Proiect:ID 1005,
Coinele, algebre Hopf şi categorii braided monoidale,
Director: C. Năstăsescu
SINTEZA LUCRĂRII
Raport Iulie 2008

Cercetarea pe temele propuse în proiect s-a concretizat în următoarele articole:

- [1] M.C.Iovanov, C.Năstăsescu, B.Torrecillas, The Dickson subcategory splitting conjecture for pseudocompact algebras, acceptată pentru publicare în Journal of Algebra.
- [2] M.Beattie, D.Bulacu, Braided Hopf algebras obtained from coquasitriangular Hopf algebras, Commun. Math. Phys. 282, 2008, 115–160.
- [3] S.Dăscălescu, Group gradings on diagonal algebras, acceptată pentru publicare in Archiv der Mathematik.
- [4] F. Castano Iglesias, N. Chifan, C. Năstăsescu, Localization on certain Grothendieck categories, acceptată pentru publicare în Acta Mathematica Sinica.
- [5] G. Barad, Finding Eulerian cycle decompositions and the rotation distance between binary trees, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, Tome 51(99), no 1, 2008, 21-38.
- [6] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu şi M. Năstăsescu, Strongly involutory functors, acceptată pentru publicare în Communications in Algebra (o primă versiune a lucrării a fost elaborată în faza pe 2007 a grantului; în actuala fază a fost elaborată o formă revizuită a lucrării, care a fost acceptată).
- [7] D. Bulacu, S. Caenepeel, B. Torrecillas, Involutory (dual) quasi-Hopf algebras, acceptată spre publicare în Algebras and Representation Theory (o primă versiune a lucrării a fost elaborată în faza pe 2007 a grantului; în actuala fază a fost elaborată o formă revizuită a lucrării, care a fost acceptată).
- [8] G. Barad, Transformări locale de structuri : flipuri triangulare, rotaţii de arbori binari si obstrucţii combinatoriale de sortare, Teză de doctorat, susţinută în iunie 2008.

Prezentăm în continuare principalele rezultate ale acestor lucrări.

În lucrarea [1] este rezolvată o binecunoscută conjectură a lui Faith în cazul algebrelor pseudocompacte. Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie Grothendieck şi $\mathcal{A}$ este o subcategorie închisă a lui $\mathcal{C}$, iar t este preradicalul asociat lui $\mathcal{A}$, spunem că $\mathcal{C}$ are proprietatea de scindare relativ la $\mathcal{A}$ dacă $t(M)$ este sumand direct în M pentru orice obiect M al lui $\mathcal{C}$. În cazul în care A este un inel, $\mathcal{C}$ este categoria A-modulelor stângi, iar $\mathcal{A}$ este subcategoria Dickson a lui $\mathcal{C}$ (adică cea mai mică subcategorie localizantă care conţine toate A-modulele simple; se poate demonstra că $\mathcal{A}$ constă din toate A-modulele semiartiniene), spunem că inelul A are proprietatea de scindare

Dickson dacă $\mathcal{C}$ are proprietatea de scindare relativ la $\mathcal{A}$. O conjectură celebră din teoria inelelor întreabă dacă în cazul în care inelul A are această proprietate de scindare rezultă că A este semiartinian. Se ştie că în general răspunsul este negativ. În lucrarea [1] se demonstrează conjectura în cazul în care A este o algebră pseudocompactă, adică o algebră topologică cu o bază de vecinătăţi ale lui 0 formată din ideale de codimensiune finită ale lui A şi care este un spaţiu Hausdorff separat şi complet. Aceste algebre apar de fapt ca algebre duale ale coalgebrelor, iar teoria reprezentării pentru ele este bine înţeleasă în termeni de teoria comodulelor peste acele coalgebre.
Se demonstrează mai întâi că dacă pentru o coalgebră C algebra duală C^* are proprietatea de scindare Dickson, atunci C este aproape conexă şi pentru orice subcoalgebră D a lui C, algebra D^* are proprietatea de scindare Dickson. Apoi se demonstrează că proprietatea de localizare Dickson pentru C^* implică C^* semiartinian, mai întâi în cazul în care coalgebra C este colocală (adică algebra C^* este locală), iar apoi în cazul general folosind tehnici clasice de localizare. Ca un corolar se arată că dacă pentru o coalgebră C partea raţională a oricărui C^*-modul stâng M scindează în M, atunci C este finit dimensională.

Algebrele Hopf cu proiecţie au un rol fundamental în clasificarea algebrelor Hopf punctate, ele caracterizându-se ca un biprodus Radford dintre o algebră Hopf şi o algebră Hopf în categoria de module Yetter-Drinfeld. Lucrarea [2] prezintă un procedeu nou care asociază unei algebre Hopf coquasitriangulare o algebră Hopf cu proiecţie şi, implicit, o algebră Hopf braided într-o categorie de module Yetter-Drinfeld. Un avantaj al acestei construcţii este faptul că dimensiunea obiectelor ce intervin este arbitrară şi, deci, se pot obţine astfel clase noi de algebre Hopf cu proiecţie de dimensiune infinită . Lucrarea este structurată pe mai multe secţiuni, scopul final fiind acela de a prezenta în mod explicit structura de algebră Hopf cu proiecţie a grupului cuantic $SL_q(N)$ precum şi structura de algebră Hopf braided asociată acestuia în categoria de module Yetter-Drinfeld peste un alt grup cuantic şi anume $U_q^{\mathrm{ext}}(\mathrm{sl}_N)^{\mathrm{cop}}$. Pentru aceasta, s-a studiat mai întâi când dublul cuantic generalizat $D(U^{\mathrm{cop}}, V)$, definit de algebrele Hopf în dualitate U şi V, este o algebră Hopf cu proiecţie. În acest sens s-au dat condiţii necesare şi suficiente după care s-a arătat că aceste condiţii sunt întotdeauna satisfăcute în cazul în care U sau V are o structură de algebră Hopf quasitriangulară . Pentru $D(U^{\mathrm{cop}}, V)$ algebră Hopf cu proiecţie s-a calculat în mod explicit structura indusă pe V de algebră Hopf braided în categoria de module Yetter-Drinfeld peste U^{cop}. Acest prim rezultat are în cazul finit dimensional două aplicaţii. Pe de o parte, dacă H este o algebră Hopf quasitriangulară atunci se reobţine un rezultat al lui Drinfeld şi Majid care descrie dublul cuantic al lui H, $D(H)$, ca un biprodus Radford dintre H şi o algebră Hopf braided construită pe spaţiul vectorial H^*. Pe de altă parte, considerând H coquasitriangulară se obţine un rezultat nou: $D(H)$ este un biprodus Radford dintre H^* şi o algebră Hopf braided construită pe spaţiul vectorial H. Toate structurile ce intrevin în aceste caracterizări ale lui $D(H)$ sunt prezentate în mod explicit.
Dacă H este o algebră Hopf coquasitriangulară (CQT pe scurt) atunci H este în dualitate cu ea însăşi şi, deci, se poate considera dublul cuantic generalizat $D(A, X)$

pentru orice subalgebre Hopf A şi X ale lui H. Un rezultat al lui Doi şi Takeuchi afirmă că $D(A, X)$ este întotdeauna o algebră Hopf cu proiecţie. Se pot aplica astfel rezultatele descrise mai sus pentru $A = X = H$; în acest fel se generalizează procesul de "transmutare" al lui Majid (pentru algebre Hopf CQT) de la cazul finit dimensional la cazul arbitrar. Acest lucru este prezentat în detaliu în a doua parte a lucrării [2]. De asemenea un caz oarecum "dual" este considerat. Mai precis, dacă A, X sunt subalgebre Hopf ale unei algebre Hopf CQT H, atunci din A şi X se construiesc alte două subalgebre Hopf, notate cu H_{r_A} şi H_{l_X}, dar de data aceasta ale lui H^0, duala finită asociată lui H. Într-o primă fază s-a arătat că $H_{r_A}^{\rm cop}$ şi H_{l_X}, respectiv $H_{X,A} := H_{r_A} H_{l_X}$ şi X, sunt algebre Hopf în dualitate. În particular, acest lucru ne permite să considerăm dublul cuantic generalizat $D(H_{r_A}, H_{l_X})$, respectiv $D(H_{X,A}^{\rm cop}, X)$. Am arătat după aceea că $H_{X,A}$ este un factor al lui $D(H_{r_A}, H_{l_X})$ şi că $D(H_{X,A}^{\rm cop}, X)$ este întotdeauna o algebră Hopf cu proiecţie. Astfel, rezultatele generale din prima parte a lucrării ne-au permis să determinăm în mod explicit structura de algebră Hopf braided a lui X în categoria de module Yetter-Drinfeld peste $H_{X,A}^{\rm cop}$. În felul acesta:
- s-a obţinut o extindere la cazul infinit dimensional a unor rezultate obţinute de Radford pentru algebre Hopf quasitriangulare (minimale), acest lucru fiind explicat în secţiunea 5 a lucrării [2],
- s-a generalizat la cazul infinit dimensional teoria "transmutării" a lui Majid, atât în ceea ce priveşte algebrele Hopf CQT cât şi cele quasitriangulare,
- s-a prezentat legătura dintre algebrele Hopf braided obţinute din structurile de algebră Hopf cu proiecţie ale lui $D(A, X)$ şi, respectiv, $D(H_{X,A}^{\rm cop}, X)$: ele sunt legate printr-un functor monoidal braided care nu poate fi "redus" la un functor canonic dacă obiectele cu care lucrăm sunt infinit dimensionale.

Exemple de algebre Hopf CQT se pot obţine din construcţii de tip FRT. Tehnici din teoria grupurilor cuantice şi rezultatele teoretice noi descrise succint mai sus ne-au permis în ultima secţiune a lucrării [2] să calculăm structura de algebră Hopf CQT a lui $SL_q(N)$. De asemenea, rezultatele teoretice generale obţinute în această lucrare ne-au condus la unele proprietăţi cunoscute ale perechii $(U_q(\mathrm{sl}_N), \mathrm{SL}_q(N))$, cum sunt:
- este o pereche de algebre Hopf în dualitate,
- algebrele Hopf de tip Borel $U_q(\mathbf{b}_-)$ şi $U_q(\mathbf{b}_+)$ asociate lui $U_q^{\rm ext}(\mathrm{sl}_N)$ sunt algebre Hopf în dualitate,
- $U_q(\mathbf{b}_-)$ este o algebră Hopf duală cu ea însăşi,
- $U_q^{\rm ext}(\mathrm{sl}_N)$ este izomorfă ca algebră Hopf cu un factor al dublului cuantic generalizat $D(U_q(\mathbf{b}_+), U_q(\mathbf{b}_-))$,

dar şi la altele noi, spre exemplu:
- $\mathrm{SL}_q(N)$ are o structură de algebră Hopf braided în categoria de module Yetter-Drinfeld peste $U_q^{\rm ext}(\mathrm{sl}_N)^{\rm cop}$,
- biprodusul lui Radford dintre $U_q^{\rm ext}(\mathrm{sl}_N)^{\rm cop}$ şi algebra Hopf braided asociată lui $\mathrm{SL}_q(N)$ este izomorf cu un un dublu cuantic generalizat.

În lucrarea [3] sunt clasificate graduările unei algebre diagonale după un grup arbitrar. O abordare a acestei probleme în cazul corpurilor algebric închise de caracteristică zero a fost făcută de Bichon, care a utilizat punctul de vedere al lui Manin şi Wang asupra coacţiunilor algebrelor Hopf pe algebre. În lucrarea [3] este prezentată o abordare a problemei folosind doar elemente de teoria inelelor şi care rezolvă cazul unui corp comutativ arbitrar. Fie k un corp comutativ şi considerăm algebra diagonală $A = k^n$, n un număr natural. Un prim pas în clasificarea graduărilor îl constituie studiul graduărilor ergodice, mai precis a celor în care componenta omogenă de grad e (e fiind elementul neutru al grupului) are dimensiune 1. Este clar că putem reduce studiul la cazul graduărilor fidele, în care suportul graduării generează grupul după care se face graduarea. În această direcţie se demonstrează urmatoarea.

Teoremă. *Fie $A = k^n$. Atunci:*
(1) Dacă $\mathrm{char}(k)|n$, atunci nu există graduări ergodice ale algebrei A.
(2) Dacă $\mathrm{char}(k)$ nu divide n, atunci graduările ergodice fidele ale lui A sunt după grupuri abeliene H de ordin n, astfel încât k conţine o rădăcină primitivă de ordin e a unităţii, unde e este exponentul lui H. Pentru un astfel de H, orice H-graduare ergodică fidelă a lui A este izomorfă cu algebra grupală kH cu H-graduarea uzuală.

Putem să dăm o descriere explicită a H-graduărilor ergodice fidele pe k^n, unde H este un grup abelian ca în teorema de mai sus. Într-adevăr, fie $H = H_1 \times \ldots \times H_r$, unde $H_1 =< c_1 >, \ldots, H_r =< c_r >$ sunt grupuri ciclice de ordine $m_1, \ldots, m_r$, astfel încât $m_1 | \ldots | m_r$. Exponentul lui H este m_r, şi deoarece k conţine o rădăcină primitivă de ordin m_r a unităţii, el conţine şi o rădăcină primitivă de ordin m_i a unităţii pentru orice $1 \leq i \leq r$. Rezultă că algebra Hopf kH_i este autoduală, un izomorfism între kH_i şi $(kH_i)^*$ ducând c_i în $\sum_{0\leq j<m_i} \xi_i^j p_{c_i^j}$, unde $(p_{c_i^j})_{0\leq j<m_i}$ este baza lui $(kH_i)^*$ duală bazei $(c_i^j)_{0\leq j<m_i}$ a lui kH_i. Atunci dacă transferăm H-graduarea prin izomorfismele de algebră

$$kH \simeq kH_1 \otimes \ldots \otimes kH_r \simeq (kH_1)^* \otimes \ldots \otimes (kH_r)^* \simeq k_1^H \otimes \ldots \otimes k^{H_r} \simeq k^H$$

şi apoi la k^n via bijecţia $\psi : H \to \{1, \ldots, n\}$, obţinem o H-graduare a lui k^n în care componenta omogenă de grad $c_1^{i_1} \ldots c_r^{i_r}$ este spaţiul de dimensiune 1 generat de elementul $\sum_{0\leq j_1<m_1,\ldots,0\leq j_r<m_r} \xi_1^{i_1 j_1} \ldots \xi_r^{i_r j_r} e_{\psi(c_1^{j_1} \ldots c_r^{j_r})}$.
Pentru descrierea tuturor graduărilor fidele pe k^n, avem nevoie de câteva notaţii. Fie $e_1, \ldots, e_n$ baza canonică din k^n. Dacă M este o submulţime nevidă a lui $\{1, \ldots, n\}$, notăm cu $A_M = \sum_{j\in M} ke_j$, care este o algebră cu element identitate $\sum_{j\in M} e_j$. Clar $A_M \simeq k^{|M|}$. Următorul rezultat descrie toate graduările fidele pe o algebră diagonală, arătând că orice astfel de graduare este un fel de sumă directă de graduări ergodice. Dacă $H_1, \ldots, H_s$ sunt grupuri, notăm cu $H_1 * \ldots * H_s$ produsul lor liber.

Teoremă. *Fie k un corp comutativ şi $n \geq 1$ un număr natural. Dacă $A = \oplus_{g\in G} A_g$ este o graduare fidelă pe $A = k^n$ după grupul G, atunci există*

- *Grupuri abeliene $H_1, \ldots, H_s$ de exponenţi $e_1, \ldots, e_s$, astfel încât $|H_1| + \ldots + |H_s| = n$, şi k conţine o rădăcină primitivă de ordin e_i a unităţii pentru orice $1 \leq i \leq s$;*
- *Un morfism surjectiv de grupuri $\phi : H_1 * \ldots * H_s \to G$ astfel încât $\phi(H_i) \simeq H_i$ pentru orice $1 \leq i \leq s$ (pentru simplitate identificăm $\phi(H_i)$ şi H_i);*

- *O partiţie* $M_1, \ldots, M_s$ *a mulţimii* $\{1, \ldots, n\}$ *astfel încât* $|M_i| = |H_i|$;
- *O* H_i*-graduare ergodică a algebrei* A_{M_i} *pentru orice* $1 \leq i \leq s$,

astfel încât $\mathrm{supp}(A) = H_1 \cup \ldots \cup H_s$ *şi* $A_g = \sum_{1 \leq i \leq s} (A_{M_i})_g$ *pentru orice* $g \in \mathrm{supp}(A)$ *(unde privim* H_i*-graduarea lui* A_{M_i} *ca pe o* G*-graduare).*
Invers, pentru orice grupuri abeliene $H_1, \ldots, H_s$*, orice morfism de grupuri* $\phi : H_1 * \ldots * H_s \to G$*, şi orice partiţii* $M_1, \ldots, M_s$*, satisfăcând condiţiile de mai sus, se poate construi o* G*-graduare fidelă pe* k^n *din* H_i*-graduări ergodice pe* $A_{M_i} \simeq k^{|H_i|}$*,* $1 \leq i \leq s$ *ca o sumă directă după formula de mai sus.*

În lucrarea [4] sunt folosite tehnici categoriale pentru a obţine rezultate de localizare şi colocalizare într-o categorie Grothendieck care are o mulţime de generatori proiectivi mici. Se ştie că orice categorie Grothendieck are suficiente obiecte injective. Pe de altă parte, există categorii Grothendieck care nu au suficiente obiecte proiective. În lucrare sunt analizate condiţii în care o categorie Grothendieck care are o mulţime de generatori proiectivi mici este semiartiniană sau semiperfectă. În prima parte a lucrării este folosită localizarea pentru a demonstra rezultate preliminare privind obiectele proiective şi obiectele Σ-quasi-proiective. Mai departe este studiată categoria $R - MOD$, unde R este un inel cu unităţi locale. Acest studiu este necesar pentru a caracteriza clasele TTF într-o categorie Grothendieck care are o mulţime de generatori proiectivi mici. Rezultatul obţinut este următorul.
Teoremă. *Fie* $\mathcal{A}$ *o categorie Grothendieck care are o mulţime de generatori proiectivi mici şi fie* $\mathcal{C}$ *o subcategorie localizantă a lui* $\mathcal{A}$*. Atunci functorul canonic* $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ *are un adjunct la stânga dacă şi numai dacă* $\mathcal{C}$ *este o clasă TTF.*
În continuare este demonstrat următorul rezultat.
Teoremă. *Fie* $\mathcal{A}$ *o categorie Grothendieck semiartiniană pentru care orice obiect simplu are o anvelopă proiectivă. Atunci orice subcategorie localizantă a lui* $\mathcal{A}$ *este o clasă TTF.*
De asemenea este dată o condiţie suficientă pentru ca o categorie Grothendieck care are o mulţime de generatori proiectivi mici să fie semiartiniană. Acest rezultat este aplicat la categoria modulelor graduate peste un inel graduat. În ultima parte a lucrării sunt studiate subcategoriile localizante ale lui $\mathcal{A}$ care sunt şi subcategorii colocalizante. Ca o consecinţă obţinem următoarea descriere a categoriilor Grothendieck semiperfecte.
Teoremă. *Fie* $\mathcal{A}$ *o categorie Grothendieck care are o mulţime* $(P_i)_{i \in I}$ *de generatori proiectivi mici. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente.*
(a) $\mathcal{A}$ *este o categorie semiperfectă.*
(b) $End_{\mathcal{A}}(P_i)$ *este inel semiperfect pentru orice* $i \in I$*.*
(c) Orice obiect finit generat al lui $\mathcal{A}$ *are o anvelopă proiectivă.*

Lucrarea [5] îşi propune următoarele scopuri:
- să introducă o clasă de permutări pentru care se poate decide în timp liniar apartenenţa la ea; mai mult, graful de distorsiune al permutării se poate descompune în timp polinomial în număr maximal de cicli disjuncţi; această clasă de permutări se diferenţiază de rezultatul general al lui Caprara, care afirmă că acest fenomen nu

se poate aplica/nu e valabil la clasa tuturor permutărilor.
- în studiul permutărilor prin reversii, relevant in Biologia computaţională, pentru această clasă de permutări se poate stabili un lower bound liniar de sortare prin reversii: $[b - w(p)]$.
- am identificat structuri combinatoriale specifice permutărilor provenite din arbori, ale grafului de distorsiune, ce permit stabiliri de margini inferioare ale distanţei de rotaţie.
- Graful de distorsiune (the breakpoint graph) , folosit în Biologia Computaţională cu succes pentru sortarea genomului- modelat ca o permutare, se dovedeşte a fi util în studiul arborilor binari, omniprezenţi in Algebră, şi în Informatica Teoretică ca structuri fundamentale de date.
În 1999, Caprara a demonstrat că este NP-hard de găsit o descompunere euleriana maximală în cicli disjuncţi a grafului de distorsiune a unei permutări. Acest rezultat implică faptul că este NP-hard de sortat permutările prin reversii, răspunzând astfel unei întrebări relevante în Biologia Computaţională. Thurston, Sleator si Tarjan(1988) au demonstrat că diametrul grafului de rotaţie este 2n-6, pentru n suficient de mare. Abordând combinatorial evoluţia arborilor binari la rotaţii, am găsit o clasă T de permutări care satisface următoarea condiţie: dându-se orice permutare , este posibil de decis în timp liniar dacă aparţine lui T. Dacă răspunsul este pozitiv, este posibil de găsit o descompunere euleriană maximală în timp polinomial. Oricărui arbore binar îi asociem o permutare, iar clasa T este mulţimea permutărilor provenite din arbori, prin această asociere.

În teza de doctorat [8], este mai întâi abordată combinatorial problema determinării diametrului grafului de rotaţie, problematică ce ţine de informatica teoretică şi în care s-au folosit diverse metode geometrice de înţelegere a modului de evoluţie a arborilor binari la mişcări locale de restructurare numite flipuri sau rotaţii.
Se defineşte o clasă de permutări pentru care se poate decide în timp liniar apartenenţa la ea; mai mult, graful de distorsiune al permutării se poate descompune în timp polinomial în număr maximal de cicli disjuncti. Autorul identifică structuri combinatoriale specifice permutărilor provenite din arbori, ale grafului de distorsiune, ce permit stabiliri de margini inferioare ale distanţei de rotaţie.
A doua parte a tezei este algebrică şi tratează ecuaţii neliniare pe produse tensoriale de spaţii vectoriale.
a) Pentru $R : M \otimes M \to M \otimes M$, autorul introduce ecuaţia:

$$B_{123}R_{34}D_{124}R_{24}R_{14}D_{123} = R_{34}R_{24}R_{14}$$

unde $B = (R_{23}R_{13}R_{12})(R_{12}R_{13}R_{23})^{-1}$ şi D este inversa lui B. Indicii ataşaţi lui R, D, B arată poziţiile din produsul tensorial pe care se aplică aceşti operatori, pe poziţiile rămase acţionând ca identităţi. Orice operator R ce verifică ecuaţia cuantică Yang-Baxter sau ecuaţia pentagonală este de asemenea soluţie a ecuaţiei de mai sus.
b) De asemenea autorul consideră următorul sistem de ecuaţii mixte de tip Yang-Baxter :

$$R_{12}S_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$
$$S_{12}S_{13}R_{23} = R_{23}S_{13}S_{12}$$

unde $R, S : M \otimes M \to M \otimes M$. Acesta este un sistem unificator pentru ecuaţia pentagonală (cazul $S = id$) şi pentru ecuaţia QYBE (cazul $R = S$). Dacă perechea (R, S) verifică sistemul de mai sus, atunci R verifică ecuaţia dată la punctul a). Se introduce noţiunea de pereche involutivă (R, S) formată din 2 operatori (în care caz se spune că R şi S diferă prin simetrii cuantice). Dacă în plus o pereche involutivă este soluţie a sistemului de mai sus, se poate aplica construcţia Fadeev-Reshetikhin-Takhtajan.
c) Autorul introduce noi grupuri R(n) definite printr-un număr finit de generatori si relaţii. Se demonstrează că aceste grupuri formează un operad asemănător operadului format de grupurile de tip Braid prin operaţia de cablare. Soluţiile inversabile ale ecuaţiei de la a) generează functori monoidali între categoria cu obiecte numerele naturale $1, 2, \ldots, n, \ldots$, unde $Mor(n, n) = R(n)$ şi categoria spaţiilor vectoriale complexe.