

UNIVERSITATEA DIN BUCURESTI

Avizat

Rector,

Prof.Univ. Dr. Ioan Panzaru

RAPORT DE CERCETARE

Denumirea proiectului: Geometrie de contact, complexa si cuaternionica pe varietati conforme si riemanniene. Aplicatii olomorfe si armonice.

Denumirea etapei: Subvarietati si submersii in geometria cuaternionica, reprezentari de grupuri Lie-Banach, interpretarea twistoriala a conexiunilor Weyl pe 3-varietati conforme.

Perioada acoperita: 01.06.2007-30.11.2007

Obiective Propuse :

- 1.Studiul curburii subvarietatilor in varietati paracuaternionic Kahler ce admit pseudo-Sasaki 3-structuri.
2. Construirea de spatii omogene complexe si realizari geometrice pentru reprezentari de grupuri Lie-Banach
3. Determinarea unei interpretari twistoriale ale conexiunilor Weyl definite pe o varietate conforma 3-dimensională.

Rezumatul activitatilor fazei :

Prof.dr. Liviu Ornea a efectuat doua vizite –una la Universitatea Independenta din Moscova, cealalta la Universitatea din Glasgow-ambele la invitatia profesorului M.Verbitsky cu care are o fructuoasa colaborare concretizata intr-un numar important de articole aparute deja, precum si in proiecte legate de tematica generala a prezentului contract.

Prof.dr. Steriu Ianus participat la conferintele internationale « Riemannian Geometry and Applications » ,Brasov 21-26.06 si la Conferinta in onoarea Prof.Tudor Zamfirescu la Dortmund(Germania) 15-18.09. La aceste conferinte Prof.Ianus a avut contacte stiintifice cu reputati specialisti in domeniu. Deasemenea Prof.dr. S. Ianus a fost invitat in perioada 1-14.11 la Universitatea din Bari (Italia) unde a participat la sustinerea unor teze de doctorat in domeniul varietatilor quaternion-Kahler si para-quaternionKahler.

Conf.dr. Catalin Gherghe a fost invitat in perioada 27.10-11.11 la Universitatea Potenza (Italia) de profesorul Sorin Dragomir lucrind impreuna la studiul operatorilor diferentiali pe varietati de tip quaternion-Kahler.

Lect.dr. Gabriel Vilcu a participat alaturi de domnul profesor S.Ianus la conferinta de la Dortmund, precum si la Conferinta « Algebra, Geometry, and Mathematical Physics » la Universitatea din Goteborg (Suedia) unde a sustinut comunicarea cu titlul « Almost parahyperhermitian manifolds and mixed 3-structures ».

Asist. Andrei Halanay a participat la ciclul de lectii « Electric-Magnetic Duality and the Geometric Langland's Programme » tinut de A. Kapustin (Univ.Berkeley California, SUA) la Universitatea din Aarhus(Danemarca). Tematica lectiilor se inscrie in tematica mai larga a interactiunii intre fizica particulelor elementare si matematica.

Dr. R. Pantilie a efectuat in perioada 23 septembrie – 7 octombrie 2007 o vizita de colaborare stiintifica la Universitatea din Roma, “La Sapienza”. El a studiat, in colaborare cu Prof. S. Marchiafava, proprietatile aplicatiilor twistoriale intre varietati cuaternionice. S-a continuat astfel un proiect de cercetare la care participa, deasemenea, Prof. S. Ianus si Prof. L. Ornea de la Universitatea din Bucuresti. Rezultatele obtinute vor face obiectul unei lucrari stiintifice aflate in pregatire. De asemenea, a facut doua expuneri, in cadrul unuia dintre seminariile stiintifice ale departamentului de matematica, cu titlul “Harmonic morphisms and twistorial maps I, II”.

Dr. L. David si Dr. M. A. Aprodu au participat in perioada 19 august - 25 august 2007 la conferinta “8th International Workshop on Differential Geometry and Its Applications”, organizata la Cluj de IMAR Bucuresti in colaborare cu Univ. Babes-Bolyai. In cadrul acesteia Dr. L. David a tinut o prezentare cu titlul “Quaternionic connections, induced holomorphic structures and a vanishing theorem”, iar Dr. M. A. Aprodu a tinut o prezentare cu titlul “Aplicatii armonice pe poliedre Riemanniene”.

Dr. M. A. Aprodu a participat in perioada 15 iulie – 18 iulie 2007 la conferinta internationala “[Viertes Deutsch-Rumänisches Seminar über Geometrie](#)”, organizata la Dortmund de [universitatea din localitate si IMAR Bucuresti](#). La aceasta conferinta a prezentat o expunere cu tema “Aplicatii armonice pe poliedre Riemanniene”.

In perioada 01 august -15 august 2007, Dr. M. A. Aprodu a efectuat o vizita la Universitatea Köln. Scopul deplasarii a fost stabilirea unor contacte stiintifice si demararea unor proiecte stiintifice in Geometria Riemanniana. In timpul deplasarii am discutat cu Prof. S. Kebekus despre posibilitatea obtinerii unor rezultate de tip Cartan-Fubini pentru varietati de contact. In cazul complex, astfel de rezultate se cunosc deja. Tot in aceasta perioada, am discutat cu Prof. M. Kreck despre extinderea teoriei aplicatiilor armonice la cazul spatiilor cu singularitati. O astfel de extindere a fost deja realizata de catre Korevaar si Schoen la cazul poliedrelor Riemanniene. Prof. Kreck a introdus de curand notiunea de *stratifold* care este mai generala decat cea de poliedru. In acest an, a dezvoltat o teorie a stratifoldurilor Riemanniene, ceea ce deschide calea dezvoltarii unei teorii de aplicatii armonice pe stratifolduri. Acesta este inceputul unui proiect de lunga durata.

Dr. C. Vilcu a participat in perioada 14 iulie -19 iulie 2007 la “10th International Conference on Discrete Mathematics”, unde a avut o expunere intitulata “Locating farthest points on convex surfaces”, in care a prezentat rezultate recente obtinute in geometria punctelor critice pe suprafete convexe. Discutiile cu alti participanti la conferinta sau la simpozionul romano-german de geometrie s-au dovedit foarte utile pentru dezvoltarea tematicii de cercetare.

REZULTATE OBTINUTE :

Gabriel Vilcu si S.Ianus au obtinut in lucrarile [IMV] si [IV] au urmatoarele rezultate :

- conditii necesare si suficiente pentru ca o hipersuprafata de tip "lumina" intr-o varietate paracuaternionica Kahler sa fie total geodezica ;
- conditii necesare si suficiente pentru ca distributia canonica a unei hipersuprafate de tip "lumina" intr-o varietate paracuaternionica Kähler sa fie integrabila;
- s-a demonstrat inexistenta hipersuprafetelor de tip "lumina" avand curbura Ricci; pozitiva sau negativa in forme spatiale paracuaternionice neplate;
- s-a aratat ca varietatile inzestrate cu 3 structuri mixte de tip Sasaki sunt Einstein;
- s-au obtinut clase de varietati ce admit 3-structuri mixte de tip Sasaki;
- s-a obtinut o corelatie intre 3 structuri mixte de tip Sasaki si varietatile paracuaternionice Kähler;
- s-a aratat ca o subvarietate paracuaternionica de curbura invarianta in varietatea produs a doua varietati paracuaternionice Kähler avand curbura sectional paracuaternionica constanta c este o subvarietate F -invarianta sau F -antiinvarianta; Obiectivele stiintifice fiind integral atinse.

Unul dintre scopurile lucrarii elaborate de D.Beltita in cadrul prezentului contract este de a extinde teoria geometrica a reprezentarilor de grupuri Lie-Banach, de la grupurile unitare ale algebrelor de operatori la cadrul complex al al grupurilor de elemente inversabile. Pentru aceasta avem nevoie de o metoda de a realiza spatiul reprezentarii ca spatiu Hilbert de sectiuni intr-un fibrat vectorial oloform. Imitarea argumentelor din articolul [BR07] conduce la dificultati legate de construirea unor nuclee reproducatoare adecvate, deoarece elementelor inversabile generale dintr-o algebra de operatori le lipsesc o serie de proprietati specifice elementelor unitare. Aceasta problema poate fi ocolita cu ajutorul unui anumit difeomorfism involutiv pe baza fibratului considerat, dar in acest mod fibratul vectorial isi pierde proprietatea de a fi hermitic.

Se poate vedea astfel ca, pentru a aborda problema mai sus mentionata, este necesara dezvoltarea unei teorii speciale aplicabile nucleelor reproducatoare pe fibrate vectoriale. Pentru aceasta, in lucrare se introduce in primul rand o variatie a notiunii de fibrat vectorial Hermitic adaptata scopurilor avute in vedere. Baza unui astfel de fibrat este echipata cu un difeomorfism involutiv, astfel ca pasul imediat urmator al investigatiei consta in descoperirea unei clase de nuclee reproducatoare compatibile cu involutia respectiva. Acestea vor fi numite (-*)-nuclee reproducatoare. In lucrare se discuta detaliat despre exemple de astfel de fibrate si (-*)-nuclee reproducatoare pe spatii omogene ale unor grupuri Lie-Banach complexe. Aceste exemple joaca un rol crucial in principalele noastre constructii de modele geometrice pentru reprezentari.

Legatura cu spatiile omogene ale grupurilor unitare (ale caror proprietati geometrice sunt expuse in [Be06]) se stabileste prin aplicarea unor tehnici inspirate din complexificarea spatiilor omogene compacte. Este remarcabil ca, utilizand o teorema de descompunere polara din articolul [PR94], se poate pune in evidenta ca un spatiu omogen al unui grup de elemente inversabile intr-o algebra de operatori este echivariant difeomorf cu fibratul tangent al spatiului omogen corespunzator al grupului unitar. Acest fenomen infinit-dimensional este similar cu anumite proprietati binecunoscute ale anumitor varietati complexificate ale spatiilor omogene de tip compact. De aici rezulta ca, in anumite privinte, spatiile omogene ale

grupurilor unitare ale algebrelor de operatori constituie variantele infinite dimensionale ale spatiilor omogene compacte.

Ideile prezentate mai sus pot fi utilizate pentru a studia modele geometrice ale reprezentarilor ce apar ca dilatari Stinespring de aplicatii complet pozitive. In acest mod obtinem de fapt o teorie geometrica a dilatarilor de aplicatii complet pozitive. Pe de alta parte, aceasta permite construirea de noi exemple de reprezentari de grupuri Lie-Banach care admit realizari geometrice de tipul celor studiate in articolul [BR07]. De asemenea, prin calcularea aplicatiei tangente la reprezentarea grupului de elemente inversabile dintr-o algebra de operatori se poate obtine reprezentarea algebrei respective. Aceasta furnizeaza o interpretare geometrica a procedeelelor clasice de extensie si de inductie a reprezentarilor de algebre de operatori.

Pentru a ilustra aria de aplicabilitate a metodelor dezvoltate in aceasta lucrare, in ultima sectiune se discuta o larga varietate de teme: geometria diferentia la a orbitelor de similaritate ale reprezentarilor de algebre nucleare si algebrelor von Neumann injective, complexificarea orbitelor unitare ale sperantelor conditionate, realizari geometrice pentru reprezentari de algebre Cuntz, si de asemenea legaturi cu analiza stocastica necomutativa.

Aceste rezultate sunt continute in lucrarea [BG] ce a fost postata pe internet pe un server de preprinturi matematice.

REFERINTE BIBLIOGRAFICE

[Be06] D.Beltita - "Smooth Homogeneous Structures in Operator Theory", Monogr. and Surveys in Pure and Appl. Math. 137, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton-London-New York-Singapore, 2006.

[BG] D.Beltita, J.E.Gale - Holomorphic geometric models for representations of C^* -algebras, <http://arxiv.org/abs/0707.0806>

[BR07] D.Beltita, T.S.Ratiu - "Geometric representation theory for unitary groups of operator algebras", Adv. in Math. 208(2007), no.1, 299-317

[IMV] S. Ianus, R. Mazzocco, G.E. Vilcu - "Hypersurfaces of paraquaternionic manifolds", preprint

[IV] S. Ianus, G.E. Vilcu - "Some constructions of almost para-hyperhermitian structures on manifolds and tangent bundles", preprint

[PR94] H.Porta, L.Recht - "Conditional expectations and operator decompositions", Ann. Global Anal. Geom. 12(1994), 335-339.

Director de proiect,

Prof.Dr. Steriu Ianus