

# **SECTIUNEA 1**

## **RAPORTUL STIINTIFIC SI TEHNIC (RST)**

**Denumirea proiectului: Geometrie de contact, complexa si cuaternionica pe varietati conforme si riemanniene. Aplicatii olomorfe si armonice.**

### **FAZA DE EXECUTIE NR. 5**

**la Contract nr. 2-CEX 06-11-22/ 25.07.06**

**CU TITLUL "*Olomorfie in geometria complexa generalizata, morfisme pseudo armonice*"**

- RST – raport stiintific si tehnic in extenso\***
- PVAI – proces verbal de avizare interna**

Universitatea din Bucuresti  
Facultatea de Matematica si Informatica

Avizat Rector  
Prof.dr.Ioan Panzaru

## **Raportul Stiintific si Tehnic (RST)**

### **Raportul de cercetare in extenso**

#### **Cuprins**

Raportul de cercetare in extenso cuprinde:

1. Obiectivele generale planificate pentru etapa,
2. Rezumatul etapei,
3. Descrierea stiintifica si tehnica, cu punerea in evidenta a rezultatelor etapei si gradul de realizare a obiectivelor; (se indica rezultatele)
4. Stadiul realizării obiectivului planificat/forma de finalizare (a activității în cadrul fazei):
5. Bibliografie.

#### **Obiectivele generale planificate**

Studiul armonicitatii aplicatiilor olomorfe intre varietati Kahler generalizate.

Obtinerea de rezultate de clasificare pentru morfisme pseudo armonice polinomiale.

Studiul proprietatilor twistoriale ale morfismelor armonice cu fibre unidimensionale definite pe spatii Einstein-Weyl cvadridimensionale.

#### **Rezumatul etapei**

Se demonstreaza cateva rezultate noi asupra hipersuprafetelor "lightlike" reale in varietati paracuaternionice. Se arata ca exista obstructii pentru existenta hipersuprafetelor "lightlike" de curbura sectionala cu acelasi semn peste tot. Se studiaza aplicatiile  $(\sigma, \sigma')$  olomorfe intre doua varietati quaternionic Kahler in cazul cand acestea sunt submersii Riemanniene. Printre altele se demonstreaza ca o submersie quaternionica intre doua varietati quaternionic Kahler este armonica. Se demonstreaza ca o structura Hermitiana Einstein-Weyl pe o varietate complexa compacta este determinata de forma sa volum. Se demonstreaza ca clasele Morse-Novikov si Bott-Chern ale unei varietati Vaisman se anuleaza. De asemenea, pentru orice structura LCK pe o varietate admitand o structura Vaismann, clasa Morse-Novikov se anuleaza. Se studiaza structurile complexe generalizate invariante definite pe un grup Lie. Se determina proprietati geometrice ale varietatilor Grassmann si ale complexificatelor lor intr-un cadru infinit dimensional. Sunt investigate aplicatiile biarmonice ce se pot gasi in clasa aplicatiilor analitice si

bianalitice. Este studiată geometria, integrabilitatea și posibilitatea liniarizării unui sistem Hamiltonian asociat unei structuri de algebra Lie pe spațiul matricilor  $n \times n$  simetrice, determinată, în mod natural, de o matrice fixată. Aplicațiile între varietăți Riemanniene ce sunt submersii pe o submultime densă sunt studiate cu ajutorul valorilor proprii ale pull-back-ului metricii de pe codomeniu. Studiul aplicațiilor orizontal slab pseudo conforme este aplicat pentru modelul Faddeev-Hopf generalizat. Ecuațiile Euler-Lagrange asociate s<sup>2</sup>-energiei corespunzând hamiltonianului static al modelelor Faddeev-Hopf și Skyrme sunt studiate, cu exemple interesante din punct de vedere geometric și fizic.

**Descrierea științifică și tehnică, cu punerea în evidență a rezultatelor fazei și gradul de realizare a obiectivelor; (se vor indica rezultatele)**

Este bine cunoscut că hipersuprafețele “lightlike” sunt foarte importante în fizica matematică în special în teoria relativității generalizate și a electromagnetismului. Teoria generală a subvarietăților “lightlike” a fost inițiată de Kupelli [1] și Bejancu-Duggal [2]. În lucrarea [3] Ianus, Mazzoco și Vilcu au inițiat studiul hipersuprafețelor “lightlike” reale în varietăți paracuaternionice. În articolul [4] Ianus, Mazzoco și Vilcu demonstrează câteva rezultate noi asupra hipersuprafețelor “lightlike” reale în varietăți paracuaternionice. Se arată că există obstrucții pentru existența hipersuprafețelor “lightlike” de curbura sectională cu același semn peste tot. Sunt date și exemple de astfel de obiecte geometrice în spațiul  $R^4$ . Rezultatele au fost publicate în articolul [4] (revista cotată ISI).

În articolul [6] autorii au introdus noțiunea de aplicație  $(\sigma, \sigma')$  olomorfa între două varietăți Hermitiene aproape quaternionice. A fost demonstrat că astfel de aplicații (cu niste proprietăți suplimentare) între două varietăți quaternionice Kahler sunt armonice și au fost date câteva condiții de stabilitate. În articolul [5] autorii studiază aplicațiile  $(\sigma, \sigma')$  olomorfe în cazul când acestea sunt submersii Riemanniene. Printre altele se demonstrează că o submersie quaternionice între două varietăți quaternionice Kahler este armonice. În acest articol au fost obținute exemple folosind geometria fibrarilor tangente cu metrici canonice. Rezultatele au fost publicate în articolul [5] (revista cotată ISI). Vezi <http://www.springerlink.com/content/r7866t1286770117/>

O varietate Hermitiană Einstein-Weyl este o varietate complexă ce admite o acoperire Kahler Ricci plată  $M$ , în grupul deck acționează prin omotetii. Dacă este compactă admite o metrică Vaisman (rezultat demonstrat de Gauduchon). În articolul [7] autorii demonstrează că o structură Hermitiană Einstein-Weyl pe o varietate complexă compactă este determinată de forma sa volum. Acest rezultat este un analog conform al teoremei Calabi. Este demonstrat că soluția

versiunii conforme a ecuatiei Monge-Ampere este unica. Rezultatele au fost publicate in articolul [7] (revista cotate ISI).

O varietate local conform Kahler (LCK) este o varietate complexa admitand o acoperire Kahler, avand monodromia actionand in aceasta acoperire prin omotetii olomorfe. In articolul [9] autorii definesc trei invarianti, clasa Lee, clasa Morse-Novikov si clasa Bott-Chern a structurii LCK. Acesti invarianti joaca acelasi rol ca si clasa Kahler din geometria Kahler. Daca aceste clase coincid pentru doua structuri LCK, diferenta dintre aceste structuri poate fi exprimata printr-un potential diferentiabil, ca in cazul Kahler. Se demonstreaza ca clasele Morse-Novikov si Bott-Chern ale unei varietati Vaisman se anuleaza. De asemenea, pentru orice structura LCK pe o varietate admitand o structura Vaisman, clasa Morse-Novikov se anuleaza. Rezultatele au fost publicate in articolul [9] ( articol trimis spre publicare intr-o revista cotate ISI).

In lucrarea [AD] D. Alekseevsky si L. David au demonstrat ca structurile complexe generalizate invariante definite pe un grup Lie sunt in corespondenta bijectiva cu structurile complexe obisnuite, invariante, pe grupul cotangent a lui  $G$ . De asemenea, au elaborat o descriere algebrica a tuturor structurilor complexe invariante definite pe grupuri Lie compacte si au demonstrat ca structurile Kahler generalizate invariante definite pe spatii flag se reduc la structurile Kahler obisnuite.

In lucrarea [BG] de D. Beltita si J.E. Gale sunt studiate proprietati geometrice ale varietatilor Grassmann si ale complexificatelor lor intr-un cadru infinit dimensional. Pe aceste varietati complexificate sunt construite structuri specifice de tip cuaternionic, utilizand o metoda directa ce nu face apel la fibratele cotangente. Aceasta lucrare extinde o sectiune introdusa initial intr-o versiune preliminara a articolului [D. Beltita si J.E. Gale, *Holomorphic geometric models for representations of  $C^*$ -algebras*, Journal of Functional Analysis (in curs de publicare)], articol predat intr-o etapa anterioara.

M. Benyounes, E. Loubeau si R. Slobodeanu investigheaza in lucrarea [BLS] aplicatiile biarmonice ce se pot gasi in clasa aplicatiilor analitice si bianalitice (o notiune introdusa de autori).

V. Brinzanescu a elaborat, in colaborare cu A. M. Bloch, A. Iserles, J. E. Marsden si T. S. Ratiu, lucrarea [BBIMR]. In aceasta lucrare este studiat geometria, integrabilitatea si posibilitatea liniarizarii unui sistem Hamiltonian asociat unei structuri de algebra Lie pe spatiul matricilor  $n \times n$  simetrice, determinata, in mod natural, de o matrice fixata  $N$ . Unul dintre rezultatele obtinute este demonstrarea integrabilitatii acestui sistem in lungul unei foi simplectice generice a structurii Lie-Poisson, canonic asociata. De asemenea, in cazul cind  $N$  este inversabila se arata ca sistemul este determinat de reducerea unui flux geodezic pe grupul  $Sp(n, N^{-1})$ . Daca, in plus, valorile proprii ale lui  $N$  sunt distincte atunci sistemul studiat este echivalent cu un sistem de tip Mischenko-Fomenko, obtinandu-se astfel o noua demonstratie a integrabilitatii acestui tip de sistem. In aceleasi ipoteze se arata ca fluxul geodezic corespunzator, pe spatiul matricilor simetrice, este liniarizat pe subvarietatea Prym a Jacobianului curbei spectrale asociate unei familii de tip Lax cu parametru a sistemului.

Aplicatiile intre varietati Riemanniene ce sunt submersii pe o submultime densa sunt studiate de catre E. Loubeau si R. Slobodeanu in lucrarea [LS], cu ajutorul valorilor proprii ale pull-back-ului metricii de pe codomeniu. Derivatele acestor valori proprii furnizeaza caracterizarea armonicitatii, a total geodezicitatii si a schimbarilor biconforme de metrica ce pastreaza armonicitatea. O lema de tip Schwarz pentru morfisme pseudo armonice este demonstrata utilizind dilatatarea data de raportul valorilor proprii si, in dimensiune 5, o tehnica de tip Bochner ne da conditii pentru ca un morfism pseudo armonic sa fie aplicatie semiconforma.

In lucrarea [SI-1] R. Slobodeanu studiaza aplicatiile orizontal slab pseudo conforme (PHWC) introduse de Loubeau in 1997. Acestea extind atit aplicatiile olomorfe cit si pe cele semiconforme, cu valori intr-o varietate Hermitiana. In aceasta clasa mai larga de aplicatii gasim familii de puncte critice (stabile) pentru modelul Faddeev-Hopf generalizat propus in [Speight & Svensson '07], generalizind anumite rezultate demonstrate in acestia din urma.

Termenii de grad superior (in derivatele aplicatiei) ce apar in hamiltonianul static al modelelor Faddeev-Hopf si Skyrme corespund s<sup>2</sup>-energiei, introduse de Eells si Sampson in 1964. In articolul [SI-2] R. Slobodeanu prezinta un studiu detaliat al ecuatiilor Euler-Lagrange asociate acestei energii si al celei dea doua formule variationale. De asemenea, sunt tratate citeva exemple interesante din punct de vedere geometric si fizic.

Obiectivele propuse au fost indeplinite in mod integral, noi directii de studiu au fost abordate.

Dr. Radu Pantilie a efectuat, in perioada 13.07.2008 – 27.07.2008, o vizita de colaborare stiintifica la Universitatea "La Sapienza" din Roma. Acolo a studiat, in colaborare cu Prof. S. Marchiafava, proprietatile twistoriale ale unor structure geometrice ce includ, drept cazuri particulare, spatiile Einstein-Weyl tridimensionale precum si varietatile cuaternionice.

De asemenea, Dr. Radu Pantilie a facut o expunere, in cadrul unuia dintre seminariile stiintifice ale departamentului de matematica, cu titlul "On a class of twistorial maps".

In luna iunie L. Ornea s-a deplasat in Italia la Pisa (Institutul Ennio de Giorgi ), Parma, Firenze si Pescara unde a tinut conferintele "Topology of lck manifolds" si "Equidecomposability and Hilbert's 3rd problem".

In lunile iulie, august si septembrie A. Halanay s-a deplasat in Franta (Paris+Lille) si Germania (Kaiserslautern) unde a studiat in vederea finalizarii tezei de doctorat si a colaborat cu Prof. G. Trautmann la finalizarea unei lucrari stiintifice.

G.Vilcu s-a deplasat la conferinta The XVIIth International Colloquium on Integrable Systems and Quantum symmetries (ISQS-17), June 19-22, 2008, Prague, Czech Republic.

C.Gherghe a participat la Conferinta *The VIII International Colloquium on Differential Geometry* in perioada 6.07.2008-12.07.2008. Domnul Gherghe a sustinut expunerea "Harmonic maps on cosymplectic manifolds".

C. Gherghe a participat la *The 5-th European Congress of Mathematics -Amsderdam* in perioada 13.07.2008-19.07.2008 in continuarea *The VIII International Colloquium on Differential Geometry*, conferinta satelit a Congresului.

S.Ianus a participat la Conferinta *The VIII International Colloquium on Differential Geometry* in perioada 6.07.2008-12.07.2008. Domnul Ianus a sustinut expunerea "Paraquaternionic manifolds and mixed 3-structure".

S.Ianus a a participat la *The 5-th European Congress of Mathematics -Amsderdam* in perioada 13.07.2008-19.07.2008 in continuarea *The VIII International Colloquium on Differential Geometry*, conferinta satelit a Congresului.

In perioada 15.08.2008 -- 03.09.2008, Dr. Monica A. Aprodu a efectuat o vizita la H.I.M. Bonn. Acesta vizita face parte dintr-un proiect de lunga durata ce are drept scop final dezvoltarea, impreuna cu Prof. Matthias Kreck, unei teorii metrice pentru stratifolduri. Stratifoldurile au fost introduse de M. Kreck si reprezinta un model de spatii singulare mai generale decat spatiile Whitney. In timpul vizitei s-a gasit o definitie coerenta si satisfacatoare pentru metrice Riemanniene pe un stratifold (modificand definitia obtinuta anterior, in timpul ultimei vizite la Bonn), s-a demonstrat ca orice stratifold admite o metrica Riemanniana, s-a definit lungimea unui arc de curba neteda pe portiuni si s-a demonstrat buna definire si s-a aratat ca lungimea geodezica este bine definita si induce o structura de spatiu metric pe stratifoldul de definitie. Topologia initiala coincide cu topologia indusa de structura de spatiu metric. Toate aceste rezultate extind rezultatele obtinute de catre Pflaum pe spatii Whitney.

Dr. M. A. Aprodu a efectuat si deplasari interne, intre Galati si Bucuresti, pentru a participa la seminarul stiintific de geometrie diferentiaa al IMAR si la finalizarea grantului.

In perioada 20.09.2008 -- 27.09.2008 Dr. Liana David s-a deplasat la Edinburgh, unde a lucrat cu Prof. D. Alekseevsky de la Universitatea din Edinburgh la un articol despre structuri complexe generalizate si structuri Kaehler generalizate pe grupuri Lie si spatii flag.

## **Concluzii**

Obiectivele propuse au fost indeplinite in mod integral, noi directii de studiu au fost abordate.

Au fost elaborate unsprezece lucrari stiintifice ce contin rezultatele obtinute: trei aparute in reviste ISI una este acceptata pentru publicare, cinci sunt trimise spre publicare, iar doua sunt in curs de finalizare.

## Bibliografie

[AD] D. Alekseevsky si L. David, *Invariant generalized complex and Kahler structures on Lie groups*, preprint

[BG] D. Beltita si J. E. Gale, *On complex infinite-dimensional Grassmann manifolds*, Complex Analysis and Operator Theory (in curs de publicare). (Online: <http://dx.doi.org/10.1007/s11785-008-0077-7>); <http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2008/rep08-10.pdf>

[BLS] M. Benyounes, E. Loubeau si R. Slobodeanu, *Biharmonic and bianalytic maps*, preprint

[BBIMR] A. M. Bloch, V. Brinzanescu, A. Iserles, J. E. Marsden si T. S. Ratiu, *A Class of Integrable Flows on the Space of Symmetric Matrices*, trimisa spre publicare

[LS] E. Loubeau si R. Slobodeanu, *Eigenvalues of harmonic almost submersions*, arXiv:0809.1656v1 [math.DG], trimisa spre publicare

[SI-1] R. Slobodeanu, *A special class of holomorphic mappings and the Faddeev-Hopf model*, arXiv:0802.1626 [math.DG], trimisa spre publicare

[SI-2] R. Slobodeanu, *On the geometrized Skyrme and Faddeev models*, trimisa spre publicare

Director de proiect  
Prof.dr.S.Ianus