1 Obiectivele proiectului

1) Formularea unei notiuni adecvate de olomorfie pentru aplicatii intre varietati inzestrate cu structuri complexe generalizate si studierea armonicitatii aplicatiilor olomorfe intre varietati Kaehler generalizate. Deasemenea, studierea unor anumite clase de structuri complexe generalizate.
2) Aprofundarea cunoasterii morfismelor armonice si pseudo armonice intre varietati cu structuri geometrice date, cum ar fi varietatile riemanniene plate si conform-plate.
3) Studierea proprietatilor twistoriale ale morfismelor armonice cu fibre unidimensionale definite pe spatii Einstein-Weyl cvadridimensionale.
4) Construirea reducerilor cosimplectice.
5) Studierea aplicatiilor armonice intre varietati inzestrate cu structuri de contact metrice.
6) Extinderea constructiei "join" din geometria Sasaki-Einstein la cazul non-Einstein si corelarea ei cu constructia lui Lerman pentru fibrari de contact. Este de asteptat o gama larga de noi exemple de varietati Sasaki.
7) Introducerea clasei varietatilor cu structura local conform Kaehler generalizata si studierea proprietatilor ei. Aceasta clasa trebuie sa includa structurile local conform Dirac complexe si pe cele local conform simplectice complexe.
8) Construirea de spatii omogene complexe si realizari geometrice pentru reprezentari speciale ale unor grupuri Lie-Banach.
9) Clasificarea structurilor complexe generalizate si ale structurilor Kahler generalizate invariante pe orbitele adjuncte ale unui grup Lie compact semi-simplu.
10) Determinarea unei interpretari twistoriale ale conexiunilor Weyl definite pe o varietate conforma 3-dimensionala.
11) Extinderea si dezvoltarea rezultatele lui Darling la cazul poliedrelor Riemanniene.
12) Investigarea aplicatiilor armonice pe poliedre în legatura cu foliatiile (cf. [P3], pentru cazul diferentiabil).
13) Studierea subvarietatilor si a submersiilor in geometria cuaternionica. Deasemenea, studiul hipersuprafetelor in varietatile paracuaternion-Kaehler.
14) Geodezice si puncte critice pe suprafete convexe si suprafete Alexandrov.

2 Prezentarea stiintifica si tehnica a proiectului

Descriem strategia pentru atingerea obiectivelor (1)-(14):
1) O structura complexa generalizata este o structura Dirac complexa. Asadar aplicatiile olomorfe intre varietati inzestrate cu structuri complexe generalizate vor fi morfisme Dirac complexe; pentru a defini notiunea de morfism Dirac vom utiliza faptul ca structurile Dirac generalizeaza structurile presimplectice precum si structurile Poisson. Deasemenea vom studia in ce masura faptul ca orice aplicatie olomorfa intre varietati Kaehler este armonica poate fi generalizat la cazul aplicatiilor olomorfe intre varietati Kaehler generalizate. In acest mod, noi constructii de aplicatii si morfisme armonice ar putea fi obtinute.
2) Ne propunem sa demonstram ca orice morfism armonic cu fibre unidimensionale definit pe o varietate riemanniana conform-plata, de dimensiune cel putin patru, cu valori intr-o varietate riemanniana este de tip Killing sau distributia sa orizontala este integrabila. Acest rezultat ar constitui o extensie a rezultatelor de clasificare

pentru morfismele armonice cu fibre unidimensionale definite pe varietati Einstein. De asemenea, intentionam sa obtinem rezultate de clasificare pentru morfisme pseudo armonice polinomiale.

3) Acest obiectiv este motivat de faptul ca proprietatile twistoriale ale morfismelor armonice sunt binecunoscute in urmatoarele doua cazuri particulare:

a) domeniul este o varietate Einstein cvadridimensionala iar codomeniul este o varietate riemanniana tridimensionala;

(b) domeniul si codomeniul sunt spatii Einstein-Weyl de dimensiune patru si, respectiv, trei.

4) Ne propunem sa obtinem o constructie de reducere pentru varietatile inzestrate cu o structura de contact metrica, in particular, pentru varietatile cosimplectice. Aceasta constructie ar fi analogul reducerii Kaehler.

5) Vom studia aplicatiile armonice intre varietati inzestrate cu structuri de contact metrice utilizind metode twistoriale.

6) In [BG], Boyer si Galicki au definit o structura de monoid pe multimea varietatilor Sasaki-Einstein. Operatia specifica se numeste "join". Ea permite construirea unei noi varietati atunci cind se cunosc deja doua cu structura Sasaki-Einstein. Dar conditia Einstein e destul de rigida si ar putea fi relaxata, ceea ce ne propunem sa facem in colaborare cu ei. Una dintre aplicatii este gasirea unei clase largi de structuri Sasaki pe produsul S^2xS^3 vazut ca fibrare in cercuri peste o suprafata Hirzebruch. Pe de alta parte, Lerman a dat conditii suficiente pentru ca spatiul total al unei fibrari cu fibre de contact sa poarte o structura de contact. Vom presupune fibra sasakiana si vom da conditiile corespunzatoare pentru ca spatiul total sa fie sasakian. E de asteptat ca cele doua constructii (join si fibrari de contact) sa fie legate una de cealalta. Ne vom ocupa in mod special de cazul toric.

7) Ca si in cazul Hermitian, o varietate local conform Kaehler generalizata (lcKg) trebuie definita ca un cit al unei varietati Kaehler generalizate printr-un grup discret de automorfisme conforme. Notiunea trebuie sa fie legata de cea de structura local conform bihermitiana. Dupa modelul relatiei dintre geometriile local conform hiper-Kaehler si hiper-Kaehler cu torsiune (HKT), ne asteptam ca geometria lcKg sa fie legata de geometria hiper-Kaehler cu torsiune.

8) Diverse reprezentari speciale ale grupurilor Lie-Banach apar in legatura cu unele reprezentari ale algebrelor de operatori, si de aceea avem intentia sa ne atingem obiectivul prin utilizarea unor metode de teoria operatorilor care au fost dezvoltate recent de catre membrii ai echipei noastre. Pe de alta parte, dorim sa ne concentram atentia asupra unor grupuri Lie-Banach care furnizeaza descrieri riguroase ale anumitor grupuri de simetrie din fizica matematica. Astfel, prin construirea de spatii omogene complexe si realizari geometrice ale unor reprezentari ale acestor grupuri, vom fi in masura sa stabilim noi punti de legatura intre diverse domenii precum teoria reprezentarilor de grupuri Lie, teoria algebrelor de operatori, olomorfia si geometria diferentiala in dimensiuni infinite, si de asemenea unele capitole din fizica matematica.

9) Alekseevsky si Perelomov (1986) au clasificat structurile complexe invariante pe orbitele adjuncte G/K ale unui grup Lie compact semi-simplu G in termeni algebrici (definiti pe algebrele Lie g si k ale grupurilor Lie G, respectiv K). Pe de alta parte, din teorema Kirillov-Konstant-Souriau, structurile simplectice invariante pe astfel de orbite sint in corespondenta bijectiva cu elemente ale algebrei Lie g, care au stabilizatorul K sub actiunea adjuncta a grupului Lie G pe algebra lui Lie. Structurile complexe si structurile simplectice sint cazuri particulare de structuri complexe generalizate. Este natural sa se incerce unificarea teoremei lui Kirilov-Konstant-Souriau cu teorema lui Alekseevsky-Perelomov si sa se obtina astfel o clasificare ale structurilor complexe generalizate invariante pe orbitele adjuncte ale unui grup Lie compact semi-simplu, in termeni de algebre Lie. Alekseevksy si Perelomov au

studiat si structurile invariante Kahler si Kahler-Einstein pe astfel de orbite. Ar fi interesant sa se generalizeze resultatele lor la structuri Kahler generalizate.

10) Gauduchon (1991) a demonstrat ca o conexiune Weyl pe o varietate conforma auto-duala 4-dimensionala M determina o structura olomorfa, naturala si reala, pe fibratul tangent vertical al proiectiei twistoriale al lui M. Aceasta corespondenta induce o bijectie intre multimea claselor de echivalenta de conexiuni Weyl pe M si multimea structurilor olomorfe, reale si naturale, pe acest fibrat vertical. Argumentul lui Gauduchon se poate adapta in contextul spatiilor twistor CR construite de LeBrun (1984), asociate unei varietati conforme tridimensionale netede. Mai precis, printr-o metoda similara cu cea a lui Gauduchon, putem asocia unei conexiuni Weyl pe o varietate neteda 3 dimensionala conforma N un operator d-bar pe fibratul tangent vertical al proiectiei twistoriale definite pe spatiul twistor CR a lui N cu valori in N. Obtinem astfel o corespondenta intre spatiul conexiunilor Weyl pe N si spatial structurilor CR pe acest fibrat tangent vertical, care ar putea constitui un prim pas pentru o noua interpretare twistoriala ale conexiunilor Weyl definite pe varietati conforme tridimensionale. Acest proiect este justificat de ecuatiile lui Weyl-Bogomolny pe varietati conforme tridimensionale: folosind interpretarea twistoriala a conexiunilor Weyl in dimensiunea trei, am putea obtine o noua interperare twistoriala ale ecuatiilor lui Weyl-Bogomolny pe o varietate conforma 3 dimensionala (nedotata cu conexiune Weyl fixata). Aceasta interepetare nu se gaseste in literatura matematica, tocmai deoarece nu se cunoaste inca o interpretare a conexiunilor Weyl pe spatiul twistor CR.

11) Vom incerca sa extindem rezultatele lui Darling la cazul poliedrelor Riemanniene. Mai multe probleme tehnice sunt de imaginat, datorate prezentei singularitatilor. Sa remarcam ca analiza diferentiala de ordin doi, pe care se bazeaza toata teoria stocastica, nu admite nici o generalizare naturala în cazul poliedrelor. Prin urmare, vom fi nevoiti sa dezvoltam o noua abordare combinind teoria neteda cu metode hibride.

12) Alte dezvoltari ale teoriei armonice pe poliedre sunt luate în calcul, în special investigarea aplicatiile armonice în legatura cu foliatiile, încercând o clasificare în cazul fibrelor de dimensiune unu. O teorie adecvata a foliatiilor pe poliedre trebuie dezvoltata mai întâi.

13) Se va studia cazul cand aceste hipersuprafete sunt de tip Einstein, folosind ecuatiile Gauss si Codazzi. Pentru fizica matematica prezinta interes cazul cand aceste hipersuprafete sunt izolate (sau “gen lumina”). Si in acest caz este interesant sa se decida cand aceste hipersuprafete sunt Einstein. Daca hipersuprafetele sunt total ombilicale intr-un spatiu paracuaternion-Kahler de curbura Q-sectionala constanta nenula, S.Ianus si G.Vilcu au aratat ca ele nu pot fi Einstein. Exista un rezultat clasic care afirma ca orice hipersuprafata intr-o varietate cuaternionica are o 3-structura aproape de contact. Recent. D. Alekseevski si Y. Kamishima [AK] au aratat ca anumite subvarietati in varietati paracuaternionice Kahler au pseudo-Sasaki 3-structuri si au aplicat tehnicile din teoria submersiilor pentru studiul lor. Se va face un studiu asupra curburii acestor clase de varietati si se vor studia subvarietatile lor, avand in vedere foliatiile care apar in mod natural.

14) Vom folosi teoria Alexandrov, referitoare la geodezicele suprafetelor convexe (cu singularitati), pentru a dezvolta teoria punctelor critice pe asemenea suprafete. Deasemenea, introducerea in studiul spatiilor Alexandrov, datorata lui Burago-Gromov-Perelman, precum si abordari mai recente (Perelman, Ballmann, Shiohama-Tanaka) vor fi completate cu o investigatie in acest context general.

3 Bibliografie

[AAB] M.A. Aprodu, M. Aprodu, V. Brinzanescu, A class of harmonic submersions and minimal submanifolds, Int. J. Math., 11 (2000) 1177-1191.

[AB] M.A. Aprodu, T. Bouziane, Pseudo Harmonic Morphisms on Riemannian Polyhedra, math.DG/0409553, to appear in Int. J. Math., (2006).

[AK] D.Alekseevsky, Y. Kamishima, Quaternionic and paraquaternionic CR-structure on (4n+3)-dimensional manifolds, Central European Sci. J., 2 (2004) 732-753.

[B] A. Besse, Einstein manifolds, Ergebnisse der Math. 3, Springer Verlag, 1987.

[BB] T.N. Bailey, R.J. Baston, Twistors in Mathematics and Physics, LMS Lecture Notes vol. 156, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

[BD] T.N. Bailey, L. David, The Penrose transform for compactly supported cohomology, Journal of the London Mathematical Society, (2) 66 (2002) 131-141.

[Be1] D. Beltita, Integrability of analytic almost complex structures on Banach manifolds, Ann. Global Anal. Geom., 28 (2005) 59-73.

[Be2] D. Beltita, Smooth Homogeneous Structures in Operator Theory, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 137, CRC Press, Boca Raton-London-New York-Washington D.C., 2005.

[BG] C. Boyer, K. Galicki, On Sasakian-Einstein geometry, Int. J. Math., 11 (2000) 873-909.

[BadIan1] S. Ianus, G. Baditoiu, Semi-Riemannian submersions with totally umbilic fibres, Rend. Circ. Mat. Palermo, II, Ser. 51 (2002) 249-276.

[BadIan2] G. Baditoiu, S. Ianus, Semi-Riemannian submersions from real and complex pseudo-hyperbolic spaces, Differential Geom. Appl., 16 (2002) 79-94.

[Bl] D.E. Blair, Riemannian geometry on complex and symplectic manifolds, Progress in Math. 203, Birkhäuser, 2002.

[BM] F. Belgun, A. Moroianu, Nearly Kaehler 6-manifolds with reduced holonomy, Ann. Global Anal. Geom., 19 (2001), 307-319.

[BR1] D. Beltita, T.S. Ratiu, Symplectic leaves in real Banach Lie-Poisson spaces, Geometric and Functional Analysis 15 (2005), no. 4, 753-779.

[BR2] D. Beltita, T.S. Ratiu, Geometric representation theory for unitary groups of operator algebras, preprint math.RT/0501057.

[BW] P. Baird, J.C. Wood, Harmonic morphisms between Riemannian manifolds, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), no. 29, Oxford Univ. Press, Oxford, 2003.

[CG] D. Chinea, C. Gonzales, A classification of almost contact metric manifolds, Ann. Mat. Pura Appl., 156 (1990), 15-36.

[CP] D.M.J. Calderbank, H. Pedersen, Einstein-Weyl geometry, in Surv. Differ. Geom., Suppl. J. Differ. Geom. 6, 387-423 (1999).

[D] R.W.R. Darling, Martingales in Manifolds – definitions, examples, and behaviour under maps, Séminaire de Probabilités XVI, 1980/1981. Supp. Géométrie Différentielle Stochastique Lect. Notes Math 921.

[DO] S. Dragomir, L. Ornea, Locally conformal Kaehler geometry, Progress in Math. 155, Birkhäuser, 1997.

[EF] J. Eells, B. Fuglede, Harmonic Maps between Riemannian Polyhedra, Cambridge Univ. Press, 2001.

[F] A.Futaki, Kähler-Einstein metrics and integral invariants, Lecture Notes in Mathematics, 1314, Springer-Verlag,

Berlin, 1988.
[G] M. Gualtieri, Generalized complex geometry, DPhil Thesis, Oxford University, math.DG/0401221.
[Ga] K. Galicki A generalization of the momentum mapping construction for quaternionic Kähler manifolds, Comm. Math. Phys., 108 (1987) 117–138.
[GH] A. Gray, L.M. Hervella, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds, Ann. Mat. Pura Appl., 123 (1980), 35-58.
[GiHa] G.W. Gibbons, S.W. Hawking, Gravitational multi-instantons, Phys. Lett. B, 78 (1978) 430-432.
[GMSW] J.P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks, D. Waldram, Sasaki-Einstein metrics on S^2xS^3, Adv. Theor. Math. Phys. 8 (2004), 711-734.
[GO] G. Grantcharov, L. Ornea, Reduction of Sasakian manifolds, J. Math. Physics, 48 (2001) 3809-3816.
[H1] N.J. Hitchin, Linear field equations on self-dual spaces, Proc. Roy. Soc. London, A379 (1890) 173-191.
[H2] N.J. Hitchin, Generalized Calabi-Yau manifolds, Q. J. Math. (Oxford), 54 (2003) 281-308.
[Ian] S. Ianus, Sulle strutture canoniche dello spazio fibrato tangente di una varieta riemanniana, Rend. Mat., VI. Ser. 6 (1973) 75-96.
[IanVil] S. Ianus, G. Vilcu, (in pregatire).
[KS] N.J. Korevaar, R.M. Schoen, Sobolev Spaces and Harmonic Maps for Metric Target Spaces, Comm. Anal. Geom., 1 (1993) 561-659.
[L] E. Loubeau, Pseudo Harmonic Morphisms, Int. J. Math., 7 (1997) 943-957.
[Le] E. Lerman, Contact fibre bundles, J. Geom. Physics, 49 (2004) 52-66.
[Li] P. Libermann, Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales, Ann. Mat. Pura Appl., IV, Ser. 36 (1954) 27-120.
[LP] E. Loubeau, R. Pantilie, Harmonic morphisms between Weyl spaces and twistorial maps, Preprint, The University of Brest, 2004, I.M.A.R., 2005.
[Ne] K.-H. Neeb, Infinite-dimensional groups and their representations. In: ``Lie Theory,'' Progr. Math., 228, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2004, pp. 213-328.
[NRW] L. Natarajan, E. Rodriguez-Carrington, J.A. Wolf, The Bott-Borel-Weil theorem for direct limit groups. Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 11, 4583-4622.
[Ott] J.T. Ottesen, ``Infinite-dimensional Groups and Algebras in Quantum Physics.'' Lecture Notes in Physics. New Series: Monographs, 27. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
[OV] L. Ornea, M. Verbitsky, An immersion theorem for Vaisman manifolds, Math. Ann., 322 (2005), 121-143.
[P1] R. Pantilie, Harmonic morphisms with one-dimensional fibres, Int. J. Math., 10 (1999) 457-501.
[P2] R. Pantilie, Harmonic morphisms with 1-dimensional fibres on 4-dimensional Einstein manifolds, Comm. Anal. Geom., 10 (2002) 779-814.
[P3] R. Pantilie, Harmonic morphisms between Weyl spaces, Proceedings of the Seventh International Workshop on Differential Geometry and Its Applications, Deva, Romania, 5-11 September 2005, (to appear).
[PW1] R. Pantilie, J.C. Wood, Harmonic morphisms with one-dimensional fibres on Einstein manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 354 (2002) 4229-4243.
[PW2] R. Pantilie, J.C. Wood, A new construction of Einstein self-dual manifolds, Asian J. Math., 6 (2002) 337-348.
[PW3] R. Pantilie, J.C. Wood, Twistorial harmonic morphisms with one-dimensional fibres on self-dual four-manifolds, Q. J. Math. (Oxford), (in press).

[Pen1] R. Penrose, Twistor quantization and curved space-time, Int. J. Theor. Physics, (1969), 61-99.

[Pen2] R. Penrose, Solutions of zero mass equations, J. Math. Physics 19 (1969).

[R] J.H. Rawnsley, F-structures, F-twistor spaces and harmonic maps, Lect. Notes Math. 1164, 85-159 (1985).

[S] S. Salamon, Riemannian geometry and holonomy groups, Pitman Research Notes in Math. Series 201, Harlow: Longman Scientific & Technical; New York: John Wiley & Sons. 2000.

[T] C.C. Tsai: The Penrose transform for Einstein-Weyl and related spaces, Ph.D thesis, University of Edinburgh, 1996.

[Z] T. Zamfirescu, Many endpoints and few interior points of geodesics, Invent. Math., 69 (1982) 253-257.

[YK] K. Yano, M. Kon, Structures on manifolds, World Scientific, 1984.