Denumirea etapei: Hipersuprafete in varietati paracuaternion-Kaehler, varietati Sasaki, morfisme armonice.

Perioada acoperita: 01.08.2006 –30.11.2006

1. Varietatile paracuaternionice, de dimensiune multiplu de 4, sint asociate algebrei numerelor paracuaternionice. Ele sint dotate cu o structura aproape produs si doua structuri aproape complexe care satisfac relatii de comutare naturale si genereaza un subfibrat V al fibrarii endomorfismelor lui TM. Orice metrica riemanniana compatibila cu o structura paracuaternionica are, in mod necesar, signatura (2n,2n). Daca subfibratul V e paralel fata de conexiunea metrica, atunci structura este paracuaternion-Kaehler. Exemplele sint numeroase (vezi [IZ] si bibliografia de acolo). Importanta acestor varietati vine si din faptul ca, in dimensiune mai mare ca 8, ele sint Einstein (cf., de exemplu, [IZ]).

Studiul geometriei subvarietatilor in varietati paracuaternion Kaehler este destul de incipient. O particularitate o constituie necesitatea utilizarii tehnicilor teoriei subvarietatilor in varietati semi-riemanniene. Noi am folosit metodele dezvoltate de Bejancu si Dugall in [BD] si pe cele din [K]. In lucrarea [IMV] am investigat pentru inceput hipersuprafete reale de tip luminos. Le-am determinat proprietatile, le-am caracterizat pe cele total geodezice, am construit o clasa de exemple si, pe de alta parte, am determinat obstructii la existenta lor in forme spatiale cuaternionice in termeni de curbura si de geometrie extrinseca (forma a doua fundamentala). In plus, am determinat structurile de aproape contact si de paracontact induse in mod natural pe astfel de hipersuprafete.

Partea din Obiectivul 13 avuta in vedere pentru prima faza a fost indeplinita in totalitate, obtinindu-se, intre altele, urmatoarele rezultate:

1) S-a construit un exemplu nebanal pe spatiul euclidian de dimensiune 8.

2) S-au determinat structurile de aproape contact si de aproape paracontact induse.

3) Au fost caracterizate hipersuprafetele reale luminoase total geodezice si s-au gasit proprietatile distributiilor lor naturale.

4) S-au gasit doua tipuri de obstructii (extrinsece, in termeni de forma a doua fundamentala, si intrinsece, in termeni de curbura) la existenta acestor hipersuprafete in forme spatiale paracuaternionice.

2. Varietatile Sasaki reprezinta analogul cel mai natural in dimensiune impara al varietatilor Kaehleriene. Proprietatile lor de baza sint cuprinse in monografiile [B] si [BG-2] (a doua in curs de aparitie).

Metoda standard de constructie de varietati Sasaki compacte este considerarea de fibrari principale in cercuri peste orbifolduri Kaehler. Dar nu orice varietate Sasaki compacta este de acest tip: exista acum numeroase exemple de varietati Sasaki-Einstein care nu sint quasi-regulate (deci nu fibreaza peste un orbifold Kaehler), cf., de exemplu [GMSW]. Pe de alta parte, se stie ca orice structura Sasaki se poate deforma la una quasi-regulata.

Pentru varietati Sasaki-Einstein quasi-regulate, Boyer si Galicki au introdus, in [BG-1], o metoda de constructie numita “join”. Date varietatile Sasaki-Einstein S si S’, cu bazele P si P’, se considera produsul PxP’ si se construieste un anumit fibrat in cercuri peste el. Extinderea constructiei “join” din geometria Sasaki-Einstein la cazul non-Einstein si corelarea ei cu constructia lui Lerman [Le] pentru fibrari de contact. Intr-adevar, in articolul [BGO], am aratat ca aceasta constructie se poate extinde renuntind la conditia Einstein. Se obtin astfel numeroase exemple. In particular, am obtinut familii de metrici Sasaki-Einstein pe varietati homeomorfe cu produsul dintre o sfera 2-dimensionala si una 5-dimensionala. Pe de alta parte, conform obiectivului asumat, am demonstrat ca aceasta constructie este un caz special al constructiei lui E. Lerman. In particular, cind si baza si fibra fibrarii de contact sint torice, constructia noastra furnizeaza exemple de varietati Sasaki torice. In plus, tinind seama de legatura care exista intre varietati Sasaki compacte si varietati Vaisman [OV-1], constructia join ofera si un mod de a construi noi exemple de varietati Vaisman compacte.

Tot in contextul geometriei Sasaki, s-a obtinut o teorema de scufundare a varietatilor Sasaki compacte in varietati difeomorfe cu sferele, acesta reprezentind cel mai bun rezultat posibil analog teoremei de scufundare Kodaira din geometria Kaehler, cf [OV-2].

Obiectivul 6 a fost indeplinit in mod integral obtinindu-se, printre altele, urmatoarele rezultate:

1) Constructia join functioneaza pentru varietati Sasaki quasi-regulate.
2) Constructia join este un caz particular al fibrarilor de contact introduse de Lerman. In particular, cind baza si fibra sint torice, spatiul total este toric.
3) Orice varietate Sasaki compacta se poate scufunda CR intr-o varietate difeomorfa cu o sfera.

3. Morfismele armonice, intre varietati riemanniene, sunt aplicatii care intorc (`pull-back’) functii armonice (locale) in functii armonice. Conform unui rezultat de baza, demonstrat independent de B. Fuglede si T. Ishihara (a se vedea [BW]), o aplicatie este morfism armonic daca si numai daca este o aplicatie armonica si orizontal conforma.

Rezultate de clasificare pentru morfismele armonice cu fibre unidimensionale au fost obtinute, de exemplu, in [Br], [P-1], [PW-1]. In [Br] s-a demonstrat ca exista doar doua tipuri de asemenea morfisme armonice ce pot fi definite pe o varietate riemanniana cu curbura constanta de dimensiune cel putin patru. Acest rezultat a fost generalizat in [PW-1] la cazul cind domeniul este o varietate Einstein de dimensiune cel putin cinci; pentru varietati Einstein cvadridimensionale clasificarea este diferita, in acest caz aparind un al treilea tip de morfism armonic [P-1]. Deasemenea, in [PW-2] sunt clasificate morfismele armonice `twistoriale’ cu fibre unidimensionale definite pe varietati autoduale cvadridimensionale.

Una dintre directiile de cercetare ale proiectului nostru este obtinerea de rezultate de clasificare pentru morfismele armonice. Astfel, ne-am propus sa clasificam morfismele armonice cu fibre unidimensionale definite pe varietati riemanniene conform-plate (Obiectivul 2).

Conform unui rezultat clasic al lui H. Weyl, o varietate riemanniana, de dimensiune cel putin patru, este conform-plata daca si numai daca o anumita componenta ireductibila (tensorul de curbura Weyl) a tensorului de curbura riemanniana este nul (a se vedea [L]). Noi folosim acest rezultat pentru a deduce, de exemplu, ca pentru orice submersie orizontal conforma, cu fibre de dimensiune cel mult doi, intre varietati riemanniene conform-plate, de dimensiuni cel putin patru, distributia orizontala este integrabila.

Obiectivul 2 a fost indeplinit in mod integral obtinindu-se, printre altele, urmatoarele rezultate:

4) Orice morfism armonic cu fibre unidimensionale definit pe o varietate riemanniana real-analitica conform-plata, de dimensiune cel putin patru, este
   (i) de tip Killing *sau*
   (ii) distributia sa orizontala este integrabila iar foile acesteia au curbura constanta daca sunt inzestrate cu metricile induse de orice metrica, echivalenta conform cu cea data, fata de care fibrele sunt geodezice.
5) Aplicatia polinomiala Hopf intre spatiile euclidiene de dimensiuni patru si trei este, pina la difeomorfisme conforme locale, unicul morfism armonic cu fibre unidimensionale si distributie orizontala neintegrabila intre varietati riemanniene conform-plate de dimensiuni cel putin trei.

Rezultatele descrise mai sus, la punctele 1. – 3., sunt cuprinse, in ordine, in lucrarile [IMV] (pentru 1.), [BGO], [OV-2] (pentru 2.), [P-2] (pentru 3.), unele puse deja pe arxiv.org, trimise spre publicare la: Mediteranean Journal of Mathematics ([IMV]), Mathematische Zeitschrift ([BGO]), Mathematical Research Letters ([OV-2]), Annales de l’Institut Fourier ([P2]).

In urmatoarea etapa ne vom concentra asupra urmatoarelor obiective:

- Studiul aplicatiilor armonice intre varietati cu structuri de contact metrice, in particular cosimplectice.

- Aprofundarea relatiilor dintre structurile Sasaki si diverse structuri hermitiene.

- Studiul subvarietatilor varietatilor cuaternion Kaehler si paracuaternion Kaehler.

- Dezvoltarea unei teorii a punctelor critice pe suprafete convexe cu singularitati.

- Extinderea rezultatelor lui Darling, privind relatiile dintre comportamentul miscarilor browniene prin aplicatii intre varietati riemanniene si armonicitatea aplicatiilor, la cazul poliedrelor Riemanniene.

- Studiul unei clase de aplicatii twistoriale.

REFERINTE BIBLIOGRAFICE

[BW] P. Baird, J. C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), no. 29, Oxford Univ. Press, Oxford, 2003.

[B] D.E. Blair, Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Birkhauser, 2001.

[Br] R. L. Bryant, Harmonic morphisms with fibres of dimension one, *Comm. Anal. Geom.*, **8** (2000) 219-265.

[BD] A. Bejancu, K.L. Dugall, *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*, Kluwer, 1996.

[BG-1] C.P Boyer, K. Galicki, *On Sasakian-Einstein geometry*, Intern. J. Math., 11 (12000), 873-909.

[BG-2] C.P. Boyer, K. Galicki, Sasakian geometry, Oxford Univ. Press, va aparea in 2006.

[BGO] C.P. Boyer, K. Galicki, L. Ornea, *Constructions in Sasakian geometry*, preprint 2006, mathDG 0602233.

[GMSW] J.P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks, D. Waldram, Sasaki-Einstein metrics on S^2xS^3, Adv. Theor. Math. Phys. 8 (2004), 711-734.

[IMV] S. Ianus, R. Mazzocco, G.E. Vilcu, *Real lightlike hypersurfaces of paracuaternionic Kaehler manifolds*.

[IZ] S. Ivanov, S. Zamkovoy, *Para-hermitian and para-quaternionic manifolds*, Differ. Geom. Appl. 2 (2005), 205-234.

[K] N. Kupeli, *Singular semi-Riemannian geometry*, Kluwer, 1996.

[L] J. Lafontaine, Conformal geometry from the Riemannian viewpoint, *Conformal geometry (Bonn, 1985/1986)*, Aspects Math., E12, Vieweg, Braunschweig, 1988, 65-92.

[Le] E. Lerman, *Contact fiber bundles*, J. Geom. Physics, 49 (2004), 52-66.

[OV-1] L. Ornea, M. Verbitski, *Structure theorem for compact Vaisman manifolds*, Math. Res. Lett., 10 (2003), 799-805.

[OV-2] L. Ornea, M. Verbitsky, *Embeddings of compact Sasakian manifolds*, preprint 2006, math.DG/0609617.

[P-1] R. Pantilie, Harmonic morphisms with 1-dimensional fibres on 4-dimensional Einstein manifolds, *Comm. Anal. Geom.*, **10** (2002) 779-814.

[P-2] R. Pantilie, Harmonic morphisms with one-dimensional fibres on conformally-flat Riemannian manifolds, Preprint, I.M.A.R., 2006, (math.DG/0610361).

[PW-1] R. Pantilie, J. C. Wood, Harmonic morphisms with one-dimensional fibres on Einstein manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354** (2002) 4229-4243.

[PW-2] R. Pantilie, J. C. Wood, Twistorial harmonic morphisms with one-dimensional fibres on self-dual four-manifolds, *Q. J. Math. (Oxford)*, **57** (2006) 105-132.