Proiect:ID 1904,
Acţiuni, coacţiuni şi gradări pe algebre,
Director: S. Dăscălescu
SINTEZA LUCRĂRII
Raport Decembrie 2010

Cercetarea pe temele propuse în proiect s-a concretizat în următoarele 12 articole, dintre care 4 acceptate sau publicate în reviste cotate ISI (articolele [1]-[4]), 2 acceptate sau publicate în reviste recunoscute în BDI (articolele [5], [6]) şi 6 trimise spre publicare:

- [1] D. Bulacu, S. Caenepeel, B. Torrecillas, The braided monoidal structures on a category of vector spaces graded by the Klein group, acceptata spre publicare in Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, septembrie 2010.
- [2] F. Castano Iglesias, C. Năstăsescu, J. Vercruysse, Quasi-Frobenius functors. Applications, Comm. Algebra 38 (2010), 3057-3077.
- [3] D. Bulacu, A Clifford algebra is a weak Hopf algebra in a suitable symmetric monoidal category, acceptată pentru publicare în J. Algebra, octombrie 2010.
- [4] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, A. Tudorache, A note on regular objects in Grothendieck categories, acceptată pentru publicare în Arabian J. Science and Engineering.
- [5] C. Buruiană, Abelian finite group gradings on the skew polynomial ring $k[X][Y, \phi]$, acceptată pentru publicare în U.P.B. Sci. Bull., Ser. A.
- [6] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, G. Velicu, Balanced bilinear forms and finiteness properties for incidence coalgebras over a field, Rev. Union Mat. Argentina **51** (2010), 13-20.
- [7] D. Bulacu, S. Caenepeel, Algebras graded by discrete Doi-Hopf data and the Drinfeld double of a Hopf group coalgebra, trimisa spre publicare la Algebras and Representation Theory, arXiv:1011.0886v1 [math.RA] 3 Nov 2010.
- [8] C. Boboc, S. Dăscălescu, L. Van Wyk, Isomorphisms between Morita context rings, trimisă spre publicare la J. Algebra.
- [9] S. Dăscălescu, M. Iovanov, C. Năstăsescu, Path subcoalgebras, subcoalgebras of incidence coalgebras, finiteness properties and quantum groups, trimisă spre publicare la J. Reine Angew. Math.
- [10] C. Buruiană, Group gradings on polynomial algebras, trimisă spre publicare la Comm. Algebra.
- [11] L. Dăuş, C. Năstăsescu, M. Năstăsescu, Von Neumann regularity of smash products associated with G-set gradings, trimisă spre publicare la J. Algebra.
- [12] F. Castano Iglesias, C. Năstăsescu, L. Năstăsescu, Locally stable Grothendieck categories. Applications, trimisă spre publicare la Applied Categorical Structures.

Menţionăm că cercetătorii în formare sunt autori ai articolelor [4] (într-o revistă cotată ISI), [5] (acceptată pentru publicare) şi [10] (trimisă spre publicare). Unul dintre cercetătorii în formare, Ana Tudorache, şi-a susţinut teza de doctorat, teza fiind alcătuită în mare parte din rezultate obţinute în cadrul acestui contract de cercetare.

În lucrarea [1] am calculat, în mod explicit, toate structurile braided monoidale ce se pot defini pe o categorie de k-spaţii vectoriale graduate după grupul lui Klein. Acest fapt revine la a calcula explicit al 3-lea grup de coomologie, respectiv al 3-lea grup abelian de coomolgie al lui $C_2 \times C_2$ cu coeficienţi în k^*. Există tehnici de algebră omologică, respectiv teorema Eilenberg-Mac Lane, care permit descrierea acestor grupuri de coomologie până la un izomorfism, însă acestea nu permit obţinerea efectivă a claselor de coomologie. Acest ultim fapt nu se poate obţine decât printr-un calcul efectiv, de multe ori extrem de tehnic. În cazul de faţă acesta s-a redus la calculul aşa numiţilor 3-cociclii happy. Am demonstrat în final că există trei tipuri de 3-cociclii normali şi happy, notaţi cu ϕ_X, h_a şi respectiv g_b, unde X este o submulţime a lui $C_2 \times C_2$ ce nu conţine elementul unitate iar $a, b \in k^*$. Am mai arătat că ϕ_X nu este cofrontieră pentru X nevidă, h_a este întotdeauna cofrontieră iar g_b este cofrontieră dacă şi numai dacă b admite o rădăcină în k^*. Toate aceste rezultate au dus la obţinerea explicită a elementelor lui $H^3(C_2 \times C_2, k^*)$, atât în caracteristică 2 cât şi în cea diferită de 2. Mai exact,

$$Z_h^3(C_2 \times C_2, k^*) = \{\phi_X \mid X \neq \emptyset\} \times \{g_b \mid b \in k^*\} \times \{h_a \mid a \in k^*\},$$

de unde am dedus că, pentru un corp arbitrar k,

$$H^3(C_2 \times C_2, k^*) = C_2 \times C_2 \times C_2 \times k^*/k^{*(2)}.$$

Având forma explicită a reprezentanţilor 3-cociclilor normali am trecut la calculul celor abelieni; i-am determinat în mod explicit şi i-am pus în corespondenţă bijectivă cu formele pătratice ce le corespund prin teorema Eilenberg-Mac Lane. Dacă k nu conţine o rădăcină primitivă de ordin 4 a unităţii atunci există 8 braidinguri neizomorfe pe $\mathrm{Vect}^{C_2 \times C_2}$, toate corespunzând 3-cociclului trivial. Dacă k conţine o rădăcină primitivă de ordin 4 a unităţii atunci avem, în plus, 24 de braidinguri neizomorfe, aceastea din urmă corespunzând lui ϕ_X cu X de cardinal 2. În ambele situaţii $\mathrm{Vect}^{C_2 \times C_2}$ admite doar 4 structuri simetric monoidale neizomorfe. Toate aceste rezultate ne-au permis în final să calculăm 3-cociclii Harrison şi, implicit structuri de algebră quasi-Hopf, pentru un grup ciclic finit şi respectiv pentru grupul lui Klein. Calculul anumitor 3-cociclii cofrontieră ai lui C_n şi $C_2 \times C_2$ ne-au permis de asemenea descrierea unor clase noi de algebre Hopf slabe în anumite categorii vectoriale de spaţii graduate.

În lucrarea [2] au fost investigaţi functori între categorii abelienecare au un adjunct la stânga şi un adjunct la dreapta similari. Aceşti functori sunt numiţi quasi-Frobenius. Este introdus conceptul de bimodul quasi-Frobenius şi sunt caracterizate aceste obiecte cu ajutorul functorilor quasi-Frobenius. Sunt prezentate aplicaţii la inele graduate şi coinele. Astfel, se demonstrează că dacă R este un inel graduat după grupul G, cu element neutru e, atunci functorul asociat $(-)_e$ este quasi-Frobenius dacă şi numai dacă R_x este R_e-modul stâng finit generat şi proiectiv pentru orice $x \in G$ şi $R_e \sim Coind(R_e)$. Sunt caracterizaţi functorii quasi-Frobenius între categorii de module peste coinele şi este obţinută o versiune a teoremei privind inelul de endomorfisme pentru extinderi quasi-Frobenius in termeni de coinele.

În lucrarea [3] se arată că orice algebră Clifford corespunzătoare unui spaţiu pătratic regulat admite o structură de algebră Hopf slabă într-o categorie de spaţii vectoriale graduate, echipată cu o anumită structură simetric monoidală. Este bine ştiut că o algebră Clifford de tipul $C(q_1, \cdots, q_n)$ cu $q_i \neq 0$, pentru orice $1 \leq i \leq n$, este o deformare a algebrei grupale $k[(\mathbb{Z}_2)^n]$ printr-un 2-cociclu normal F. Acest lucru se poate proba direct prin calcul sau se poate obţine inductiv printr-un aşa numit proces Clifford pentru algebre. In lucrarea [2] am inventat un proces Clifford pentru coalgebre după care am demonstrat că toate coalgebrele produse de acesta, din corpul de bază k privit canonic ca o coalgebră involutivă, se identifică cu anu-mite deformări ale coalgebrei grupale $k[(\mathbb{Z}_2)^n]$, prin acelaşi

2-cociclu F din cazul algebrelor Clifford. În consecinţă, prin două procese distincte s-au obţinut pe acelaşi spaţiu vectorial, $k[(\mathbb{Z}_2)^n]$, două structuri duale: de algebră şi respectiv coalgebră. Cum cea de algebră corespunde uneia de algebră Clifford rezultă că orice astfel de algebră admite şi o structură de coalgebră.
Structurile Clifford de algebră şi coalgebră obţinute sunt cele din sensul clasic insă împreună nu definesc o structură de tip Hopf în sens obişnuit. Mai exact ele produc o structură de algebră Hopf slabă în categoria de spaţii vectoriale graduate după $(\mathbb{Z}_2)^n$, privită ca o categorie monoidală strictă şi echipată cu braiding-ul definit de 3-cociclul abelian indus de F^{-1}. În acest fel o (co)algebră Clifford admite o $(\mathbb{Z}_2)^n$-graduare în raport cu care ea poate fi privită ca o (co)algebră (co)comutativă în sens braided monoidal. Este o graduare nouă, diferită de $\mathbb{Z}_2$-graduarea din cazul clasic.
Acest prim set de rezultate pe care le-am obţinut le-am aplicat pentru algebra de numere complexe, algebra generalizată a cuaternionilor şi, respectiv, $C(q_1, q_2, q_3)$, după care am identificat aceste obiecte, la nivel $\mathbb{Z}_2$-graduat sau negraduat, cu alegbre şi coalgebre de matrice, înzestrate cu aşa numita graduare "checkerboard". Acest fapt a fost vital în demonstraţia unei teoreme de structură pe care am prezentat-o. Mai exact, în funcţie de paritatea dimensiunii spaţiului pătratic, o algebră Hopf slabă de tip Clifford este produsul tensorial din $\mathrm{Vect}_{-1}^{\mathbb{Z}_2}$ a $m-1$ algebre şi coalgebre $\mathbb{Z}_2$-graduate în mod trivial cu un ultim factor o algebră şi coalgebră generalizată fie de cuaternioni, fie de numere complexe, de data aceasta echipată cu o $\mathbb{Z}_2$-graduare netrivială.
O categorie de spaţii vectoriale finit dimensionale şi graduate după un anumit grup G este o categorie rigidă. Din acest punct de vedere, am mai arătat că o algebră Hopf slabă de tip Clifford este selfduală şi că izomorfismul dintre ea si duala sa, pe care l-am construit în mod explicit, produce pe aceasta o structură de algebră Frobenius, respectiv coalgebră coFrobenius, în sens rigid monoidal.
Lucrarea se incheie cu studiul periodicităţii 8 pentru algebrele Hopf slabe de tip Clifford. S-a arătat că pentru orice $p, q \in \mathbb{N}$ avem $C^{p+8,q} \cong C^{p,q+8} \cong \widehat{M}_{16}(C^{p,q})$, ca algebre şi coalgebre $\mathbb{Z}_2$-graduate şi, deci, descrierea tuturor algebrelor Hopf slabe de tip Clifford ce sunt de forma $C^{p,q}$ se reduce la calculul lui $C^{p,0}$ şi $C^{0,p}$ cu $1 \leq p \leq 7$. Acestea din urmă au fost descrise complet; ele sunt produse tensoriale/algebre de matice graduate complet determinate de

$$X = k[\mathbf{i}],\ Y = \mathbb{H},\ Z = k[\mathbb{Z}_2] \text{ şi } W = C^{0,2} = \left(\frac{1,1}{k}\right).$$

În cazul în care k conţine o rădăcină primitivă de ordin 4 a unităţii, pe care am notat-o cu $\mathbf{i}$, atunci la nivel negraduat avem următoarele identificări:

$$\begin{aligned} &C^{0,0} = k,\ C^{1,0} \cong C^{0,1} \cong k \times k,\ C^{2,0} \cong C^{0,2} \cong M_2(k), \\ &C^{3,0} \cong C^{0,3} \cong M_2(k) \times M_2(k),\ C^{4,0} \cong C^{0,4} \cong M_4(k), \\ &C^{5,0} \cong C^{0,5} \cong M_4(k) \times M_4(k),\ C^{6,0} \cong C^{0,6} \cong M_8(k), \end{aligned}$$

şi, respectiv, $C^{7,0} \cong C^{0,7} \cong M_8(k) \times M_8(k)$.

În lucrarea [4] sunt studiate obiectele regulate în raport cu un generatorîntr-o categorie Grothendieck care nu este neapărat local finit generată. Folosind şi tehnici de inele graduate, este demonstrat următorul rezultat.

Teoremă. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie aditivă. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente.*
(i) M este N-regulat pentru orice obiecte M şi N din $\mathcal{A}$.
(ii) $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ este un inel regulat von Neumann pentru orice obiect M din $\mathcal{A}$.
Mai mult, dacă $\mathcal{A}$ este o categorie Grothendieck şi $(U_i)_{i \in I}$ este o familie de generatori din $\mathcal{A}$, atunci condiţiile (i) şi (ii) sunt echivalente cu fiecare din condiţiile următoare.
(iii) $\mathcal{A}$ este o categorie spectrală.

(iv) Orice obiect M din $\mathcal{A}$ este U_i-regulat pentru orice $i \in I$.
(v) Există un cogenerator C al lui $\mathcal{A}$ care este U_i-regulat pentru orice $i \in I$.

Folosind teorema Gabriel-Popescu este demonstrat următorul rezultat.

Teoremă. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck cu generator U. Fie $M \in \mathcal{A}$ un obiect U-regulat. Atunci inelul de endomorfisme $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ este self-injectiv dacă şi numai dacă M este quasi-injectiv, şi în acest caz $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ este un inel regulat von Neumann.*

De asemenea sunt demonstrate şi următoarele.

Teoremă. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck care are un generator quasi-injectiv U. Dacă $(M_i)_{i\in I}$ este o familie de obiecte U-regulate din $\mathcal{A}$, atunci $\prod_{i\in I} M_i$ este U-regulat.*

Teoremă. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck care are un generator quasi-injectiv U care este U-regulat. Atunci orice obiect fără U-torsiune este U-regulat.*

În lucrarea [5] este dată o descriere completă a graduărilor după grupuri abeliene finite ale inelului de polinoame încrucişate $k[X][Y,\varphi]$, unde φ este un k-automorfism al lui $k[X]$.

În lucrarea [6] sunt studiate condiţii de finitudine pentru coalgebra de incidenţă $IC(X)$ a unei mulţimi parţial ordonate local finite X. Se demonstrează că orice subcoalgebră a lui $IC(X)$ are o bază formată din segmente şi se demonstrează că $IC(X)$ este local finită. Sunt descrise anvelopele injective ale comodulelor simple peste $IC(X)$ şi se determină situaţiile în care $IC(X)$ este semiperfectă la stânga (respectiv dreapta). Se determină formele biliniare balansate pe $IC(X)$. Ca o consecinţă sunt descrise situaţiile în care coalgebra de incidenţă este co-Frobenius.

Corolar. *Fie $C = IC(X)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*
(1) C este quasi-co-Frobenius la dreapta.
(2) C este quasi-co-Frobenius la stânga.
(3) C este co-Frobenius la dreapta.
(4) C este co-Frobenius la stânga.
(5) C este cosemisimplă.
(6) Relaţia de ordine pe X este egalitatea.

Scopul lucrării [7] a fost descrierea unei categorii de module Doi-Hopf asociate unei coalgebre grup-Hopf ca o categorie de module graduate. Chiar dacă un astfel de obiect este o algebră Hopf braided în categoria lui Turaev $\mathcal{T}_k$, rezultatul dorit nu se poate deduce din teoria generală a categoriilor braided monoidale pentru că $\mathcal{T}_k$ nu este o categorie cu dualitate. Ceea ce se poate spune însă este faptul că avem un functor dualitate, însă cu valori în $\mathcal{Z}_k$, categoria lui Zunino. Mai precis, o coalgebră grup este o coalgebră în $\mathcal{T}_k$, însă duala sa este este o algebră în $\mathcal{Z}_k$, mai exact o algebră graduată. În plus, categoria reprezentărilor unei astfel de algebre are ca obiecte modulele graduate după o G-mulţime, însă morfismele se pot defini în două moduri, de aşa natură încât în primul caz avem un functor uitare în $\mathcal{T}_k$ iar în cel de-al doilea caz un functor uitare în $\mathcal{Z}_k$. Pentru a determina izomorfizmul dorit, mai întâi am definit noţiunea de algebră graduată după o dată Doi-Hopf discretă, adică după o dată Doi-Hopf în categoria mulţimilor. Am caracterizat acest tip de algebre graduate şi am arătat că ele se gasesc într-o corespondenţă bijectivă cu functorii lax dintre anumite 2-categorii. În plus, două clase de astfel de algebre graduate au fost construite, anume algebre produs încrucişat şi respectiv algebre produs încrucişat de tip Koppinen. După aceasta am definit noţiunea de modul graduat după o dată Doi-Hopf discretă, le-am caracterizat şi am prezentat câteva exemple de astfel de obiecte. Ca şi categorii de reprezentări, aşa cum am explicat mai sus, acestea produc două categorii pe care le-am notat cu $\mathcal{T}_A^{(G,\Lambda,X)}$ şi, respectiv, $\mathcal{Z}_A^{(G,\Lambda,X)}$.

Pentru $(\underline{H}, \underline{A}, \underline{C})$ dată Doi-Hopf în $\mathcal{T}_k$ am arătat că

$$\mathcal{T}_k(\underline{H})^{\underline{C}}_{\underline{A}} \cong \mathcal{T}^{(G,\Lambda,X)}_{\mathcal{A}} \text{ şi } \mathcal{Z}_k(\underline{H})^{\underline{C}}_{\underline{A}} \cong \mathcal{Z}^{(G,\Lambda,X)}_{\mathcal{A}},$$

unde $\mathcal{A}$ este algebra (G, Λ, X)-graduată construită ca o algebră produs încrucişat din data Doi-Hopf iniţială. Este unul dintre rezultatele centrale ale acestei lucrări care, printre altele, ne-a permis şi definirea dublului cuantic pentru o coalgebră grup-Hopf. Mai exact, am identificat o categorie de module Yetter-Drinfeld cu una de module Doi-Hopf (ambele în $\mathcal{T}_k$), după care, printr-o teoremă de tip reconstrucţie, am definit pe algebra graduată rezultată o structură de grup coalgebră. În această direcţie, rezultatul crucial a fost următorul:

Teoremă. Pentru G grup şi A o algebră $\mathbb{G}$-graduată există o corespondenţă bijectivă între structurile $\mathbb{G}$-graduate de bialgebră ale lui A şi structurile monoidale pe $\mathcal{Z}^{\mathbb{G}}_{A}$ pentru care functorul canonic uituc este monoidal.

Via acestă corespondenţă bijectivă am dedus structura lui $D(\underline{H})$ de coalgebră grup-Hopf, respectiv de bialgebră (algebră Hopf) $\mathbb{G}$-graduată. Pentru că o categorie de module Yetter-Drinfeld se identifică cu o anumită categorie centru ea este o categorie pre-braided, respectiv braided în cazul în care $\underline{H}$ este de tip finit. Ca o consecinţă a acestui rezultat general a apărut noţiunea de bialgebră $\mathbb{G}$-graduată quasitriangulară. Mai precis, sunt acele bialgebre $\mathbb{G}$-graduate pentru care categoriile lor de reprezentări admit o structură braided monoidală. În finalul lucrării am arătat că $D(\underline{H})$ este o algebră Hopf $\mathbb{G}$-graduată quasitriangulară iar categoria sa de reprezentări este braided izomorfă cu categoria de module Yetter-Drinfeld peste $\underline{H}$. Într-un appendix am explicat cum se pot introduce în mod natural, cu ajutorul categoriilor braided monoidale, alte categorii de module Yetter-Drinfeld, diferite de cele deja introduse şi studiate de către Virelizier.

În lucrarea [8], considerăm un context Morita $(R, S, {}_RM_S, {}_SN_R, f, g)$ şi inelul generalizat de matrice asociat acestui context $T = \begin{bmatrix} R & {}_RM_S \\ {}_SN_R & S \end{bmatrix}$. Fie $T' = \begin{bmatrix} R' & M' \\ N' & S' \end{bmatrix}$ un alt astfel de inel asociat unui alt context Morita. Scopul principal al lucrării este să studieze mulţimea $\mathrm{Iso}(T, T')$ a izomorfismelor de inele între T şi T'. Interesul de a studia această problemă este motivat de : (i) problema de a determina grupul automorfismelor inelului T; (ii) probleme de recuperare a plăcilor nediagonale dintr-un astfel de inel generalizat de matrice. Introducem două clase $\mathrm{Iso}^0_0(T, T')$ şi $\mathrm{Iso}^1_0(T, T')$ de izomorfisme de la T la T', a căror reuniune disjunctă este notată cu $\mathrm{Iso}_0(T, T')$. Descriem $\mathrm{Iso}_0(T, T')$ folosind structurile de inel $\mathbf{Z}$-graduat ale lui T şi T'. Rezultatul principal este următorul.

Teoremă. *Fie* $T = \begin{bmatrix} R & M \\ N & S \end{bmatrix}$ *şi* $T' = \begin{bmatrix} R' & M' \\ N' & S' \end{bmatrix}$ *inele asociate unor contexte Morita astfel încât inelele* R' *şi* S' *sunt indecompozabile şi cel puţin unul dintre* M' *şi* N' *este nenul. Atunci au loc următoarele:*
(1) $\mathrm{Iso}^0_0(T, T')$ *este mulţimea izomorfismelor semigraduate de la* T *la* T'*.*
(2) $\mathrm{Iso}^1_0(T, T')$ *este mulţimea izomorfismelor anti-semigraduate de la* T *la* T'*.*
În particular, $\mathrm{Iso}_g(T, T') \subseteq \mathrm{Iso}_0(T, T')$*.*

De asemenea se demonstrează că $\mathrm{Iso}_0(T, T') = \mathrm{Iso}(T, T')$ în situaţia în care R, S, R' şi S' sunt inele care au numai idempotenţi triviali şi toate aplicaţiile Morita din cele două contexte sunt nule. În particular, aceasta arată că grupul automorfismelor lui T este complet determinat.

În lucrarea [9] este demonstrat că o coalgebră de drumuri $K\Gamma$ a unui quiver Γ este co-Frobenius la stânga dacă şi numai dacă Γ constă doar din puncte (adică nu are săgeţi).

O abordare similară, folosind coreprezentările coalgebrei, arată că un rezultat de acelaşi tip are loc pentru coalgebra de incidenţă $IC(X)$ a unei mulţimi ordonate local finită. Considerăm în continuare o clasă mai largă de coalgebre, şi anume subcoalgebre ale lui $K\Gamma$ care au o bază formată din drumuri (numite subcoalgebre de drumuri) şi subcoalgebre arbitrare ale lui $IC(X)$, care au întotdeauna o bază formată din segmente. Determinăm formele biliniare balansate pe aceste tipuri de coalgebre. Descriem algebric situaţiile în care o coalgebră din una dintre aceste două clase este co-Frobenius la stânga. Apoi obţinem o clasificare geometrică completă a subcoalgebrelor de drumuri.

Teoremă. *Fie C o subcoalgebră de drumuri a coalgebrei $K\Gamma$, şi fie $\mathcal{B}$ o bază de drumuri pentru C. Atunci C este co-Frobenius la stânga dacă şi numai dacă $C \cap \Gamma = \bigsqcup_i \Gamma_i$, o reuniune disjunctă de sub-quivere ale lui Γ, de unul din tipurile $\mathbf{A}_\infty$, $\mathbf{A}_{0,\infty}$ sau $\mathbf{C}_n$, $n \geq 1$, şi subcoalgebra de drumuri C_i a lui $K\Gamma_i$ generată de drumurile din $\mathcal{B}$ conţinute în Γ_i este de tip $K[\mathbf{A}_\infty, r]$ dacă $\Gamma_i = \mathbf{A}_\infty$, de tip $K[\mathbf{A}_{0,\infty}, r]$ dacă $\Gamma_i = \mathbf{A}_{0,\infty}$, de tip $K[\mathbf{C}_n, s]$ cu $s \geq 1$ dacă $\Gamma_i = \mathbf{C}_n$, $n \geq 1$, şi de tip K dacă $\Gamma_i = \mathbf{C}_0$. În acest caz $C = \bigoplus_i C_i$, în particular subcoalgebrele co-Frobenius la stânga sunt sume directe de coalgebre de tipurile $K[\mathbf{A}_\infty, r]$, $K[\mathbf{A}_{0,\infty}, r]$, $K[\mathbf{C}_n, s]$ or K.*

Pentru subcoalgebre ale coalgebrelor de incidenţă situaţia geometrică este mult mai complicată, şi dăm mai multe exemple care demonstrează acest lucru. De asemenea, dăm exemple de subcoalgebre ale coalgebrei de drumuri care sunt co-Frobenius la stânga, dar nu sunt subcoalgebre de drumuri, şi nici măcar nu sunt izomorfe cu subcoalgebre de drumuri.
Cu scopul de a construi grupuri cuantice cu integrale nenule investigăm când o subcoalgebră de drumuri co-Frobenius poate fi înzestrată cu o structură de algebră Hopf. Rezolvăm complet această problemă în cazul în care corpul de bază are rădăcini ale unităţii de orice ordin (în particular când este algebric închis de caracteristică zero). De asemenea investigam proprietatea de coreflexivitate pentru subcoalgebre de drumuri si subcoalgebre ale unei coalgebre de incidenţă. Pentru orice astfel de coalgebră C demonstrăm că C este coreflexivă dacă şi numai dacă coradicalul C_0 este coreflexiv. De asemenea, arătăm că produsul tensorial a două coalgebre coreflexive de acest tip este coalgebră coreflexivă.

În lucrarea [10] este dată o descriere a graduărilor pe o algebră de polinoame într-un număr finit de nedeterminate după un grup abelian. Se demonstrează că orice $C_m \times C_n$-graduare pe $k[X_1, \ldots, X_r]$ se obţine dintr-o pereche de C_m şi C_n-graduări compatibile, iar apoi se obţine o extindere a acestui fapt pentru un produs finit de grupuri ciclice. Sunt investigate şi graduări după anumite grupuri neabeliene mici.

Lucrarea [11] se ocupă de problema regularităţii în sens von Neumann a următoarelor două tipuri de produse smash: (1) produsul smash $R\#G$ asociat unui inel R graduat după un grup G; (2) produsul smash $R\#A$ al unui inel R graduat după grupul G cu o G-mulţime finită A. Este de asemenea investigată legătura între regularitatea inelului $R\#A$ şi regularitatea categoriei R-modulelor A-graduate.

În lucrarea [12] este introdus conceptul de subcategorie localizantă stabilă în orice categorie Grothendieck, ca o subcategorie localizantă care poate fi scrisă ca o intersecţie de subcategorii localizante definite de obiecte injective indecompozabile. O categorie Grothendieck în care orice subcategorie localizantă este stabilă se numeşte local stabilă. Este demonstrat că:

Teoremă. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck şi $\mathcal{C}$ o subcategorie localizantă. Atunci $\mathcal{A}$ este local stabilă dacă şi numai dacă $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ sunt local stabile.*

Teoremă. *Orice TTF-clasă a unei V-categorii local finit generate este stabilă.*

Sunt date exemple şi aplicaţii la categorii de comodule peste o coalgebră, la categoria modulelor peste un inel noetherian şi la categoria modulelor graduate peste un inel graduat.