

RAPORTUL STIINTIFIC SI TEHNIC
(RST)

FAZA DE EXECUTIE NR. IV

la Contract nr. 2-Cex06-11-22/25.07.2006

CU TITLUL "*Reducere cosimplectica, varietati Kaehler generalizate, aplicatii armonice si foliati pe poliedre*"

Raportul de cercetare in extenso

Obiectivele generale planificate

Unificarea teoremei lui Kirilov-Konstant-Souriau cu teorema lui Alekseevsky-Perelomov in contextul geometriei complexe generalizate. Studiul foliatiilor ce produc morfisme armonice pe poliedre riemanniene. Rezolvarea unor probleme variationale noi prin reducerea la probleme clasice (de tip Yang Mills sau aplicatii armonice) pe diferite tipuri de varietati.

Rezumatul etapei

Se studiaza punctele critice ale functiilor distanta pe suprafete Alexandrov. Se determina numarul de geodezice simple inchise pentru suprafetele Riemann complete, necompacte si homeomorfe cu o submultime a planului sau a 2-spatiului proiectiv real. Este prezentata o constructie locala a submersiilor Riemanniene armonice folosind mai multe campuri vectoriale Killing. Se arata ca submersiile PHH sunt stabile. Sunt discutate mai multe rezultate recente pe tema aplicatiilor armonice pe poliedre Riemanniene. Este data o conditie suficienta pentru ca un poliedru convex sa poata trece printr-un cerc mai mic decat sectiunea cilindrului circumscris.

Se introduce un concept de olomorfie in geometria cuaternionica astfel incat sa se asigure existenta unui rezultat de tip Sampson-Lichnerowicz. Se studiaza stabilitatea unei aplicatii armonice intre doua varietati cuaternionice Kaehler. Se defineste o functionala Yang-Mills generalizata si se obtin formulele variatiilor I si a II-a. Se demonstreaza existenta punctelor critice ale functionalei Yang-Mills generalizate.

Descrierea stiintifica si tehnica, cu punerea in evidenta a rezultatelor fazei si gradul de realizare a obiectivelor; (se vor indica rezultatele)

In lucrarea [BIVZ], I. Barany, J. Itoh, C. Vilcu si T. Zamfirescu arata ca pentru orice suprafata Alexandrov S compacta, conexa, fara frontiera si cu curbura marginita inferior si pentru orice punct y din S exista un punct x din S in raport cu a carui functie distanta y este critic. Daca in plus adaugam unicitate existentei lui x atunci aceasta proprietate caracterizeaza suprafetele homeomorfe cu sfera, intre toate suprafetele orientabile.

In lucrarea [IOZ], J. Itoh, F. Ohtsuka si T. Zamfirescu studiaza suprafetele Riemann S complete, necompacte si homeomorfe cu o submultime a planului sau a 2-spatiului proiectiv real. Se arata ca exista asemenea suprafete care au 3 "extremitati" si nu au geodezice simple inchise. Daca insa S are macar 4 "extremitati" atunci exista infinit de multe geodezice simple inchise. Se clasifica suprafetele S cu 2 sau 3 "extremitati", in functie de vecinatatile "extremitatilor", pentru a stabili numarul de geodezice simple inchise. In ultima parte a lucrarii sunt prezentate doua exemple sugestive pentru tematica abordata.

Submersiile Riemanniene armonice, mai general morfismele armonice, sunt solutii ale unui sistem supra-determinat. Din aceasta cauza, este dificil de construit exemple netriviiale. Bryant foloseste campuri vectoriale Killing pentru a construi morfisme armonice cu fibre 1-dimensionale.

In lucrarea [MA Aprodu 1] Monica Aprodu prezinta o constructie locala a submersiilor Riemanniene armonice folosind mai multe campuri vectoriale Killing, similara cu constructia lui R. Bryant.

O aplicatie armonica intre varietati Riemanniene se numeste (slab) stabila daca Hessiana functionalei energie este (semi)pozitiv definita. In particular, o aplicatie ce minimizeaza energia este stabila. Lichnerowich a demonstrat in 1970 ca aplicatiile olomorfe intre varietati Kahleriene sunt stabile; in afara de aceste aplicatii particulare, nu dispunem de prea multe alte exemple de aplicatii armonice stabile.

Intr-o lucrare in colaborare, Monica Aprodu a introdus clasa aplicatiilor armonice PHH, care au un comportament similar cu cel al aplicatiilor armonice. Aplicatiile olomorfe intre varietati Kahleriene sunt exemple tipice de aplicatii PHH, dar clasa PHH este sensibil mai larga.

Scopul lucrarii [MA Aprodu 2] este acela de a arata ca submersiile PHH sunt stabile.

Lucrarea [MA Aprodu 3] se bazeaza pe expunerea tinuta de catre Monica Aprodu la Conferinta de Geometrie Diferentiala si Aplicatii de la Cluj, August 2007. Sunt discutate mai multe rezultate recente pe tema aplicatiilor armonice pe poliedre Riemanniene. De un interes special se bucura asanumitele aplicatii "pseudo-orizontale conforme" care generalizeaza cazul aplicatiilor olomorfe intre varietati Kahleriene.

Spunem ca un poliedru convex trece printr-un cerc daca exista o miscare rigida care duce poliedrul dintr-o parte in alta a planului cercului, fara a intersecta exteriorul cercului. Tudor Zamfirescu prezinta si demonstreaza in lucrarea [T Zamfirescu] o conditie suficienta pentru ca un poliedru convex sa poata trece printr-un cerc mai mic decat sectiunea cilindrului circumscris.

Varietatile cuaternionice Kaehler sunt varietati Riemann orientabile $4n$ -dimensionale, al caror grup de ologonomie restransa este continut in subgrupul $Sp(n)Sp(1)$ al lui $SO(4n)$. Aceste varietati sunt de un interes special deoarece $Sp(n)Sp(1)$ este inclus in lista lui Berger [BER] a grupurilor de ologonomie posibile pentru varietatile Riemann ireductibile care nu sunt local simetrice. Pe de alta parte, studiul aplicatiilor armonice a fost initiat de Eels si Sampson [ES] si acest subiect a fost si este si la ora actuala intens studiat de numerosi autori. De asemenea, exista o bogata literatura cu privire la aplicatiile olomorfe intre varietati inzestrate cu structuri hermitiene sau cu structuri metrice de contact. Motivati de faptul ca aceasta notiune nu exista in geometria cuaternionica, am introdus conceptul de aplicatie (σ, σ') -olomorfa intre doua varietati inzestrate cu structuri cuaternionice si am studiat aceste aplicatii. O aplicatie armonica se spune ca este stabila daca a doua variatie a energiei este negativa pentru orice variatie diferentiabila a aplicatiei. Stabilitatea unei aplicatii armonice este un concept extrem de important deopotrieva in geometrie si in fizica matematica [FW], [T] si a fost studiat in geometria Riemanniana [LE], [U], in geometria complexa [BBDR], [LI] si in geometria de contact [GIP], [IP]. Motivati de aceste considerente am studiat stabilitatea unei aplicatii armonice in context cuaternionic. In lucrarea [IMV] au fost obtinute, printre altele, urmatoarele rezultate :

- 1) Daca (M, σ, g) si (M', σ', g') sunt doua varietati cuaternionice Kaehler, atunci orice aplicatie (σ, σ') -olomorfa de la M la M' care indeplineste o anumita conditie naturala este aplicatie armonica.
- 2) Daca f este o aplicatie ca mai sus, astfel incat in orice punct din M exista o baza locala $\{J_1, J_2, J_3\}$ a lui σ_p , cu J_1 sau J_2 sau J_3 paralela, atunci f este stabila.

Remarcam faptul ca studiul aplicatiilor (σ, σ') -olomorfe intre varietati cu structuri cuaternionice se poate continua folosind terenul pregatit pentru metode twistoriale. De asemenea, avand in vedere ca rezultatele obtinute sunt la confluenta dintre geometrie si fizica ele pot fi folosite, printre altele, in gravitatie, solitoni, relativitate si teoria cristalelor lichide.

Din puncte de vedere variational exista multe similaritati intre teoria aplicatiilor armonice si cea a campurilor Yang-Mills. Astfel daca o aplicatie armonica este un punct critic al functionalei energie [ES], un camp Yang-Mills (sau conexiune Yang-Mills) este un punct critic al functionalei Yang-Mills [BL]. In

[MU] autorii considera o functionala gauge invariata strans legata de functionala Yang-Mills si anume functionala Yang-Mills exponentiala. Similar in [A] este studiata notiunea de f-aplicatie armonica care include notiunea de aplicatie armonica clasica dar si pe cea de aplicatie armonica exponentiala. Continuand sirul de similitudini in lucrarea [G] a fost definita o functionala de tip Yang-Mills generalizata si studiata existenta punctelor critice folosind formula variatiei I. Dupa ce s-a obtinut formula variatiei I principalul rezultat demonstrat este [G]:

Daca (M, g) este o varietate Riemann compacta n -dimensionala, G un grup Lie compact si E un G -fibrat vectorial peste M . Daca $n \geq 5$ si $f''(0) \neq 0$ atunci exista o metrica Riemann \bar{g} pe M conform echivalenta cu g si o G -conexiune liniara D pe E astfel incat D este punct dritic al functionalei Yang-Mills generalizate.

In final este obtinuta formula variatiei a II-a ce se va constitui ca un punct de plecare in studiul stabilitatii campurilor Yang-Mills generalizate.

Dr. Radu Slobodeanu a efectuat o deplasare la Brest in perioada 02.03.2008-31.03.2008. Cu aceasta ocazie, in cadrul unei colaborari cu Eric Loubeau si Michele Benyonnes, a atins urmatoarele obective. i) O teorema de caracterizare a spatiilor complexe pe care orice functie bianalitica este biarmonica. ii) Ecuatiile Euler-Lagrange pentru modelul Faddeev-Hopf generalizat, cu codomeniu arbitrar (nu neaparat varietate Kaehler).

In cadrul deplasarii, Dr. R. Slobodeanu a tinut o expunere cu titlul "A special class of critical points for the Faddeev-Hopf model", adresata membrilor "Laboratoire de Mathematique de Brest - CNRS".

In perioada 16.03.2008-29.03.2008, Dr. Radu Pantilie a efectuat o vizita de colaborare stiintifica la Universitatea din Roma, "La Sapienza", Italia. In cadrul acestei vizite el a studiat, in colaborare cu Prof. S. Marchiafava, proprietatile geometrice ale varietatilor f-cuaternionice. Deasemenea, a facut doua

expuneri, in cadrul unuia dintre seminariile stiintifice ale departamentului de matematica, cu titlul "Twistorial maps between quaternionic manifolds I, II".

In perioada 24.04.2008 -- 04.05.2008, Dr. Monica A. Aprodu a efectuat o vizita la H.I.M. Bonn.

In doua lucrari in colaborare cu T. Bouziane, Dr. M. A. Aprodu a studiat aplicatii armonice pe poliedre. Teoria armonica pe spatii singulare este un domeniu activ de cercetare in geometria actuala. O parte din rezultatele obtinute ar putea fi extinse pe alte spatii singulare mai generale, pe care inca nu s-a facut teorie armonica. In timpul stagiului de cercetare la Hausdorff Center for Mathematics Bonn din perioada mai sus mentionata, Dr. M. A. Aprodu a discutat cu Prof. M. Kreck despre posibilitatea dezvoltarii unei teorii de aplicatii armonice pe stratifolduri. Stratifoldurile, introduse initial in context topologic de catre Whitney, generalizeaza notiunea de polideru. Pe ele se poate face geometrie Riemanniana, dar acesta este inca un taram neexplorat. In timpul discutiilor cu Prof. Kreck am descoperit mai multe obstructii tehnice la dezvoltarea geometriei Riemanniene pe stratifolduri. Am inceput studiul stratifoldurilor cu singularitati de tip con. Calculele preliminare arata ca se poate face un studiu amanuntit al aplicatiilor armonice definite pe astfel de spatii cu valori intr-o varietate Riemanniana.

Dr. M. A. Aprodu a facut numeroase deplasari interne, intre Galati si Bucuresti, pentru a participa activ la seminarul stiintific de geometrie diferentia al IMAR.

In perioada 03.05.2008-14.05.2008 Dr. Liana David a lucrat cu Prof. D. Alekseevsky de la Universitatea din Edinburgh la un articol despre structuri complexe generalizate si structuri Kaehler generalizate pe grupuri Lie. Geometria generalizata reprezinta o unificare a geometriei complexe si simplectice. In aceasta lucrare vrem sa descriem in mod explicit, in termeni de algebre Lie, structuri complexe si Kahler generalizate, stang invariante, pe grupuri Lie compacte semi-simple.

De asemenea, Dr. Liana David a studiat si problema extinderii structurilor hyper-complexe pe astfel de grupuri Lie, descoperite de catre D. Joyce, la structuri Kahler generalizate

Dr. C. Vilcu a efectuat in perioada 16.05.2008-21.05.2008 o vizita la Universitatea Dortmund. Deplasarea la a permis finalizarea si trimiterea spre publicare a lucrarii [BIVZ], lucrare ce este predata in cadrul prezentei etape a grantului. Discutiile avute cu Prof. Tudor Zamfirescu au permis gasirea altor teme de interes comun si continuarea colaborarii.

A.Halanay a participat la Workshopul "Moduli spaces of vector bundles: algebra-geometric aspects" la Universitatea din Barcelona intre 12-14 Martie.

Concluzii

Obiectivele propuse au fost indeplinite in mod integral. Au fost elaborate opt lucrari stiintifice ce contin rezultatele obtinute; doua sunt deja publicate, alte doua sunt acceptate pentru publicare, iar patru sunt trimise spre publicare. Toate articolele au fost publicate, acceptate sau trimise spre publicare in reviste foarte bine cotate avand un factor de impact ridicat. Tematica propusa a fost acoperita si noi directii de studiu au fost abordate.

Bibliografie

- [BIVZ] Imre Barany, Jin-ichi Itoh, Costin Vilcu si Tudor Zamfirescu, *Every point is critical*, trimisa spre publicare
- [IOZ] Jin-ichi Itoh, Fumiko Ohtsuka si Tudor Zamfirescu, *Some remarks on simple closed geodesics of surfaces with ends*, trimisa spre publicare
- [MA Aprodu 1] Monica A. Aprodu, *On a construction of harmonic Riemannian submersions*, Math. Rep. (Bucur.) **9**(59) (2007), no. 3, 243-247
- [MA Aprodu 2] Monica A. Aprodu, *PHH Harmonic Submersions are Stable*, va apare in Boll. U.M.I. **(8)** 10-B (2007)
- [MA Aprodu 3] Monica A. Aprodu, *Pseudo-horizontally weakly conformal maps on Riemannian manifolds and Riemannian polyhedra*, va apare in Proc. 8th Workshop on Differential Geometry and its Applications, Cluj 2007
- [T Zamfirescu] Tudor Zamfirescu, *Convex polytopes passing through circles*, trimisa spre publicare
- [IMV] S. Ianus, R. Mazzocco, G.E. Vilcu – Harmonic maps between quaternionic Kaehler manifolds, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, vol. 15, no. 1 (2008), 1-8.
- [G] C.Gherghe- On a gauge invariant functional (lucrare trimisa spre publicare la o revista ISI)
- [A] Mitsunori Ara, Geometry of f-harmonic maps, Kodai Math. J., 22(1999), 243-263.
- [BER] M. Berger, Sur les groupes d'holonomie homogenes de varietes a connexion affine et des varietes riemanniennes, Bull. Soc. Math. Fr. 83 (1955), 279–330.
- [BL] J.P.Bourguignon, H.P.Lawson, Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields, Commun.Math.Phys.79(1981), 189-230.
- [BBBR] D. Burns, F. Burstall, P. De Bartolomeis, J. Rawnsley, Stability of harmonic maps of Kahler manifolds, J. Differential Geom., 30 (1989), 579–594.
- [ES] J. Eells, J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 86 (1964) 109–160.
- [FW] A. Fordy, J. Wood, Harmonic maps and integrable systems, Braunschweig: Vieweg, 1982.
- [GIP] C. Gherghe, S. Ianus, A. M. Pastore, CR-manifolds, harmonic maps and stability, J.Geom. 71 (2001), 42–53.
- [IP] S. Ianus, A. M. Pastore, Harmonic maps on contact metric manifolds, Ann. Math. Blaise Pascal 2 (1995), 43–55.
- [LE] P. F. Leung, On the stability of harmonic maps, In Harmonic Maps, Tulane 1980, Lect. Notes Math. 949 (1982), 122–129.
- [LI] A. Lichnerowicz, Applications harmoniques et varietes kahleriennes, Sympos. Math., Roma 3 (1970), 341–402.
- [MU] F.Matsuura, H.Urakawa, On exponential Yang-Mills connections, J.Geom.Phys., 17(1995), 73-89.
- [T] G. Toth, Harmonic and minimal maps: with applications in geometry and physics, Series in Mathematics and its Applications, Chichester: Ellis Horwood Limited, New York, 1984.

Responsabil de proiect,
Prof.dr.S.Ianus