis de caracteristică zero iar $H$ este o algebră quasi-Hopf involutorie atunci $H$ este semisimplă, functorul identitate şi al doilea functor de dualitate al categoriei reprezentărilor finit dimensionale peste $H$ sunt izomorfi (ca functori monoidali), iar pentru orice $H$-modul simplu finit dimensional, dimensiunea sa categoricală coincide cu dimensiunea sa clasică. Mai mult, am calculat această unică structură pivotală, arătând că ea este definită de elementul ce exprimă pătratul antipodului lui $H$ ca un automorfism interior. În continuare, ne-am axat în a determina clase de algebre quasi-Hopf involutorii. Pornind cu $H(2)$, o algebră quasi-Hopf involutorie de dimensiune 2, aplicând construcţii generale ca, bozonizarea sau dublul cuantic, am obţinut noi exemple de astfel de algebre quasi-Hopf de dimensiune 4. Surprinzător este poate faptul că, lucrând cu algebre quasi-Hopf involutorii, am reobtinut un contraexemplu ce arată că dacă două algebre grupale sunt izomorfe atunci grupurile ce le definesc nu sunt neapărat izomorfe. Pe lângă alte rezultate de bază privind algebrele quasi-Hopf involutorii, am mai demonstrat următoarele rezultate:

1. Dacă $H$ este o algebră quasi-Hopf involutorie peste un corp algebric închis de caracteristică zero, la fel este dublul său cuantic $D(H)$;

2. Dacă $H$ este o algebră quasi-Hopf involutorie semisimplă atunci caracteristica lui $k$ nu divide dimensiunea nici unui $H$-modul simplu absolut finit dimensional;

3. Dacă $H$ este o algebră quasi-Hopf involutorie ce nu este semisimplă atunci caracteristica lui $k$ divide dimensiunea oricărui $H$-modul proiectiv finit dimensional;

4. Pentru a determina toate structurile de algebră quasi-Hopf (involutorie) ce se pot defini pe algebra grupală a grupului lui Klein am calculat al treilea grup de coomologie al acestui grup, cu valori în $k^*$. De fapt, am arătat că acesta are, în general, opt elemente speciale la care se adaugă altele definite de $k/k^{*(2)}$.

Noţiunea de algebră quasi-Hopf nu este una duală. De aceea, am studiat şi algebrele quasi-Hopf duale care sunt involutorii. Deoarece ele sunt coalgebre în sens uzual are sens să le studiem din punct de vedere al integralelor, mai exact să definim concepte ca, co-Frobenius sau cosemisimplu. În cazul algebrelor Hopf, un rezultat datorat lui Dăscălescu, Năstăsescu şi Torrecillas afirmă că, peste un corp de caracteristică zero, o algebră Hopf co-Frobenius şi involutorie este cosemisimplă. Folosind tehnici recent introduse, am arătat că acest rezultat rămâne valabil şi în cazul algebrelor quasi-Hopf duale involutorii.

Lucrarea [3] îşi propune următoarele scopuri:
- Definim grupurile $R(n)$. Ele genereazā un sistem de ecuaţii de tip Yang-Baxter ce unifică ecuaţia Hopf şi Yang-Baxter.
- Demonstrăm o remarcă a lui J.L. Loday, expusă în cursul său din 2006 din Polonia, p.42 J.L.Loday, Cyclic Homology Theory, care afirmă că laturile asociedrului, poliedru convex de dimensiune n, şi care parametrizează arborii binari cu n vârfuri interioare, se pot decora cu elemente ale Grupului Steinberg al unui inel A. Demonstrăm mai mult: şi vârfurile se pot decora cu elemente ale acestui grup important in K-Teoria Algebrică.
Demonstraţia se bazează pe introducerea unor noi grupuri, $R(n)$. Scopul iniţial al introducerii acestor grupuri a fost studiul distanţei de rotaţie între arbori binari, iar demonstraţia din articol este o consecinţă a studiului grupurilor $R(n)$, din punct de vedere algebric şi din punctul de vedere al utilităţii în studiul distanţei de rotaţie.
- Grupurile $R(n)$ interacţionează formând o structură algebrică de Operad, similară Grupurilor Braid de tip A.
- O clasă de reprezentări ale acestor grupuri sunt guvernate de un sistem de ecuaţii de tip Yang-Baxter:

$$R(1,2)S(1,3)R(2,3) = R(2,3)R(1,3)R(1,2)$$
$$R(2,3)S(1,3)S(1,2) = S(1,2)S(1,3)R(2,3)$$

- Grupurile $R(n)$ şi decorarea laturilor grafului de rotaţie cu elemente din GL( $Z_2$, $n$) ne permit să demonstrăm algebric şi combinatorial că diametrul Grafului de Rotaţie este $2n - o(1)$, rezultat demonstrat în 1988 de Thurston, Sleator si Tarjan folosind estimări volumetrice din Geometria Hiperbolică.

O altă direcţie de investigaţie a fost studiul coinelelor în categorii monoidale. Noţiunea de algebră sau coalgebră are sens în orice categorie monoidală (i.e., o categorie înzestrată cu produs tensorial, obiect unitate, constante de asociativitate şi constante de unitate la stânga şi la dreapta). Chiar dacă definiţiile acestor noţiuni sunt generalizări imediate ale noţiunilor de $k$-algebră şi, respectiv, $k$-coalgebră (reformulate la nivel de diagrame comutative), semnificaţia lor diferă de la o categorie la alta. Spre exemplu, o algebră în categoria mulţimilor este un monoid iar în această categorie orice mulţime are o structură de coalgebră, în timp ce in categoria lui Zunino o algebră este o algebră graduată după un monoid iar o coalgebră este o familie de $k$-coalgebre indexată dupa o mulţime arbitrară; şi exemplele pot continua considerând categoria lui Turaev, categoria endofunctorilor, categorii de module Yetter-Drinfeld etc. Similar, în orice categorie braided monoidală putem introduce conceptul de bialgebră sau algebră Hopf. În felul acesta, multe concepte şi rezultate din teoria algebrelor Hopf şi a grupurilor cuantice pot fi exlicate din punctul de vedere al categoriilor braided monoidale. Menţionăm aici noţiunea de bialgebă, de bialgebră quasi-triangulară, legătura dintre modulele Yetter-Drinfeld şi dublul cuantic construit de Drinfeld şi teorema lui Radford privind structura unei algebre Hopf cu proiecţie.

Noţiunea clasică de coring a fost introdusă de Sweedler în 1975 însă interesul algebriştilor pentru aceste structuri a apărut la sfârşitul secolului trecut atunci când Takeuchi a arătat legătura dintre aceste obiecte şi modulele Doi-Hopf. În ceea ce ne priveşte, noţiunea de coring se poate reformula într-un limbaj monoidal. Mai exact, dacă $A$ este o $k$-algebră atunci categoria de $A$-bimodule are o structură monoidală; produsul tensorial este cel peste $A$, obiect unitate este $A$ văzut ca $A$-bimodul în mod natural iar constantele de asociativitate şi unitate la stânga şi la dreapta sunt cele induse de pe categoria de spaţii vectoriale. Astfel, un $A$-coring este exact o coalgebră în categoria monoidala a $A$-bimodulelor.

Fiindcă noţiunea de algebră are sens în orice categorie monoidală, la fel ca şi categoria de $A$-bimodule, noţiunea de $A$-coring are sens în orice categorie monoidală ce satisface un set minimal de condiţii. Mai exact, am considerat următorul context: $\mathcal{C}$ o categorie monoidală, $\mathcal{D}$ o $\mathcal{C}$-categorie şi $A$ o algebră în $\mathcal{C}$. Pentru a avea un "produs tensorial peste $A$" am presupus că ambele categorii sunt cu, co-egalizatoare iar pentru a construi izomorfisme ce produc constante de asociativitate a trebuit sa presupunem că $A$ este co-plată la stânga şi $\mathcal{D}$-co-plată, iar orice modul stâng peste $A$ in $\mathcal{C}$ este $\mathcal{D}$-robust şi robust. În aceste condiţii am arătat că subcategorie lui $\mathcal{C}$ formată din $A$-bimodulele din $\mathcal{C}$ ce sunt $\mathcal{D}$-robuste şi robuste şi $\mathcal{D}$-co-plate şi co-plate la stânga, notată cu ${}^{!\mathcal{D}}_{A}\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, are o structură monoidală iar categoria modulelor drepte peste $A$ din $\mathcal{D}$ are o structură de ${}^{!\mathcal{D}}_{A}\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-categorie. Astfel, un $A$-coring într-o $\mathcal{C}$-categorie se defineşte ca fiind o coalgebră în categoria monoidală ${}^{!\mathcal{D}}_{A}\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ iar un comodul la dreapta peste un astfel de $A$-coring este un comodul peste aceasta coalgebră în ${}^{!\mathcal{D}}_{A}\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-categoria modulelor drepte peste $A$ din $\mathcal{D}$. Considerând $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ am obţinut noţiunea de coring într-o categorie monoidală, generalizând astfel conceptul clasic de coinel introdus de Sweedler.

Având aceste noţiuni am arătat că, categoria de comodule peste un coinel poate fi identificată cu o categorie de coalgebre peste o anumită comonadă indusă de acest coring. Pentru aceasta, am demonstrat că orice $A$-coring (în sens monoidal) defineşte o comonadă pe categoria modulelor drepte peste $A$ din $\mathcal{D}$ şi că, categoria de coalgebre asociată aceastei comonade coincide cu, categoria de comodule peste coinelul iniţial. Mai mult, am reuşit să descriem o clasă particulară de coringuri şi anume, cele ce se obţin din structuri monoidale îngemănate. Considerând $A$ o algebră în $\mathcal{C}$ şi $C$ o coalgebră în categoria de transfer prin $A$ am arătat că pe obiectul $A \otimes C$ se poate defini o structură de coring, în sens monoidal. În plus, am demonstrat că, comodulele peste acest coring determină categorii de module Doi-

Hopf în categorii monoidale, generalizând astfel rezultatul lui Takeuchi. Momentan, încercăm să specializăm aceste rezultate generale pentru categorii de tip Zunino sau Turaev, dar şi pentru categorii de module Hopf în “trei colţuri”.