Proiect:ID 1005,
Coinele, algebre Hopf şi categorii braided monoidale,
Director: C. Năstăsescu
SINTEZA LUCRĂRII
Raport Iulie 2009 (pentru etapa finală a anului 2009)

Cercetarea pe temele propuse în proiect s-a concretizat în următoarele articole:

- [1] M. Beattie, D. Bulacu, On the antipode of a co-Frobenius (co) quasitriangular Hopf algebra, acceptată spre publicare în Communications in Algebra.
- [2] G. Barad, A nonlinear equation which unify the quantum Yang-Baxter equation and the Pentagonal equation. A Hopf algebra approach, acceptată spre publicare la Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie.

Scopul lucrării [1] este de a generaliza pentru algebre Hopf co-Frobenius (algebre Hopf cu integrale nenule, de dimensiune posibil infinită) anumite rezultate demonstrate de către Drinfeld şi Radford pentru algebre Hopf quasitriangulare finit dimensionale. Mai exact, în cazul finit dimenional puterea a patra a antipodului S al unei algebre Hopf quasitriangulare finit dimensionale se poate exprima în funcţie de elementele sale grupale distinse şi de R-matricea ce defineşte structura sa quasitriangulară. În lucrarea [X] am arătat că această formulă se extinde la cazul co-Frobenius pentru algebre Hopf ce admit structuri quasitriangulare sau coquasitriangulare (adică acelea pentru care categoria sa de reprezentări sau coreprezentări admite o structură braided monoidală). Lucrând în caz infinit dimensional tehnicile folosite de Drinfeld şi Radford nu se mai pot utiliza, fie pentru că nu putem lucra cu baze duale, fie pentru că spaţiul integralelor din H este zero. Mai mult, demonstraţia în cazul coquasitriangular nu poate fi privită ca o dualizare a celei din cazul quasitriangular. În consecinţă, pentru cazul finit dimensional se obtin două demonstraţii noi pentru rezultatul Drinfeld-Radford.

Un prim lucru de care ne-am ocupat a fost să vedem când puterea a doua a antipodului unei algebre Hopf co-Frobenius este cointerior. În această direcţie am demonstrat următorul rezultat.

Propoziţie. Fie H o algebră Hopf co-Frobenius cu $0 \neq \lambda \in \int_l^{H^*}$, şi a, α elementele sale grupale distinse. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente,

(i) S^2 este cointerior;

(ii) Există $\rho, \tau \in (H \otimes H)^*$ astfel încât, pentru orice $h, l \in H$,

$$\lambda(lh) = \rho(h_1 \otimes l_1)\lambda(h_2 l_2)\tau(h_3 \otimes l_3).$$

Un alt rezultat ce a contribuit la demonstraţia teoremei centrale în cazul quasitriangular este următorul.

Lemă. Fie H o algebra Hopf co-Frobenius quasitriangulară cu elementele grupale distinse $a \in H$ şi $\alpha \in H^*$, şi R-matrice $R = R^1 \otimes R^2 \in H \otimes H$. Atunci

$$a_\alpha := \alpha(R^1)R^2 = b_\alpha := \alpha^{-1}(R^2)R^1,$$

unde α^{-1} este inversul în convoluţie al lui α.

În cazul finit dimensional egalitatea de mai sus arată că orice algebră Hopf factorizabilă este unimodulară (adică $\alpha = \varepsilon$, counitatea lui H).

Pentru (H, R) o algebră Hopf quasitriangulară se defineşte elementul său Drinfeld ca fiind $u = S(R^2)R^1$. El exprimă S^2 ca un automorphism interior al lui H însă, în general, el nu este un element grupal deoarece

$$\Delta(u) = (u \otimes u)(R_{21}R)^{-1} = (R_{21}R)^{-1}(u \otimes u), \text{ unde } R_{21} := R^2 \otimes R^1.$$

În orice caz, $uv = uS(u)^{-1}$ este element grupal şi, mai mult, S^4 este automorphism interior al lui H definit de uv. Mai mult, dacă H este co-Frobenius atunci ea admite două elemente grupale distinse a în H, şi respectiv α în spaţiul dual H^*. Un prim rezultat important al acestei lucrări exprimă legătura dintre uv, a şi α, legătură sugerată de următorul rezultat.

Lemă. (i) Fie H o bialgebră şi $\gamma \in G(H^0)$ un element grupal al dualei sale finite. Dacă R este un element inversabil din $H \otimes H$ ce satisface $R\Delta(h) = \Delta^{\mathrm{cop}}(h)R$, pentru orice $h \in H$, atunci $\mathrm{CoInn}_\gamma = \mathrm{Inn}_w$ unde

$$w \in W_\gamma := \{\gamma(U^1)U^2, \gamma^{-1}(R^1)R^2, \gamma^{-1}(U^2)U^1, \gamma(R^2)R^1\}$$

cu $U^1 \otimes U^2$ notaţie formală pentru inversul lui R în $H \otimes H$.

Dacă, mai mult, R defineşte o structură quasitriangulară pe H atunci $\gamma(U^1)U^2 = \gamma^{-1}(R^1)R^2$ şi $\gamma^{-1}(U^2)U^1 = \gamma(R^2)R^1$.

(ii) Pentru o algebră Hopf quasitriangulară (H, R) funcţiile de la $G(H^0)$ la $Z(G(H))$ date de

$$\gamma \mapsto a_\gamma := \gamma(R^1)R^2 \text{ şi } \gamma \mapsto b_\gamma := \gamma(S^{-1}(R^2))R^1 = \gamma^{-1}(R^2)R^1$$

sunt bine definite şi morfisme de grupuri. În plus, avem că $W_\gamma = \{a_{\gamma^{-1}}, b_{\gamma^{-1}}\}$.

Cu ajutorul acestor rezultate preliminarii s-a putut demonstra următoarea formulă pentru S^4.

Teoremă. Fie (H, R) o algebră Hopf co-Frobenius quasitriangulară cu elementele grupale distinse $a \in H$ şi $\alpha \in H^*$. Dacă $u = S(R^2)R^1$ şi $v = S(u)^{-1}$ atunci

$$uv = vu = ab_\alpha = aa_\alpha.$$

În consecinţă, S^4 este automorphismul interior al lui H definit de elementul grupal $ab_\alpha = aa_\alpha$.

Formula din enunţul teoremei am aplicat-o pentru următoarele situaţii.

Consecinţa 1. Fie (H, R) o algebră Hopf co-Frobenius quasitriangulară.

(i) Dacă $\alpha = \varepsilon$ atunci $S(u)^{-1}u = vu = a$, deci $S(u)^{-1}u$ nu depinde de R.

(ii) $S(u) = u$ dacă şi numai dacă $a_\alpha = a^{-1}$.

Consecinţa 2. Pentru $L = H_R$, algebra Hopf quasitriangulară minimală asociată lui H, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $a_L = a_H$.

(ii) α_L este α_H restricţionat la L.

(iii) χ_L este χ_H restricţionat la L, unde χ este automorfismul Nakayama generalizat.

S-a mai arătat că, în general, se poate întâmpla ca $a_L \neq a_H$ sau, echivalent, că $\alpha_L \neq \alpha_H$, pentru $L = H_R$, algebra Hopf quasitriangulară minimală asociată lui (H, R). Exemplu găsit este următorul. Se consideră k un corp comutativ de caracteristică diferită de 2 şi se ia $H = H_4$, algebra Hopf a lui Sweedler de dimensiune 4 peste k. Ea este generată de elementul grupal g şi de elementul $(1, g)$-primitiv x, cu relaţiile $g^2 = 1$, $x^2 = 0$ şi $gx = -xg$. Se ştie că (H, R) este quasitriangulară cu

$$R = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g).$$

Pentru acest caz avem că $L = k[\langle g \rangle]$ este o algebră Hopf semisimplă şi cosemisimplă şi, deci, $a_L = 1$ şi $\alpha_L = \varepsilon$. Pe de altă parte însă $a_H = g$ şi $\alpha_H(g^i x^j) = \delta_{j,0}(-1)^i$, prin urmare $a_L \neq a_H$ şi $\alpha_L \neq \alpha_H$.

În cazul coquasitriangular s-au demonstrat rezulte similare însă cu tehnici total diferite (fiindcă, aşa cum am menţionat deja, dualizarea formală nu se poate aplica în acest caz).

Un prim rezultat obţinut este următorul.

Lemă. (i) O bialgebră H ce admite o formă biliniară $\sigma \in (H \otimes H)^*$ inversabilă în convoluţie şi satisfăcând $l_1 h_1 \sigma(h_2, l_2) = \sigma(h_1, l_1) h_2 l_2$, pentru orice $l, h \in H$, are proprietatea că un automorphism interior indus de către un element grupal este de asemenea cointerior. Mai exact, dacă $g \in G(H)$ atunci $\mathrm{Inn}_g = \mathrm{CoInn}_\omega$ unde

$$\omega \in \mathcal{W}_g := \{\sigma(-, g), \sigma^{-1}(g, -), \sigma(g^{-1}, -), \sigma^{-1}(-, g^{-1})\}.$$

(ii) Fie (H, σ) o algebră Hopf coquasitriangulară. Pentru $g \in G(H)$ definim α_g şi β_g în H^0 prin $\alpha_g = \sigma(-, g^{-1})$, şi respectiv $\beta_g = \sigma(g, -)$. Atunci α_g şi β_g sunt elemente din $Z(G(H^0))$ iar funcţiile de la $G(H)$ la $Z(G(H^0))$, $g \mapsto \alpha_g$ şi $g \mapsto \beta_g$ sunt bine definite şi morfisme de grupuri. Mai mult, în acest caz $\mathcal{W}_g = \{\alpha_{g^{-1}}, \beta_{g^{-1}}\}$.

Dacă H este algebră Hopf co-Frobenius atunci formula ce exprimă puterea a patra a antipodului se poate rescrie sub forma $\alpha * S^4 * \alpha^{-1} = \mathrm{Inn}_a$. Deci, în situaţia în care H admite şi o structură coquasitriangulară dată, să zicem, de σ atunci $S^4 = \mathrm{CoInn}_{u*v^{-1}} = \mathrm{CoInn}_{\alpha^{-1}*\alpha_{a^{-1}}} = \mathrm{CoInn}_{\alpha^{-1}*\beta_{a^{-1}}}$. Pentru că α_a şi β_a comută cu orice element grupal al lui H^0 se obţine că $S^4 = \mathrm{CoInn}_{u*v^{-1}} = \mathrm{CoInn}_{\alpha_{a^{-1}}*\alpha^{-1}} = \mathrm{CoInn}_{\beta_{a^{-1}}*\alpha^{-1}}$.

Rezultatul central din cazul coquasitriangular spune de fapt că toate aceste elemente ce-l definesc pe S^4 ca un automorfism cointerior al lui H coincid.

Teoremă. Fie (H, σ) o algebră Hopf co-Frobenius coquasitriangulară cu elementele grupale distinse $a \in H$ şi $\alpha \in H^*$. Dacă $u, v \in H^*$ sunt definite prin $u(h) = \sigma(h_2, S(h_1))$ şi $v(h) = \sigma(S(h_1), h_2)$, pentru orice $h \in H$, atunci

$$u^{-1} * v = v * u^{-1} = \alpha * \beta_a = \alpha * \alpha_a,$$

unde $\alpha_a = \sigma(-, a^{-1})$ şi $\beta_a = \sigma(a, -)$ sunt elemente grupale ale dualei finite H^0 a lui H. În consecinţă, S^4 este automorfismul cointerior al lui H definit de elementul grupal $u * v^{-1} = \alpha^{-1} * \alpha_{a^{-1}} = \alpha^{-1} * \beta_{a^{-1}}$ al lui H^0.

Similar cu cazul quasitriangular se obţine următorul corolar.

Consecinţă. Fie (H, σ) o algebră Hopf co-Frobenius coquasitriangulară cu elemente grupale distinse $a \in G(H)$ şi $\alpha \in G(H^0)$. Atunci:

(i) $\alpha_a = \beta_a$.

(ii) Dacă $a = 1$ atunci $u^{-1} * v = \alpha$, deci $u^{-1} * (u \circ S)$ nu depinde de σ.

(iii) $u \circ S = u$ dacă şi numai dacă $\alpha_a = \alpha^{-1}$ (sau, echivalent, $\beta_a = \alpha^{-1}$).

În ultima parte a lucrării am exemplificat rezultatele obţinute pentru diverse clase de algebre Hopf co-Frobenius coquasitriangulare. Un prim exemplu în această direcţie a fost următorul.

Exemplul 1. Pentru q un element din k ce nu este o rădăcină a unităţii luăm H să fie algebra Hopf $k[SL_q(2)]$. Deoarece H este cosemisimplă elementul grupal distins $a \in H$ este egal cu 1.

Calculul elementului grupal distins din $G(H^0)$ se poate face în două moduri. Pe de o parte avem nevoie de structura de algebră a lui H şi de forma unei integrale nenule. Mai exact, H este generată ca algebră de x_{ii}, $1 \leq i \leq 2$, cu relaţiile

$$\begin{aligned}
&x_{im}x_{in} = qx_{in}x_{im}, \quad \forall \;\; n < m, \\
&x_{jm}x_{im} = qx_{im}x_{jm}, \quad \forall \;\; i < j, \\
&x_{jn}x_{im} = x_{im}x_{jn}, \quad \forall \;\; i < j \;\; \text{şi} \;\; n < m, \\
&x_{11}x_{22} - q^{-1}x_{12}x_{21} = 1 = x_{22}x_{11} - qx_{12}x_{21},
\end{aligned}$$

iar $0 \neq \lambda \in \int_l^{H^*}$ este dată de

$$\lambda((x_{12}x_{21})^n) = (-1)^n/[n+1] \text{ unde } [i] = (q^i - q^{-i})/(q - q^{-1}) \;,$$

şi de faptul că λ trimite orice alt element al bazei canonice a lui H (anume aceea definită de elementele ce au forma $x_{11}^i x_{12}^j x_{21}^k x_{22}^l$ cu $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ astfel încât fie $i = 0$, fie $l = 0$) în 0. Atunci elementul $\alpha \in G(H^0)$ se determină ca fiind

$$\alpha(x_{11}) = q^{-2}, \quad \alpha(x_{12}) = \alpha(x_{21}) = 0, \quad \alpha(x_{22}) = q^2,$$

pe generatorii de algebră ai lui H, după care se extinde prin asociativitate şi liniaritate pentru orice element al lui H.

Pe de altă parte însă (H, σ) este coquasitriangulară cu σ dat de

$$\begin{aligned}
&\sigma(x_{11}, x_{11}) = \sigma(x_{22}, x_{22}) = q^{1/2};\\
&\sigma(x_{11}, x_{22}) = \sigma(x_{22}, x_{11}) = q^{-1/2};\\
&\sigma(x_{12}, x_{21}) = q^{-1/2}(q - q^{-1});\\
&\sigma(x_{ij}, x_{st}) = 0 \text{ altfel }.
\end{aligned}$$

Cum $\alpha = u^{-1} * v$, ca o consecinţă a celor demonstrate se pot calcula α şi χ direct din σ şi S, fără a utiliza forma integralei nenule.

Un al doilea exemplu ce a fost prezentat este interesant şi prin prisma faptului că prezintă o algebă Hopf co-Frobenius infinit dimensională ce are antipodul de ordin finit.

Exemplu 2. Fie H algebra Hopf generată ca algebră de g, x cu g element grupal şi x element $(1, g)$-primitiv, i.e.,

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1 \text{ şi } \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1, \quad \varepsilon(x) = 0.$$

Multiplicarea din H este complet determinată de $gx = -xg$ şi $x^2 = 0$. Antipodul lui H este dat de $S(g) = g^{-1}$ şi $S(x) = -g^{-1}x$, prin urmare S^4 este morfismul identitate asociat lui H.

Se arată că H este o algebră Hopf co-Frobenius punctată de dimensiune infinită, cu $0 \neq \lambda \in \int_l^{H^*}$ definită de $\lambda(g^i x^j) = \delta_{i,-1}\delta_{j,1}$. Mai mult, elementele sale grupale distinse sunt date de

$$a = g^{-1}x \leftharpoonup \lambda = g^{-1}$$

şi

$$\chi(g) = -g, \quad \chi(x) = -x \quad \text{, ceea ce implică} \quad \alpha(g^i x^j) = \delta_{j,0}(-1)^i.$$

Ca o consecinţă se obţine că $\alpha * \alpha = \varepsilon$.

Pe de altă parte se arată că $\sigma : H \otimes H \to k$ dată de $\sigma(g^i x^j, g^t x^s) = \delta_{s,0}\delta_{j,0}(-1)^{it}$, conferă lui H o structură coquasitriangulară în raport cu care $u(g^i x^j) = \delta_{j,0}(-1)^i$. Prin urmare, pentru acest exemplu, avem că $u = v = u^{-1} = v^{-1} = \alpha = \alpha_a = \beta_a$.

Lucrarea [2], a cărei elaborare începuse în prima etapă a anului 2009, a fost revizuită şi corectată, fiind acceptată spre publicare.