**Proiect:ID 1904,**
**Acţiuni, coacţiuni şi graduări pe algebre,**
**Director: S. Dăscălescu**
**SINTEZA LUCRĂRII**
**Raport Decembrie 2009**

Cercetarea pe temele propuse în proiect s-a concretizat în următoarele articole:

- [1] D. Bulacu, The weak braided Hopf algebra structure of some Cayley-Dickson algebras, J. Algebra 322 (2009), 2404–2427.

- [2] S. Dăscălescu şi C. Năstăsescu, Coactions on spaces of morphisms, Algebras and Representation Theory **12** (2009), 193-198.

În lucrarea [1] se arată că orice algebră obţinută printr-un proces Cayley-Dickson ce are ca dată iniţială un corp, este o algebră şi o coalgebră graduată în interiorul unei categorii monoidale. Mai exact, Alburquerque şi Majid au arătat că orice astfel de algebră se identifică cu o algebră grupală a cărei multiplicare se deformează printr-un 2-colanţ. Acest lucru se probează inductiv şi permite o determinare exactă a grupului şi a colanţului în funcţie de grupul şi colanţul anterior din proces. De remarcat este faptul că din această familie de algebre fac parte algebra numerelor complexe, cuaternionii, octonionii, sedenionii, etc. Astfel, parte din aceste algebre, anume cele ce nu sunt asociative sau comutative în sens obişnuit, devin asociative şi comutative în categorii de spaţii vectoriale graduate după o sumă directă finită de copii ale grupului ciclic de ordin 2. Scopul lucrării [1] a fost să introducă structuri duale pe aceste obiecte, mai exact structuri de coalgebre graduate în aceleaşi categorii în care ele devin algebre asociative comutative. Pentru aceasta s-a definit mai întâi un proces Cayley-Dickson pentru coalgebre. Mai precis, pentru $k$ un corp de caracteristică diferită de 2, procesul Cayley-Dickson pentru coalgebre asociază unei $k$-coalgebre de involuţie finit dimensională $(C, \sigma)$ una nouă, de dimensiune dublă, $(C', \sigma')$. $C' = C \times C \equiv C \oplus \mathbf{v}C$, ca şi $k$-spaţiu vectorial, unde perechile $(c, d) \in C \times C$ se identifică cu expresii de forma $c + \mathbf{v}d$ via $c \equiv (c, 0)$ şi $\mathbf{v}d \equiv (0, d)$, $c, d \in C$. Comultiplicarea $\Delta'$ a lui $C'$ este definită de

$$\Delta'(c) = \frac{1}{2}(c_1 \otimes c_2 - \mathbf{v}\overline{c_2} \otimes \mathbf{v}c_1) \text{ şi } \Delta'(\mathbf{v}c) = \frac{1}{2}(\overline{c_1} \otimes \mathbf{v}c_2 + \mathbf{v}c_2 \otimes c_1),$$

pentru orice $c \in C$, unde $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$ este notaţia sigma pentru comultiplicarea $\Delta$ a lui $C$, iar $C \ni c \mapsto \overline{c} \in C$ este morfismul de involuţie $\sigma$ al lui $C$. Counitatea $\varepsilon'$ şi involuţia $\sigma'$ a lui $C'$ sunt date respectiv de

$$\varepsilon'(c) = 2\varepsilon(c),\ \varepsilon'(\mathbf{v}c) = 0 \text{ şi } \sigma'(c) = \sigma(c) = \overline{c},\ \sigma'(\mathbf{v}c) = -\mathbf{v}c,\ \forall\ c \in C.$$

S-au descris după aceasta toate coalgebrele graduate ce se obţin din procesul Cayley-Dickson pentru coalgebre din data iniţială $(k, \mathrm{Id}_k)$. Ele sunt toate de forma descrisă de rezultatul general de mai jos.

**Propoziţie.** *Fie $G$ un grup finit abelian şi $F$ un 2-colanţ pe $G$ cu coeficienţi în $k^*$, unde $k$ este un corp astfel încât $\mid G \mid \neq 0$ în $k$. Dacă $k^F[G]$ este spaţiul $G$-graduat $k[G]$ echipat cu comultiplicarea $\Delta_F$ şi counitatea $\varepsilon_F$ date respectiv de*

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{\mid G \mid}\sum_{u\in G} F(u, u^{-1}x)^{-1} u \otimes u^{-1}x \text{ şi } \varepsilon_F(x) = \mid G \mid \ \delta_{x,e},$$

*pentru orice $x \in G$, unde $\delta_{x,e}$ este simbolul lui Kronecker, atunci $k^F[G]$ este o quasicoalgebră cocommutativă graduată după $G$, cu asociatorul $\Delta_2(F^{-1})$.*

Un pas necesar în descrierea efectivă a acestor coalgebre graduate este următorul.

**Lemă.** *Coalgebra de involuţie corespunzătoare prin procesul Cayley-Dickson pentru coalgebre lui $(k, \mathrm{Id}_k)$ este izomorfă, ca o coalgebră de involuţie, cu coalgebra de involuţie standard $k^F[\mathbb{Z}_2]$, unde $F : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to k^*$ este definit de $F(x, y) = (-1)^{xy}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_2$.*

În particular, se obţine că algebra de numere complexe $k[\mathbf{i}]$ peste $k$ are o structură de $\mathbb{Z}_2$-coalgebră graduată. Comultiplicarea este dată de

$$\Delta'(1) = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 - \mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \text{ şi } \Delta'(\mathbf{i}) = \frac{1}{2}(1 \otimes \mathbf{i} + \mathbf{i} \otimes 1),$$

iar counitatea este definită de $\varepsilon'(1) = 2$ şi $\varepsilon'(\mathbf{i}) = 0$, unde $\{1, \mathbf{i}\}$ este baza canonică a lui $k[\mathbf{i}]$.

Ca şi în cazul algebrelor Cayley-Dickson, coalgebrele Cayley-Dickson obţinute din $k$ sunt deformări ale lui $k[G]$ printr-un 2-colanţ $F$. Afirmaţia s-a probat prin inducţie matematică, acest lucru fiind posibil datorită următorului rezultat pe care l-am obţinut.

**Propoziţie.** *Fie $G$ un grup abelian finit, $k$ un corp astfel încât $2 \mid G \mid \neq 0$ în $k$, şi $F$ un 2-colanţ pe $G$ astfel încât $k^F[G]$ este o coalgebră de involuţie standard. Dacă $\widetilde{G} = G \times \mathbb{Z}_2$ şi $\widetilde{F}$ este 2-colanţul pe $\widetilde{G}$ definit de*

$$\widetilde{F}((x, \overline{0}), (y, \overline{0})) = F(x, y), \ \widetilde{F}((x, \overline{0}), (y, \overline{1})) = F(x, x)F(x, y),$$
$$\widetilde{F}((x, \overline{1}), (y, \overline{0})) = F(y, x) \text{ şi } \widetilde{F}((x, \overline{1}), (y, \overline{1})) = -F(x, x)F(y, x),$$

*atunci $k^{\widetilde{F}}[\widetilde{G}]$ este o coalgebră de involuţie standard izomorfă cu $(k^F[G], \sigma^F)'$.*

Fiindcă coalgebrele graduate Cayley-Dickson au aceleaşi spaţii vectoriale subiacente ca şi algebrele Cayley-Dickson corespunzătoare, rezultă ca algebra numerelor complexe, cuaternionii, octonionii, sedenionii, etc. au de asemenea structuri de coalgebre graduate. Spre exemplu,

**Corolar.** *Spaţiul cuaternionilor* $\mathbb{H}$ *este o coalgebră* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$*-graduată via structura*

$$\begin{aligned}\Delta(1) &= \frac{1}{4}(1 \otimes 1 - \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} - \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}),\ \varepsilon(1) = 4,\\ \Delta(e_n) &= \frac{1}{4}(1 \otimes e_n + e_n \otimes 1 + e_{n+1} \otimes e_{n+2} - e_{n+2} \otimes e_{n+1}),\ \varepsilon(e_n) = 0,\end{aligned}$$

*pentru orice* $n \in \{1, 2, 3\}$*, unde am notat* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (e_1, e_2, e_3)$ *şi am redus indicii e-urilor modulo* 3*.*

**Corolar.***Spaţiul vectorial al octonionilor* $\mathbb{O}$ *este o quasicoalgebră* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$*-graduată cu asociator* $\phi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (-1)^{\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z})}$*, via structura*

$$\begin{aligned}\Delta(e_0) &= \frac{1}{8}\left(e_0 \otimes e_0 - \sum_{i=1}^{7} e_i \otimes e_i\right),\ \varepsilon(e_0) = 8,\\ \Delta(e_n) &= \frac{1}{8}(e_0 \otimes e_n + e_n \otimes e_0 + e_{n+1} \otimes e_{n+3} - e_{n+3} \otimes e_{n+1} + e_{n+2} \otimes \widetilde{e}_{n-1}\\ &\qquad -\widetilde{e}_{n-1} \otimes e_{n+2} + e_{n+4} \otimes e_{n+5} - e_{n+5} \otimes e_{n+4}),\ \varepsilon(e_n) = 0,\end{aligned}$$

*pentru orice* $1 \leq n \leq 7$*, unde* $\{e_0, \cdots, e_7\}$ *este k-baza canonică a lui* $\mathbb{O}$ *iar* $\widetilde{e}_{n-1} := \begin{cases} e_7 & \text{dacă } n = 1,\\ e_{n-1} & \text{dacă } 2 \leq n \leq 7\end{cases}$.

În finalul lucrării [1] am studiat compatibilitatea dintre structura de algebră şi cea de coalgebră de pe un obiect obţinut din $k$ printr-unul din procesele Cayley-Dickson evidenţiate mai sus. Într-o primă fază am arătat că, comultiplicarea lui $k^F[G]$ respectă multiplicarea lui $k_F[G]$. Ea nu respectă însă unitatea, deci $k_F^F[G]$ nu are o structură de algebră Hopf într-o categorie de spacţii vectoriale graduate. Am arătat însă că aceste obiecte Cayley-Dickson admit o structură mai slabă, şi anume sunt algebre Hopf slabe în categorii simetric monoidale. Mai precis, am arătat că

**Propoziţie.***Dacă* $G$ *este un grup abelian şi* $F \in (G \otimes G)^*$ *este un* 2*-colanţ pe* $G$ *atunci* $k_F^F[G]$ *este o bialgebră slabă în categoria spaţiilor vectoriale* $G$*-graduate* $\mathrm{Vect}^G$*, echipată cu structura simetric monoidală dată de* 3*-cociclul abelian cofrontieră* $(\Delta_2(F^{-1}), \mathcal{R}_{F^{-1}})$*. Mai mult,* $k_F^F[G]$ *este o algebră Hopf slabă în interiorul acestei categorii, cu antipodul definit de morfismul identitate asociat lui* $k[G]$*.*

Mai mult, am arătat că, în procesul inductiv comultiplicarea lui $A'$ respectă relaţiile ce definesc structura de algebră a lui $A'$. Cu alte cuvinte, au loc următoarele relaţii,

$$\begin{aligned}&F(x, x)F(x, y)\Delta_{\widetilde{F}}((xy, \overline{1})) = \Delta_{\widetilde{F}}((x, \overline{0})) \bullet \Delta_{\widetilde{F}}((y, \overline{1})),\\ &F(y, x)\Delta_{\widetilde{F}}((yx, \overline{1})) = \Delta_{\widetilde{F}}((x, \overline{1})) \bullet \Delta_{\widetilde{F}}((y, \overline{0})),\ \text{şi}\\ &-F(x, x)F(y, x)\Delta_{\widetilde{F}}((yx, \overline{0})) = \Delta_{\widetilde{F}}((x, \overline{1})) \bullet \Delta_{\widetilde{F}}((y, \overline{1})).\end{aligned}$$

Aceste compatibilităţi dintre cele două procese Cayley-Dickson (pentru algebre şi respectiv coalgebre) ne-au permis să demonstrăm că

**Teoremă.** *Toate algebrele sau, echivalent, toate coalgebrele obţinute prin procesul Cayley-Dickson pentru algebre, respectiv coalgebre, din data iniţială* $(k, \mathrm{Id}_k)$ *sunt algebre Hopf slabe comutative şi cocomutative în anumite categorii de spaţii vectoriale graduate, privite ca şi categorii simetric monoidale via anumiţi* 3*-cociclii abelieni cofrontieră.*

În consecinţă, algebra numerelor complexe, algebra cuaternionilor, algebra octonionilor, algebra sedenionilor, etc. admit structuri de algebre Hopf slabe în categorii simetric monoidale de spaţii vectoriale graduate.

În lucrarea [2] sunt studiate anumite structuri de comodul pe spaţii de morfisme liniare între două $H$-comodule, unde $H$ este o algebră Hopf peste un corp $k$. Structura de bază folosită este dată de următorul rezultat.

**Propoziţie.** *Fie* $M$ *şi* $N$ *două* $H$*-comodule drepte astfel încât* $M$ *este finit dimensional cu baza* $(v_i)_i$*. Fie* $(v_i^*)_i$ *baza duală din* $M^*$*. Atunci* $\mathrm{Hom}(M, N)$ *are o structură de* $H$*-comodul drept dată de aplicaţia* $\psi : \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M, N) \otimes H$ *definită prin*

$$\psi(f) = \sum_i \Phi(v_i^* \otimes f(v_{i(0)})_{(0)}) \otimes S(v_{i(1)}) f(v_{i(0)})_{(1)}$$

*unde* $\Phi : M^* \otimes N \to \mathrm{Hom}(M, N), \Phi(m^* \otimes n)(x) = m^*(x)n$*.*

Studiem comportarea acestei structuri de comodul în raport cu spaţiile duale, produsele tensoriale şi spaţiile dublu-duale. Astfel arătăm următoarele.

**Propoziţie.** *Fie* $M$ *şi* $N$ *două* $H$*-comodule drepte astfel încât* $M$ *este finit dimensional. Atunci* $\Phi : M^* \otimes N \to \mathrm{Hom}(M, N)$, $\Phi(m^* \otimes n)(m) = m^*(m)n$*, este un izomorfism de* $H$*-comodule drepte.*

**Propoziţie.** *Dacă* $M$ *este un* $H$*-comodul drept finit dimensional, atunci aplicaţia evaluare* $\tau : M^* \otimes M \to k$, $\tau(m^* \otimes m) = m^*(m)$*, este un morfism de* $H$*-comodule drepte.*

**Propoziţie.** *Fie* $M$ *un* $H$*-comodul drept finit dimensional. Fie* $\psi_2 : M^{**} \to M^{**} \otimes H$ *aplicaţia care dă structura de comodul pe* $M^{**}$*, şi fie* $\phi : M \to M^{**}$, $\phi(m)(m^*) = m^*(m)$ *izomorfismul liniar natural. Atunci* $(\psi_2 \phi)(m) = \sum \phi(m_{(0)}) \otimes S^2(m_{(1)})$*. În particular dacă* $S^2 = \mathrm{Id}$*, atunci* $\phi$ *este un izomorfism de* $H$*-comodule.*

**Propoziţie.** *Dacă $M$ şi $N$ sunt $H$-comodule drepte finit dimensionale, atunci $\gamma : N^* \otimes M^* \to (M \otimes N)^*$, $\gamma(n^* \otimes m^*)(m \otimes n) = m^*(m)n^*(n)$, este un izomorfism de $H$-comodule.*

O primă aplicaţie a acestei construcţii este următoarea.

**Propoziţie.** *Fie $H$ o algebră Hopf. Atunci $H$ are integrale nenule dacă şi numai dacă există un $H$-comodul injectiv nenul finit dimensional.*

**Corolar.** *O algebră Hopf $H$ are integrale nenule dacă şi numai dacă există un $H$-comodul drept simplu a cărui anvelopă injectivă are dimensiune finită.*

O altă aplicaţie a construcţiei noastre este următoarea extinderea a unui celebru rezultat al lui Sullivan. Ideea de demonstraţie este nouă chiar şi în cazul tratat de Sullivan (în care corpul de bază are caracteristica zero).

**Teoremă.** *Fie $H$ o algebră Hopf involutivă cu integrale nenule astfel încât există un $H$-comodul drept injectiv şi indecompozabil $M$ cu $\dim(M)$ nedivizibilă cu $\mathrm{char}(k)$. Atunci $H$ este cosemisimplă. În particular, în caracteristică zero, o algebră Hopf involutivă cu integrale nenule este cosemisimplă.*

Fie $C$ o coalgebră şi fie $F : C \to C$ un morfism de coalgebre. Dacă $M$ este un $C$-comodul drept cu structura de comodul dată de $\rho : M \to M \otimes C$, $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$, atunci pe spaţiul vectorial subiacent lui $M$ avem o altă structură de $C$-comodul drept $M^{(F)}$ dată de $\rho^{(F)} : M \to M \otimes C$, $\rho^{(F)}(m) = \sum m_{(0)} \otimes F(m_{(1)})$. În general $M$ şi $M^{(F)}$ nu sunt izomorfe, nici chiar dacă $F$ este un automorfism al coalgebrei $C$. Avem totuşi următorul rezultat.

**Propoziţie.** *Presupunem că $F$ este un automorfism cointerior al coalgebrei $C$, adică există un element $\eta \in C^*$ inversabil în raport cu produsul de convoluţie astfel încât $F(c) = \sum \eta^{-1}(c_1)\eta(c_3)c_2$ pentru orice $c \in C$. Atunci pentru orice $C$-comodul drept $M$, avem că $M$ şi $M^{(F)}$ sunt izomorfe.*

Dacă $M$ este un comodul finit dimensional peste algebra Hopf $H$, izomorfismul liniar $\phi : M \to M^{**}$ este de fapt un izomorfism de $H$-comodule între $M$ şi $M^{**(S^2)}$. Dacă $H$ este coalgebră simetrică, în particular când $H$ este cosemisimplă, atunci $S^2$ este automorfism cointerior ala coalgebrei $H$ şi atunci $M \simeq M^{**}$ ca $H$-comodule.

Coinvarianţii structurii de comodul pe un spaţiu de morfisme poate fi descris după cum urmează.

**Propoziţie.** *Fie $M$ şi $N$ două comodule drepte peste algebra Hopf $H$ cu antipod bijectiv $S$, astfel încât $M$ este finit dimensional. Atunci*

$$\mathrm{Hom}(M,N)^{coH} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(M, N^{(S^2)})$$

Folosind această caracterizare obţinem următorul rezultat privind coreprezentările unei algebre Hopf cosemisimple.

**Teoremă.** *Fie $H$ o algebră Hopf cosemisimplă şi fie $M$ un $H$-comodul drept absolut ireductibil. Atunci* $\mathrm{char}(k)$ *nu divide* $\dim(M)$.

În particular, în cazul în care $k$ este algebric închis, acest rezultat recuperează o teoremă a lui Larson privind dimensiunea comodulelor simple, original demonstrată cu ajutorul teoriei caracterelor pentru algebre Hopf.