Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Şcoala Doctorală de Matematică

Inegalități optime pentru invarianți Chen pe subvarietăți

– Rezumatul tezei de doctorat –

Coordonator științific:
Prof. Univ. Dr. Ion MIHAI

Doctorand:
Gabriel-Florin MACSIM

Bucureşti
2019

Cuprins

CAPITOLUL 1

INTRODUCERE

Scopul cercetării doctorale prezente este de a găsi relații între invarianții extrinseci și cei intrinseci ai unei subvarietăți în diverse spații ambient, mai exact de a găsi inegalități care implică diverși invarianți de tip Chen pentru subvarietăți Lagrange, oblice, CR-subvarietăți cuaternionice și QR-subvarietăți în forme spațiale complexe sau cuaternionice.

Începuturile teoriei subvarietăților coincid cu cele ale geometriei diferențiale. A fost studiată încă de la apariția calculului diferențial și a început cu teoria curbelor plane și a suprafețelor. Pierre de Fermat (1601-1665) este considerat ca fiind un inovator în acest domeniu [16]. În prima jumătate a secolului al XVII-lea, geometria diferențială a curbelor plane studia curbura, cercurile de curbură, evolutele, etc. De atunci s-a dezvoltat ca parte semnificativă a calculului diferențial și s-a extins către studii similare în cazul curbelor spațiale și suprafețelor, în particular a liniilor de curbură, geodezicelor pe suprafețe, suprafețe de rotație sau riglate [17].

Euler (1707-1783) a fost primul care a adus contribuții importante în acest domeniu. El introduce în 1736 noțiunea de lungime de arc și rază de curbură. Astfel, inițiază studiul geometriei diferențiale intrinseci a subvarietăților [17].

Geometria intrinsecă a unei suprafețe S în $\mathbb{E}^3$ poate fi determinată din produsul interior euclidian aplicat vectorilor tangenți la S, așa cum a demonstrat C.F. Gauss în teoria sa generală a suprafețelor curbe. Teorema Egregium a lui Gauss demonstrează invarianța curburii Gauss în raport cu deformările izometrice ale suprafețelor din lumea euclidiană. Este un rezultat remarcabil, care a a avut un impact extraordinar asupra dezvoltării ulterioare a matematicii [16]. Această teoremă conduce la diferența dintre caracteristicile intrinseci și cele extrinseci ale suprafețelor. Există două cantități esențiale ale unei suprafețe din spațiul 3-dimensional euclidian: curbura medie și curbura Gauss. Curbura medie este principalul invariant extrinsec și măsoară tensiunea suprafeței, datorată spațiului ambient [16].

În celebra sa prelegere inaugurală de la Göttingen (1854), Bernhard Riemann a dezbătut problema fundamentelor geometriei. El este cel care introduce noțiunea de varietate $n-$dimensională, formulează conceptul de varietate Riemann și definește curbura unui astfel de spațiu. Mai târziu, toate acestea vor constitui fundamentul matematic al teoriei generale a relativității a lui Einstein (1915). Alte generalizări au apărut: condiția de pozitivitate a produsului interior a fost slăbită la cea de nondegenerare, s-a dezvoltat noțiunea de varietăți pseudo-riemanniene. Inspirați de teoria stringurilor și teoria Kaluza-Klein, matematicienii și fizicienii au început să studieze nu doar subvarietățile varietăților Riemann, ci și pe cele ale varietăților pseudo-riemanniene [17].

Așa cum sugerează S.S. Chern în prelegerea sa din 1970 de la congresul internațional al matematicienilor de la Nice, geometria riemanniană constituie teoria geometriei diferențiale moderne. Invarianții Riemann reprezintă caracteristicile intrinseci ale varietăților Riemann. Așa cum M. Berger a spus [8]: *"Invarianții de curbură reprezintă principalii invarianți Riemann și cei mai naturali. Gauss și Riemann și-au dat imediat seama de acest lucru."* Acești invarianți constituie un fel de ADN riemannian care influențează "comportamentul" varietății Riemann și au câteva conexiuni interesante cu multe domenii ale matematicii. De exemplu, ei determină noi obstrucții ale imersiilor izometrice minimale și Lagrange, sau au o legătură strânsă cu prima valoare proprie nenulă a Laplacianului pe o varietate Riemanniană.

Acești invarianți joacă de asemenea un rol important în fizică. De exemplu, mișcarea unui corp într-un câmp gravitațional este guvernată de curbura spațiu-timpului, conform lui Einstein. Curbura spațiu-timpului este esențială în cazul poziționării unui satelit pe o orbită în jurul pământului. Mărimea unei forțe necesare pentru a deplasa un obiect cu o viteză constantă, conform legilor lui Newton, este un multiplu constant al curburii traiectoriei. De la bulele de săpun, suprafața valurilor și cochiliile melcilor, la celulele roșii din sânge, tot felul de forme par a fi guvernate de diverse curburi [46], [16].

Geometria diferențială a suprafețelor din spații euclidiene 3-dimensionale a fost generalizată la subvarietăți de dimensiune superioară în varietăți Riemann. Una dintre problemele cele mai importante în teoria subvarietăților este cea a imersibilității (sau non-imersibilității) unei varietăți Riemann într-o formă spațială sau, mai exact, într-un spațiu euclidian [13]. Conform binecunoscutei teoreme de scufundare a lui J.F. Nash publicată în 1956 [43], orice varietate Riemann poate fi scufundată izometric într-un spațiu euclidian cu codimensiunea suficient de mare. Avem astfel oportunitatea de a considera varietățile Riemann drept subvarietăți Riemann ale unor spații euclidiene și, mai ales, de a folosi mijloace extrinseci pentru a obține rezultate privind caracteristici intrinseci. Această problemă nu a fost rezolvată până în 1985. Conform lui M. Gromov, principalul argument a fost lipsa controlului asupra proprietăților extrinseci ale subvarietății, folosind invarianții intrinseci. În cazul problemei scufundării este natural să impunem anumite condiții asupra imersiilor, de exemplu, să fie îndeplinită condiția de minimalitate, care conduce către următoarea problemă:

Dându-se o varietate Riemann M, care sunt condițiile necesare pentru M astfel încât să admită o imersie izometrică minimală într-un m-spațiu euclidian $\mathbb{E}^m$? [17]

Mult timp singurele condiții necesare cunoscute pentru ca o varietate Riemann să admită o imersie izometrică minimală într-un spațiu euclidian cu codimensiunea arbitrară au fost acelea ca varietatea Riemann să nu fie compactă și tensorul Ricci să satisfacă relația $\mathrm{Ric} \leq 0$. Acesta a fost și motivul pentru care S.S. Chern a propus în monografia sa din 1968 găsirea unor alte condiții Riemann pentru ca M să admită imersii izometrice minimale într-un spațiu euclidian.

O altă problemă principală în teoria subvarietăților este cea a stabilirii unor relații simple între principalii invarianți intrinseci și cei extrinseci ai unei subvarietăți [17]. Nicio soluție la această problemă și problema lui Chern nu au fost cunoscute mulți ani înainte ca B.-Y. Chen să introducă la începutul anilor '90 noi tipuri de invarianți Riemannian, așa numiții $\delta-$invarianții de curbură. Distincți de clasicele curburi Ricci și scalară, ambele fiind "suma totală" a curburilor secționale ale unei varietăți Riemann, δ-invarianții se obțin eliminând o anumită parte dintre curburile secționale din curbura scalară [45]. Chen a putut, de asemenea, să formuleze relații optime generale între acești δ-invarianți și principalii invarianți extrinseci ai unei subvarietăți Riemann.

De-a lungul timpului, mulți dintre matematicieni au studiat δ-invarianții. De exemplu, în [14] B.-Y. Chen stabilește inegalități în cazul subvarietăților în forme spațiale complexe. J.S. Kim, Y.M. Song și M.M. Tripathi au studiat acești invarianți în cazul formelor spațiale complexe generalizate ([28]) și mai târziu, P. Alegre, A. Carriazo, Y.H. Kim și D.W. Yoon ([1]) au studiat δ-invarianții în cazul formelor spațiale compleze generalizate și formelor spațiale Sasaki generalizate, cu codimensiune arbitrară. K. Arslan, R. Ezentas, I. Mihai, C. Murathan și C. Ozgur ([3], [4]) au studiat δ-invarianții pentru subvarietăți în varietăți aproape cosimplectice local conforme și (k, μ)-forme spațiale de contact.

În lucrarea de față sunt prezentate contribuțiile personale la studiul inegalităților care implică δ-invarianți în cazul subvarietăților Lagrange în forme spațiale complexe, respectiv subvarietăților Lagrange, CR-subvarietăților cuaternionice și QR-subvarietăților în forme spațiale cuaternionice.

CAPITOLUL 2

VARIETĂŢI COMPLEXE

2.1 Varietăţi complexe

În această secțiune reamintim noțiuni fundamentale legate de forme spațiale complexe și sunt prezentate câteva exemple și rezultate importante.

Notăm prin $\chi(\tilde{M})$ mulțimea tuturor cîmpurilor vectoriale (diferențiabile) și prin $T_p\tilde{M}$, $T_p^{\perp}\tilde{M}$ fibratul tangent, respectiv normal ale lui $\tilde{M}$ în $p \in \tilde{M}$.

Numim *varietate complexă* n-dimensională un spațiu topologic, separat Hausdorff, pe care se poate introduce un atlas cu modelul $\mathbb{C}^n$ astfel încât schimbările de hărți locale sunt date de aplicații olomorfe între deschișii din $\mathbb{C}^n$.

Fie $\tilde{M}$ o varietate diferențiabilă. Un endomorfism J definit pe fibratul tangent $T\tilde{M}$, $J_p : T_p\tilde{M} \to T_p\tilde{M}$ aplicație liniară, cu proprietatea că $J_p^2 = -1_{T_p\tilde{M}}$, $\forall p \in \tilde{M}$, se numește *structură aproape complexă* pe $\tilde{M}$. $\tilde{M}$ înzestrat cu structura aproape complexă J se numește *varietate aproape complexă*.

Următoarele teoreme sunt cunoscute.

Teoremă 2.1: [41]. *Orice varietate aproape complexă are dimensiune pară și este orientabilă.*

Teoremă 2.2: [41]. *Orice varietate complexă admite o structură aproape complexă.*

Dacă $(\tilde{M}, J)$ este o varietate aproape complexă, o metrică hermitiană pe $\tilde{M}$ este o metrică Riemann g, J-invariantă, i.e.,

$$g(JX, JY) = g(X, Y),\ \forall X, Y \in \Gamma T\tilde{M}.$$

Se demonstrează ușor că

Teoremă 2.3: [41]. *Orice varietate aproape complexă admite o metrică hermitiană.*

Dacă $(\tilde{M}, J)$ este o varietate aproape complexă, o metrică hermitiană g pe $\tilde{M}$ definește o 2-formă nedegenerată ω, dată prin $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$, $X, Y \in \Gamma T\tilde{M}$, numită *2-forma fundamentală*. Este evident că $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$.

O varietate (aproape) complexă înzestrată cu o metrică hermitiană se numește *varietate (aproape) Kähler* dacă 2-forma fundamentală ω este închisă, i.e. $d\omega = 0$.

2.2 Subvarietăți Lagrange în forme spațiale complexe

Fie $\tilde{M}^m$ o varietate Kähler de dimensiune complexă m înzestrată cu structura aproape complexă canonică J, $J_p : T_p\tilde{M} \to T_p\tilde{M}$, $p \in M$, o metrică hermitiană $\tilde{g}$, și $f : M^n \to \tilde{M}^m$ o imersie izometrică a unei varietăți n-dimensionale M^n în $\tilde{M}^m$.

Dacă $X \in T_p\tilde{M}$, putem scrie $JX = PX + FX$, unde $PX \in T_pM$, $FX \in T_p^{\perp}M$, $P : TM \to TM$, $F : TM \to T^{\perp}M$.

M se numește *subvarietate complexă* idacă $J(T_pM) = T_pM$ (i.e., $F = 0$).

Subvarietatea M^n se numește *subvarietate total reală* dacă $J(T_pM^n) \subset T_p^{\perp}M^n$, $\forall p \in M^n$. O subvarietate total reală de dimensiune maximă, i.e., $\dim_{\mathbb{R}} M^n = \dim_{\mathbb{C}} \tilde{M}^n = n$, se numește *subvarietate Lagrange*.

În [11], B.-Y. Chen introduce noțiunea de subvarietate oblică. O *subvarietate oblică* este o subvarietate M a unei varietăți Kähler $\tilde{M}$ astfel încât, pentru orice vector nenul $X \in T_pM$, unghiul $\theta(X)$ (numit *unghiul Wirtinger* al lui X) dintre JX și spațiul tangent T_pM este o constantă (independentă de alegerea punctului $p \in M$ și de cea a vectorului tangent $X \in T_pM$). Unghiul Wirtinger al unei subvarietăți oblice se numește *unghiul oblic* al subvarietății oblice respective.

Este evident că subvarietățile complexe și total reale sunt de fapt subvarietăți oblice cu $\theta = 0$, respectiv $\theta = \frac{\pi}{2}$.

O subvarietate oblică se numește *proprie* dacă nu este nici complexă, nici total reală.

Dacă endomorfismul canonic P definit mai sus este paralel, adică $\nabla P = 0$, o subvarietate oblică proprie se va numi *oblică Kähler*.

Fie $\tilde{M}$ o varietate Kähler și $M \subset \tilde{M}$ o subvarietate.

Notăm prin $\mathcal{H}_p = T_pM \bigcap J(T_pM) \subset T_pM$ subspațiul olomorf maximal. $\mathcal{H}$ este J-invariant, i.e. $J\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_p$. M se numește *subvarietate generică* dacă $\dim \mathcal{H}_p$ este o constantă.

Dacă $\tilde{M}$ este o varietate Kähler și $M \subset \tilde{M}$ este o subvarietate generică, atunci M se numește *CR-subvarietate* dacă $J(\mathcal{H}_p^{\perp}) \subset T_p^{\perp}M$.

În cazul în care $\tilde{M}^m$ are curbura secțională olomorfă constantă $4c$, atunci se va numi *formă spațială complexă* și se va nota cu $\tilde{M}^m(4c)$. Tensorul de curbură Riemann al său este dat prin

$$\tilde{R}(X,Y)Z = c[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY + 2g(X,JY)JZ],$$

pentru orice câmpuri vectoriale X, Y, Z tangente la $\tilde{M}^m(4c)$.

2.3 Invarianți Chen

Invarianții Riemannian ai unei varietăți Riemannian reprezintă caracteristicile intrinseci ale acesteia. În această secțiune reamintim o serie de invarianți Riemannian pentru varietăți Riemannian, cunoscuți sub numele de invarianți Chen (see [17]). Teoria acestor invarianți a fost inițiată în [12].

Fie M^n o varietate Riemann n-dimensională și $K(\pi)$ curbura secțională a lui M^n asociată 2-planului $\pi \subset T_pM^n$, $p \in M^n$.

Pentru orice bază ortonormată $\{e_1, ..., e_n\}$ a spațiului tangent T_pM^n, curbura scalară τ în p este definită prin

$$\tau(p) = \sum_{1\le i<j\le n} K(e_i \wedge e_j).$$

Notăm prin

$$(\inf K)(p) = \inf\{K(\pi)|\pi \subset T_pM^n, \dim \pi = 2\}.$$

Primul invariant Chen este dat de formula $\delta_M(p) = \tau(p) - (\inf K)(p)$.

Dacă L este un subspațiu al lui T_pM^n cu dimensiunea $r \ge 2$ iar $\{e_1, ..., e_r\}$ este o bază ortonormată a lui L, curbura scalară $\tau(L)$ a r-planului L se definește prin

$$\tau(L) = \sum_{1\le\alpha<\beta\le r} K(e_\alpha \wedge e_\beta).$$

Pentru $n \ge 3$ și $k \ge 1$, numere naturale date, notăm prin $S(n, k)$ mulțimea finită a tuturor k-uplelor $(n_1, ..., n_k)$ de numere naturale care satisfac $2 \le n_1, ..., n_k < n$, $n_1 + ... + n_k \le n$. Fie $S(n) = \bigcup_{k\ge1} S(n, k)$.

Pentru fiecare $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$ și orice punct $p \in M^n$, B.-Y. Chen introduce un invariant Riemann definit prin

$$\delta(n_1, ..., n_k)(p) = \tau(p) - \inf\{\tau(L_1) + ... + \tau(L_k)\},$$

unde $\{L_1, ..., L_k\}$ este inclusă în mulțimea tuturor subspațiilor mutual ortogonale ale lui T_pM^n astfel încât $\dim L_j = n_j$, $j = 1, ..., k$.

B.-Y. Chen a demonstrat anumite inegalități privind δ_M și $\delta(n_1, ..., n_k)$ pentru subvarietăți în forme spațiale reale, cunoscute sub numele de inegalități Chen.

Teoremă 2.4: [12]. *Fie M^n o subvarietate n-dimensională ($n \ge 3$) a unei forme spațiale reale $\widetilde{M}^m(c)$ cu curbura secțională constantă c. Atunci*

$$\delta_M \le \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + (n+1)c\right\}. \tag{2.1}$$

Cazul de egalitate are loc dacă și numai dacă, în raport cu un reper ortonormat convenabil ales $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m\}$, operatorul Weingarten $A_r = A_{e_r}$, $r = n+1, \dots, m$, al lui M în $\widetilde{M}^m(c)$ are următoarele forme

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu \end{pmatrix}, a + b = \mu; \tag{2.2}$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h^r_{11} & h^r_{12} & 0 & \dots & 0 \\ h^r_{12} & -h^r_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, r = n+2, \dots, m. \tag{2.3}$$

B.-Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen și L. Vrancken [20] au arătat că o inegalitate de același tip are loc și în cazul subvarietăților total reale în forme spațiale complexe.

O inegalitate corespunzătoare pentru subvarietăți oblice în forme spațiale complexe a fost obținută de A. Oiagă și I. Mihai.

Teoremă 2.5: [44]. *Fiind dată o formă spațială complexă m-dimensională $\tilde{M}(4c)$ și o subvarietate θ-oblică M, $\dim M = n,\ n \geq 3$, avem*

$$\delta_M \leq \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + (n+1+3\cos^2\theta)c\right\}. \tag{2.4}$$

Cazul de egalitate are loc dacă există o bază ortonormată pe $\tilde{M}$ astfel încât operatorul Weingarten al lui M ia formele (2.2) și (2.3).

Cu toate acestea, pentru subvarietăți Lagrange în forme spațiale complexe, inegalitatea de mai sus, cunoscută drept prima inegalitate Chen, a fost îmbunătățită de J. Bolton, F. Dillen, J. Fastenakels și L. Vrancken [9]. În plus, A. Mihai [39] optimizează prima inegalitate Chen pentru subvarietăți oblice Kähler în forme spațiale complexe.

Teoremă 2.6: [9]. *Fie M o subvarietate Lagrange a unei forme spațiale complexe $\tilde{M}(c)$ de dimensiune reală $2n$, $n \geq 3$. Atunci*

$$\delta_M \leq \frac{(n-2)(n+1)}{2}\frac{c}{4} + \frac{n^2}{2}\frac{2n-3}{2n+3}\|H\|^2. \tag{2.5}$$

Cazul de egalitate are loc dacă există o bază ortonormată convenabil aleasă pe $\tilde{M}$ astfel încât operatorul Weingarten pe M ia formele din (2.2) și (2.3).

Teoremă 2.7: [39]. *Fie M o subvarietate pur reală n-dimensională ($n \geq 3$) a unei forme spațiale complexe m-dimensionale $\tilde{M}(4c)$, $p \in M$ și $\pi \subset T_pM$ un 2-plan. Atunci*

$$\tau(p) - K(\pi) \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2 + [(n+1)(n-2) + 3\|P\|^2 - 6\Phi^2(\pi)]\frac{c}{2}, \tag{2.6}$$

unde $\Phi^2(\pi) = g^2(Je_1, e_2)$ și $\{e_1, e_2\}$ este o bază ortonormată a lui π. Cazul de egalitate are loc dacă există o bază ortonormată convenabil aleasă pe $\tilde{M}$ astfel încât operatorul Weingarten pe M ia formele din (2.2) și (2.3).

Pentru orice $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$, fie:

$$d(n_1, ..., n_k) = \frac{n^2(n+k-1-\sum_{j=1}^{k} n_j)}{2(n+k-\sum_{j=1}^{k} n_j)},$$

$$b(n_1, ..., n_k) = \frac{1}{2}[n(n-1) - \sum_{j=1}^{k} n_j(n_j-1)].$$

Următoarea inegalitate care implică invarianţii Chen şi pătratul curburii medii, obţinută în [15], are un rol foarte important legat de acestă temă.

Teoremă 2.8: *Pentru orice* $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$ *şi orice subvarietate* n*-dimensională* M^n *într-o formă spaţială Riemann* $\widetilde{M}^m(4c)$ *cu curbura secţională constantă* $4c$*, avem*

$$\delta(n_1, ..., n_k) \leq d(n_1, ..., n_k)\,\|H\|^2 + b(n_1, ..., n_k)c. \tag{2.7}$$

Cazul de egalitate are loc dacă şi numai dacă, în raport cu un câmp de repere ortonormat convenabil ales $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_m\}$*, operatorul Weingarten* $A_r = A_{e_r}$*,* $r = n+1, \ldots, m$*, al lui* M *în* $\widetilde{M}^m(c)$ *ia următoarele forme*

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

$$A_r = \begin{pmatrix} A_1^r & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & A_k^r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mu_r & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ldots & 0 & 0 \ldots & \mu_r \end{pmatrix}, r = n+2, \ldots, m, \tag{2.9}$$

unde $a_1, \ldots, a_n$ *satisfac relaţiile*

$$a_1 + \ldots + a_{n_1} = \ldots = a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_1+\ldots+n_k} = a_{n_1+\ldots+n_k+1} = \ldots = a_n$$

şi orice A_j^r *este o matrice simetrică de tipul* $n_j \times n_j$*, care satisface*

$$\mathrm{trace}(A_1^r) = \ldots = \mathrm{trace}(A_1^r) = \mu_r.$$

B.-Y. Chen a subliniat, de asemenea, că o inegalitate similară are loc pentru subvarietăţi total reale (în particular, Lagrange) în forme spaţiale Kähler.

2.4 O inegalitate pentru $\delta(2,2)$ pentru subvarietăţi Lagrange în forme spaţiale complexe

B.-Y. Chen şi alţii au stabilit următoarele inegalităţi pentru invarianţi Chen în cazul subvarietăţilor Lagrange în forme spaţiale complexe, rezultate ce îmbunătăţesc inegalitatea (2.7).

Teoremă 2.9: [19]. *Fie* M^n *o subvarietate Lagrange a unei forme spaţiale complexe* $\tilde{M}^n(4c)$*. Fie* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *numere naturale care satisfac relaţiile* $2 \leq n_1 \leq \ldots \leq n_k \leq n-1$ *şi*

$n_1 + \dots n_k < n$. *Atunci, în orice punct al lui* M^n, *avem*

$$\delta(n_1, n_2, \dots, n_k) \le \frac{n^2\{n - \sum_{i=1}^k n_i + 3k - 1 - 6\sum_{i=1}^k (2+n_i)^{-1}\}}{2\{n - \sum_{i=1}^k n_i + 3k + 2 - 6\sum_{i=1}^k (2+n_i)^{-1}\}}\|H\|^2 + \tag{2.10}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{n(n-1) - \sum_{i=1}^{k} n_i(n_1-1)\right\} c.$$

Presupunem că egalitatea are loc într-un punct $p \in M^n$. *Atunci, cu alegerea bazei și notațiile de mai sus, avem*

- $h^A_{BC} = 0$ *dacă* A, B, C *sunt diferiți și nu aparțin toți lui* Δ_i, $i \in \{1, \dots, k\}$,
- $h^{\alpha_i}_{\alpha_j\alpha_j} = h^{\alpha_i}_{rr} = \sum_{\beta_i \in \Delta_i} h^{\alpha_i}_{\beta_i\beta_i} = 0$ *pentru* $i \neq j$,
- $h^r_{rr} = 3h^r_{ss} = (n_i + 2)h^r_{\alpha_i\alpha_i}$ *pentru* $r \neq s$,

unde

$$\Delta_1 = \{1, \dots, n_1\},$$
$$\Delta_2 = \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\},$$
$$\vdots$$
$$\Delta_k = \{n_1 + \dots + n_{k-1} + 1, \dots, n_1 + \dots + n_k\},$$
$$\Delta_{k+1} = \{n_1 + \dots + n_k + 1, \dots, n\},$$

$A, B, C \in \{1, \dots, n\}$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $\alpha_i, \beta_i \in \Delta_i$, $r, s \in \Delta_{k+1}$, $n_{k+1} = n - n_1 - \dots - n_k$.

Teoremă 2.10: [19]. *Fie* M^n *o subvarietate Lagrange a unei forme spațiale complexe* $\tilde{M}^n(4c)$. *Fie* $n_1, n_2, \dots, n_k$ *numere naturale care satisfac relațiile* $2 \le n_1 \le \dots \le n_k \le n-1$ *și* $n_1 + \dots n_k = n$. *Atunci, în orice punct al lui* M^n, *avem*

$$\delta(n_1, n_2, \dots, n_k) \le \frac{n^2(k - 1 - 2\sum_{i=1}^k (2+n_i)^{-1})}{2(k - 2\sum_{i=1}^k (2+n_i)^{-1})}\|H\|^2 + \tag{2.11}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{n(n-1) - \sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1)\right\} c.$$

Presupunem că egalitatea are loc într-un punct $p \in M^n$. *Atunci, cu alegerea bazei și notațiile de mai sus, avem*

- $h^A_{\alpha_i\alpha_j} = 0$ *pentru* $i \neq j$ *și* $A \neq \alpha_i, \alpha_j$,
- *dacă* $n_j \neq \min\{n_1, \dots, n_k\}$:

$$h^{\beta_j}_{\alpha_i\alpha_i} = 0 \text{ dacă } i \neq j \text{ și } \sum_{\alpha_j \in \Delta_j} h^{\beta_j}_{\alpha_i\alpha_i} = 0,$$

- *dacă* $n_j = \min\{n_1, \dots, n_k\}$:

$\sum_{\alpha_j \in \Delta_j} h^{\beta_j}_{\alpha_i \alpha_i} = (n_i + 2) h^{\beta_j}_{\alpha_i \alpha_i}$ *oricare ar fi* $i \neq j$ *și orice* $\alpha_i \in \Delta_i$.

Utilizând metoda extremelor cu legături, am demonstrat o inegalitate Chen îmbunătățită pentru invariantul $\delta(2,2)$ al unei subvarietăți Lagrange într-o formă spațială complexă, în următoarea

Teoremă 2.11: [37]. **Fie** M^n **o subvarietate Lagrange a unei forme spațiale complexe** $\tilde{M}^n(4c)$, $n \geq 4$. **Atunci avem**

$$\delta(2,2) \leq \frac{n^2}{2} \cdot \frac{n-2}{n+1} \|H\|^2 + \frac{1}{2}[n(n-1) - 4]c. \tag{2.12}$$

Cazul de egalitate are loc într-un punct $p \in M^n$ **dacă și numai dacă există o bază ortonormată** $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ **în** p **astfel încât, în raport cu această bază, forma a doua fundamentală** h **satisface următoarele condiții**

$$h^C_{iA} = 0,\ A, C \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\},\ A < C,\ i = \overline{1,3},$$

$$h^A_{BC} = 0,\ A = \overline{1,n},\ 4 \leq B < C \leq n,\ A \notin \{B, C\}.$$

CAPITOLUL 3

SUBVARIETĂŢI LAGRANGE ÎN FORME SPAŢIALE CUATERNIONICE

3.1 Subvarietăţi Lagrange în forme spaţiale cuaternionice

În această secțiune reamintim definiții de bază, cum ar fi cele ale formelor spațiale cuaternionice și ale subvarietăților Lagrange în forme spațiale cuaternionice.

Fie $\tilde{M}$ o varietate diferențiabilă. Presupunem că există un subfibrat σ 3-dimensional al lui $\mathrm{End}(T\tilde{M})$ astfel încât există o bază locală $\{J_1, J_2, J_3\}$ pe mulțimea secțiunilor lui σ care, pentru orice $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, satisface relațiile

$$J_\alpha^2 = -\,\mathrm{Id}, \quad J_\alpha J_{\alpha+1} = -J_{\alpha+1} J_\alpha = J_{\alpha+2}, \tag{3.1}$$

unde Id este câmpul identitate de tip $(1, 1)$ pe $\tilde{M}$, iar indicii sunt considerați modulo 3, deci aparținând mulțimii $\{1, 2, 3\}$. Fibratul σ se numește *structură aproape cuaternionică* pe $\tilde{M}$, iar mulțimea $\{J_1, J_2, J_3\}$ poartă numele de *bază canonică locală a lui* σ. $(\tilde{M}, \sigma)$ se va numi *varietate aproape cuaternionică*. Este ușor de observat că orice varietate aproape cuaternionică are dimensiunea $4m$, $m \geq 1$.

O metrică Riemann $\tilde{g}$ pe $\tilde{M}$ se numește *adaptată structurii aproape cuaternionice* σ dacă este invariantă în raport cu orice J_α, adică satisface relația

$$\tilde{g}(J_\alpha X, J_\alpha Y) = \tilde{g}(X, Y), \quad \forall \alpha \in \{1, 2, 3\}, \tag{3.2}$$

pentru orice câmpuri vectoriale X, Y pe $\tilde{M}$ și orice bază canonică $\{J_1, J_2, J_3\}$ pe σ. $(\tilde{M}, \sigma, \tilde{g})$ se va numi *varietate aproape cuaternionică hermitiană*.

$(\tilde{M}, \sigma, \tilde{g})$ se numește *varietate cuaternionică Kähler* [26] dacă fibratul σ este paralel în raport cu conexiunea Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ a lui $\tilde{g}$, i.e., există 1-formele local definite ω_1, ω_2, ω_3 astfel încât să avem

$$\tilde{\nabla}_X J_\alpha = \omega_{\alpha+2}(X) J_{\alpha+1} - \omega_{\alpha+1}(X) J_{\alpha+2}, \tag{3.3}$$

pentru orice $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ și orice câmp vectorial X pe $\tilde{M}$, unde indicii sunt considerați modulo 3.

Fie $(\tilde{M}, \sigma, \tilde{g})$ o varietate cuaternionică Kähler și X un vector nenul pe $\tilde{M}$. Spațiul generat de $\{X, J_1X, J_2X, J_3X\}$ se numește 4-*plan cuaternionic* și se notează cu $Q(X)$. Orice 2-plan din $Q(X)$ se numește *plan cuaternionic*. Curbura secțională a unui plan cuaternionic se numește *curbură secțională cuaternionică*. O varietate cuaternionică Kähler se numește *formă spațială cuaternionică* în cazul în care curbura secțională cuaternionică este egală cu o constantă c, i.e., tensorul de curbură este dat de

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \frac{c}{4}\{\tilde{g}(Z,Y)X - \tilde{g}(X,Z)Y+ \tag{3.4}$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{3}[\tilde{g}(Z,J_\alpha Y)J_\alpha X - \tilde{g}(Z,J_\alpha X)J_\alpha Y + 2\tilde{g}(X,J_\alpha y)J_\alpha Z]\Bigg\},$$

oricare ar fi $X,\ Y,\ Z$ câmpuri vectoriale pe $\tilde{M}$ și oricare ar fi baza locală $\{J_1, J_2, J_3\}$ pe σ.

Fie $f : M \to \tilde{M}(c)$ o imersie izometrică a unei varietăți Riemann n-dimensionale M într-o formă spațială cuaternionică $4n$-dimensională $\tilde{M}(c)$. M se numește *subvarietate Lagrange* dacă

$$J_\alpha(T_pM) \subset T_p^\perp M, \forall p \in M, \forall \alpha \in \{1,2,3\}.$$

3.2 Prima inegalitate Chen îmbunătățită pentru subvarietăți Lagrange

În secțiunea a doua a acestui capitol este prezentat următorul rezultat, similar inegalității (2.5), pe care l-am obținut în cazul subvarietăților Lagrange în forme spațiale cuaternionice.

Teoremă 3.1: [30]. **Fie** M **o subvarietate Lagrange** n**-dimensională a unei forme spațiale cuaternionice** $\tilde{M}(c)$**. Atunci, are loc relația**

$$\delta_M \le \frac{(n-2)(n+1)}{2}\cdot\frac{c}{4} + \frac{n^2}{2}\cdot\frac{2n-3}{2n+3}\cdot ||H||^2. \tag{3.5}$$

Egalitatea are loc într-un punct $p \in M$ **dacă și numai dacă există o bază ortonormată** $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ **în** p **astfel încât, în raport cu această bază, forma a doua fundamentală** h **satisface condițiile**

$$h_{ij}^{\phi_r(k)} = 0\ ,\ i = \overline{1,n}\ ,\ j = \overline{3,n}\ ,\ i \ne j,\ k \in \{1,\ldots,n\}\setminus\{i,j\}.$$

3.3 Inegalități Chen îmbunătățite pentru subvarietăți Lagrange în forme spațiale cuaternionice

Utilizând aceeași metodă de optimizare, am demonstrat în a treia secțiune a acestui capitol următoarea inegalitate pentru invariantul Riemann $\delta(n_1, \ldots, n_k)$ în cazul subvarietăților Lagrange în forme spațiale cuaternionice, similară celor din teoremele 2.9 și 2.10.

Teoremă 3.2: [30]. **Fie** M **o subvarietate Lagrange** n**-dimensională a unei forme spațiale cuaternionice** $\tilde{M}(c)$**. Pentru un** k**-uplu dat** $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in S(n)$**, fie** $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ *și* $Q = \sum_{i=1}^{k}(2+n_i)^{-1}$**. Dacă** $N < n$ **atunci avem**

a) dacă $Q \leq \frac{1}{3}$,

$$\delta(n_1, n_2, \ldots, n_k) \leq \frac{n^2\{n - N + 3k - 1 - 6Q\}}{2\{n - N + 3k + 2 - 6Q\}}\|H\|^2 + \tag{3.6}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{n(n-1) - \sum_{i=1}^{k} n_i(n_i - 1)\right\}\frac{c}{4}.$$

Cazul de egalitate are loc într-un punct $p \in M$ **dacă și numai dacă există o bază ortonormată** $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ **în** p **astfel încât, în raport cu această bază, forma a doua fundamentală** h **este de forma**

$$h(e_{\alpha_i}, e_{\beta_i}) = \sum_{r=1}^{3}\left(\sum_{\gamma_i \in \Delta_i} h_{\alpha_i\beta_i}^{\phi_r(\gamma_i)}\phi_r e_{\gamma_i} + \frac{3\delta_{\alpha_i\beta_i}}{2+n_i}\lambda\phi_r(e_{N+1})\right), \ \alpha_i, \beta_i \in \Delta_i, \ i = \overline{1,k},$$

$$h(e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}) = 0, \ \sum_{\alpha_i \in \Delta_i} h_{\alpha_i\alpha_i}^{\phi_r(\gamma_i)} = 0, \ r = \overline{1,3}, \ \alpha_i \in \Delta_i, \ \alpha_j \in \Delta_j, \ i \neq j, \ i, j \in \{1, 2, \ldots, k\},$$

$$h(e_{\alpha_i}, e_{N+1}) = \frac{3\lambda}{2+n_i}\sum_{r=1}^{3}\phi_r(e_{\alpha_i}), \ h(e_{\alpha_i}, e_u) = 0, \ u \in \{N+2, \ldots, n\},$$

$$h(e_{N+1}, e_{N+1}) = 3\lambda\sum_{r=1}^{3}\phi_r(e_{N+1}),$$

$$h(e_{N+1}, e_u) = \lambda\sum_{r=1}^{3}\phi_r(e_u), \ u \in \{N+2, \ldots, n\},$$

$$h(e_u, e_v) = \lambda\delta_{uv}\sum_{r=1}^{3}\phi_r(e_{N+1}), \ u, v \in \{N+2, \ldots, n\},$$

pentru $\lambda = \frac{1}{3}h_{e_{N+1}e_{N+1}}^{N+1}$.

b) dacă $Q > \frac{1}{3}$,

$$\delta(n_1, n_2, \ldots, n_k) \leq \frac{n^2\{n - N + 3k - 3\}}{2\{n - N + 3k\}}\|H\|^2 + \tag{3.7}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{n(n-1) - \sum_{i=1}^{k} n_i(n_i - 1)\right\}\frac{c}{4}.$$

Cazul de egalitate are loc într-un punct $p \in M$ **dacă și numai dacă există o bază**

ortonormată $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ **în** p **astfel încât, în raport cu această bază, forma a doua fundamentală** h **este de forma**

$$h(e_{\alpha_i}, e_{\beta_i}) = \sum_{r=1}^{3} \sum_{\gamma_i \in \Delta_i} h_{\alpha_i \beta_i}^{\phi_r(\gamma_i)} \phi_r(e_{\gamma_i}),$$

$$\sum_{r=1}^{3} \sum_{\alpha_i \in \Delta_i} h_{\alpha_i \alpha_i}^{\phi_r(\gamma_i)} \phi_r(e_{\gamma_i}) = 0,$$

$$h(e_A, e_B) = 0 \quad \textit{\textbf{în caz contrar,}}$$

pentru $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i \in \Delta_i,\ i = \overline{1,k},\ A,\ B,\ C = \overline{1,n}.$

CAPITOLUL 4

CR-SUBVARIETĂŢI CUATERNIONICE ÎN FORME SPAŢIALE CUATERNIONICE

4.1 CR-subvarietăţi cuaternionice în forme spaţiale cuaternionice

În această secțiune reamintim noțiunea de CR-subvarietate și definiția CR-subvarietăților cuaternionice.

În 1978, A. Bejancu introduce noțiunea de CR-*subvarietate*, care este o generalizare a subvarietăților olomorfe și total reale ale unei varietăți aproape hermitiene [6].

Fie $\tilde{M}$ o varietate Kähler cu structura complexă J și fie M o varietate Riemann imersată izometric în $\tilde{M}$. Notăm prin $\mathcal{D}_x$, $x \in M$ subspațiul complex maximal $T_xM \cap J(T_xM)$ al spațiului tangent T_xM al lui M. Dacă dimensiunea lui $\mathcal{D}_x$ este constantă pentru orice $x \in M$, atunci $\mathcal{D} : x \to \mathcal{D}_x$ definește o *distribuție olomorfă* $\mathcal{D}$ pe M. Un subspațiu ν al lui T_xM, $x \in M$ se numește *total real* dacă $J(\nu)$ este un subspațiu al spațiului normal $T_x^\perp M$ în x. Dacă orice spațiu tangent al lui M este total real, atunci M se numește *subvarietate total reală* a varietății Kähler $\tilde{M}$.

Dacă există o distribuție total reală $\mathcal{D}^\perp$ pe M al cărei complement ortogonal este distribuția olomorfă $\mathcal{D}$, i.e., $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp$, $J\mathcal{D}_x^\perp \subset T_x^\perp M$, $x \in M$, atunci subvarietatea M se va numi CR-*subvarietate*.

Distribuția total reală $\mathcal{D}^\perp$ a oricărei CR-subvarietăți a unei varietăți Kähler este o distribuție integrabilă (see [10]).

4.2 O inegalitate pentru CR δ-invariant

În cazul unei CR-subvarietăți M a unei varietăți Kähler, Chen a introdus un δ-invariant $\delta(\mathcal{D})$, numit CR δ-*invariant*, definit astfel

$$\delta(\mathcal{D})(x) = \tau(x) - \tau(\mathcal{D}_x),$$

unde τ este curbura scalară a lui M, iar $\tau(\mathcal{D})$ este curbura scalară a distribuției olomorfe $\mathcal{D}$ a lui M.

În [2], Al-Solamy, Chen și Deshmukh au demonstrat o inegalitate pentru δ-invariantul $\delta(\mathcal{D})$, în cazul unei subvarietăți anti-olomorfe într-o formă spațială complexă, în funcție de pătratul curburii medii. În acest capitol, considerăm o CR-subvarietate cuaternionică de codimensiune minimă, într-o formă spațială cuaternionică.

Fie $\tilde{M}$ o varietate Kähler cuaternionică și M o subvarietate reală a lui $\tilde{M}$. O distribuție $\mathcal{D} : x \to \mathcal{D}_x \subset T_xM$ se numește *distribuție cuaternionică* dacă $J_\alpha(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$, $\forall \alpha = 1, 2, 3$.

Spunem că M se numește CR-*subvarietate cuaternionică* dacă admite o distribuție cuaternionică diferențiabilă $\mathcal{D}$ a cărei distribuție complementară ortogonală $\mathcal{D}^\perp$ este total reală, i.e., $J_\alpha(\mathcal{D}^\perp_x) \subset T^\perp_x M$, $\alpha = 1, 2, 3$, $\forall x \in M$.

O subvarietate M a unei varietăți cuaternionice $\tilde{M}$ se numește *subvarietate cuaternionică* (respectiv, *subvarietate total reală*) dacă $\dim \mathcal{D}^\perp_x = 0$ (respectiv, $\dim \mathcal{D}_x = 0$). O CR-subvarietate cuaternionică se numește *proprie* dacă nu este nici total reală, nici cuaternionică.

Fie $\mathcal{D}_{\alpha x} = J_\alpha(\mathcal{D}^\perp_x)$, $\nu^\perp_x = \mathcal{D}_{1x} \oplus \mathcal{D}_{2x} \oplus \mathcal{D}_{3x}$ o distribuție $3q$-dimensională $\nu^\perp : x \to \nu^\perp_x$ global definită pe M, unde $q = \dim \mathcal{D}^\perp_x$ și ν distribuția complementară ortogonală a lui $\nu^\perp$.

Atunci

$$T\tilde{M} = TM \oplus T^\perp M, \; TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp,$$

$$T^\perp M = \nu \oplus \nu^\perp, \; \nu, \nu^\perp \subset T^\perp M, \; \nu^\perp_x = \mathcal{D}_{1x} \oplus \mathcal{D}_{2x} \oplus \mathcal{D}_{3x}.$$

M se numește *mixt geodezică* dacă $h(X, Y) = 0$, $\forall X \in \Gamma(\mathcal{D})$, $Y \in \Gamma(\mathcal{D}^\perp)$.

M se numește *mixt foliată* dacă $\mathcal{D}$ este integrabilă și M este mixt geodezică.

M se numește *$\mathcal{D}$-geodezică* dacă $h(X, Y) = 0$, $\forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$.

M se numește *$\mathcal{D}^\perp$-geodezică* dacă $h(X, Y) = 0$, $\forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}^\perp)$.

Dacă M este o CR-subvarietate cuaternionică de codimensiune minimă, i.e., $\dim \nu_x = 0$ for $x \in M$, vom alege următoarea bază ortonormată:

$$\mathcal{D}_x = Sp\{ e_1, \dots, e_n\},$$

$$\mathcal{D}^\perp_x = Sp\{e_{n+1}, \dots, e_{n+q}\},$$

și atunci

$$TM = Sp\{e_1, \dots, e_n; \; e_{n+1}, \dots, e_{n+q}\},$$

$$T^\perp M = Sp\{J_1 e_{n+1}, \dots, J_1 e_{n+q}; \; J_2 e_{n+1}, \dots, J_2 e_{n+q}; \; J_3 e_{n+1}, \dots, J_3 e_{n+q}\},$$

care corespunde cu definiția CR-subvarietății cuaternionice dată în [5].

În [2], autorii demonstrează o inegalitate pentru $\delta(\mathcal{D})$ în cazul unei subvarietăți anti-olomorfe a unei forme spațiale complexe:

Teoremă 4.1: [2]. *Fie M o subvarietate anti-olomorfă a unei forme spațiale complexe $\tilde{M}^{h+p}(4c)$ cu $h = \operatorname{rank}_{\mathbb{C}} \mathcal{D} \geq 1$ și $p = \operatorname{rank} \mathcal{D}^\perp \geq 2$. Atunci avem*

$$\delta(\mathcal{D}) \leq \frac{(2h+p)^2}{2} \|H\|^2 + \frac{p(4h+p-1)}{2} c - \frac{3p^2}{2(p+2)} \|H_{\mathcal{D}^\perp}\|^2. \tag{4.1}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele trei condiții:

(a) M este $\mathcal{D}$-minimală, i.e., $\overrightarrow{H}_{\mathcal{D}} = 0$,

(b) M este mixt total geodezică, și

(c) există un reper ortonormat $\{e_{2h+1}, \dots, e_n\}$ al lui $\mathcal{D}^\perp$ astfel încât forma a doua fundamentală σ a lui M satisface relațiile

$\sigma^r_{rr} = 3\sigma^r_{ss}$, pentru $2h+1 \leq r \neq s \leq 2h+p$, și

$\sigma_{rs}^{t} = 0$ *pentru* $r, s, t \in \{2h+1, \dots, 2h+p\}$ *distincți.*

În această secțiune am demonstrat o inegalitate similară pentru CR-subvarietăți cuaternionice cu codimensiunea minimă ale unei forme spațiale cuaternionice, utilizând o metodă diferită, mai exact metoda extremelor cu legături.

Teoremă 4.2: [35]. **Dacă** M **este o CR-subvarietate cuaternionică a unei forme spațiale cuaternionice** $\tilde{M}$**, de codimensiune minimă, i.e.** $\dim \nu_x = 0$**, pentru** $x \in M$**,** $\dim \mathcal{D}_x = n$**,** $\dim \mathcal{D}_x^{\perp} = q$ **și** $\dim \nu_x^{\perp} = 3q = \dim T_x^{\perp} M$ **atunci**

$$\delta(\mathcal{D}) \leq \frac{(n+q)^2}{2} \cdot \frac{q+2}{q+5} \|H\|^2 + \frac{q(2q+n-1)}{2} \cdot \frac{c}{4}. \tag{4.2}$$

Egalitatea are loc într-un punct $x \in M$ **dacă și numai dacă următoarele condiții sunt satisfăcute:**

a) M **este mixt total geodezică;**

b) există o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+q}\}$ **în** x **astfel încât, în raport cu această bază, forma a doua fundamentală** h **satisface următoarele condiții:**

(i)

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{g}(h(e_i, e_i), J_\alpha e_r) = \tilde{g}(h(e_r, e_r), J_\alpha e_r) = 3\tilde{g}(h(e_s, e_s), J_\alpha e_r),$$

$\forall \alpha = \overline{1,3}, \ \forall r \neq s \in \{n+1, \dots, n+q\},$

(ii)

$$\tilde{g}(h(e_r, e_s), J_\alpha e_t) = 0,$$

$\forall \alpha = \overline{1,3}, \ r, s, t = \overline{n+1, n+q}, \ r \neq s \neq t \neq r.$

CAPITOLUL 5

QR-SUBVARIETĂŢI CUATERNIONICE ÎN FORME SPAŢIALE CUATERNIONICE

5.1 QR-subvarietăţi cuaternionice în forme spaţiale cuaternionice

În această secțiune reamintim definițiile CR δ-invariantului $\delta(\mathcal{D}^{\perp})(x)$ și a QR-subvarietăților.

În 1986, A. Bejancu [7] introduce noțiunea de QR-subvarietate ca o generalizare a hipersuprafețelor reale ale unei varietăți cuaternionice Kähler (vezi de asemenea [48]).

Fie $\tilde{M}$ o varietate cuaternionică Kähler și M o subvarietate reală a lui $\tilde{M}$. M se numește *QR-subvarietate* dacă există un subfibrat vectorial ν al fibratului normal astfel încât să avem

$$J_\alpha(\nu_x) = \nu_x \text{ și } J_\alpha(\nu_x^{\perp}) \subset T_xM,\ x \in M,\ \alpha = \overline{1,3},$$

unde $\nu^{\perp}$ este fibratul ortogonal complementar.

Luând în calcul cercetările făcute până acum ([35],[36]), remarcăm faptul că CR-subvarietățile cuaternionice și QR-subvarietățile sunt noțiuni complet diferite. Diferențele dintre ele se pot remarca în cele două figuri de la sfârșitul capitolului 5.

Fig. 1: Quaternion CR-submanifolds

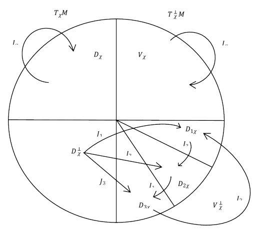
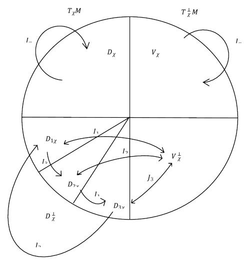


Fig. 2: QR-submanifolds



5.2 Un nou δ-invariant pentru QR-subvarietăți în forme spațiale cuaternionice

În cazul unei CR-subvarietăți M a unei varietăți Kähler, Chen a introdus un δ-invariant $\delta(\mathcal{D}^{\perp})$, numit CR *$\delta$-invariant*, definit în [18] astfel:

$$\delta(\mathcal{D}^{\perp})(x) = \tau(x) - \tau(\mathcal{D}^{\perp}_x),$$

unde τ este curbura scalară a lui M și $\tau(\mathcal{D}^{\perp})$ este curbura scalară a distribuției total reale $\mathcal{D}^{\perp}$ a lui M.

În această secțiune demonstrăm o inegalitate (4.1), pentru $\delta(\mathcal{D}^{\perp})$ în cazul QR-subvarietăților unei forme spațiale cuaternionice, cu codimensiunea minimă, i.e., $\dim \nu_x = 0$.

Fie $\mathcal{D}_{\alpha x} = J_\alpha(\nu^{\perp}_x)$, $\mathcal{D}^{\perp}_x = \mathcal{D}_{1x} \oplus \mathcal{D}_{2x} \oplus \mathcal{D}_{3x}$ o distribuție $3q$-dimensională $\mathcal{D}^{\perp} : x \to \mathcal{D}^{\perp}_x$ global definită pe M, unde $q = \dim \nu^{\perp}_x$. Avem

$$J_\alpha(\mathcal{D}_{\alpha x}) = \nu^{\perp}_x,\ J_\alpha(\mathcal{D}_{\beta x}) = \mathcal{D}_{\gamma x},\ \forall x \in M,$$

unde (α, β, γ) este o permutare ciclică a lui $(1, 2, 3)$.

$\mathcal{D}$ este distribuția ortogonală complementară a lui $\mathcal{D}^{\perp}$ în TM și $J_\alpha(\mathcal{D}_x) = \mathcal{D}_x$. $\mathcal{D}$ este numită *distribuție cuaternionică*.

Așadar

$$T\tilde{M} = TM \oplus T^{\perp}M,\ TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{\perp},$$

$$T^{\perp}M = \nu \oplus \nu^{\perp},\ \nu, \nu^{\perp} \subset T^{\perp}M,\ \mathcal{D}^{\perp}_x = \mathcal{D}_{1x} \oplus \mathcal{D}_{2x} \oplus \mathcal{D}_{3x}.$$

Pentru $Y \in \Gamma(TM)$ considerăm descompunerea $J_\alpha Y = \Phi_\alpha Y + F_\alpha Y$, $\alpha = \overline{1,3}$; $\Phi_\alpha Y$, $F_\alpha Y$ reprezintă componentele tangentă, respectiv normală ale lui $J_\alpha Y$.

Pentru $V \in \Gamma(T^{\perp}M)$ considerăm descompunerea $J_{\alpha}V = t_{\alpha}V + f_{\alpha}V$, $\alpha = \overline{1,3}$; $t_{\alpha}V$, $f_{\alpha}V$ reprezintă componentele tangentă, respectiv normală ale lui $J_{\alpha}V$.

Dacă $M \subset \tilde{M}$ este o QR-subvarietate de codimensiune minimă, i.e., $\dim \nu_x = 0$ pentru $x \in M$, considerăm următoarele baze ortonormate:

$$\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathcal{D}_x;$$

$$\{J_1 e_{n+1}, \dots, J_1 e_{n+q};\ J_2 e_{n+1}, \dots, J_2 e_{n+q};\ J_3 e_{n+1}, \dots, J_3 e_{n+q}\} \subset \mathcal{D}_x^{\perp};$$

$$\{\ e_{n+1}, \dots, e_{n+q}\} \subset T_x^{\perp}M.$$

Principalul rezultat al acestui capitol este următoarea inegalitate pentru invariantul $\delta(\mathcal{D}^{\perp})$ în cazul unei QR-subvarietăți a unei forme spațiale cuaternionice.

Teoremă 5.1: [36]. **Fie** M **o QR-subvarietate cu codimensiunea minimă a unei forme spațiale cuaternionice** $\tilde{M}(c)$**,** $\dim \mathcal{D}_x = n, \dim \mathcal{D}_x^{\perp} = 3q, \dim \nu_x = 0,\ \dim \nu_x^{\perp} = q,\ x \in M$**. Atunci are loc următoarea inegalitate:**

$$\delta(\mathcal{D}^{\perp}) \le \frac{n(n+3q)^2}{2(n+1)} \cdot \|H\|^2 + \frac{n(n+6q+8)}{2} \cdot \frac{c}{4}. \tag{5.1}$$

Cazul de egalitate are loc dacă și numai dacă următoarele trei condiții sunt satisfăcute:

(a) M **este mixt total geodezică,**

(b) distribuția $\mathcal{D}$ **este total ombilicală, și**

(c) există un reper ortonormat

$$\{J_1 e_{n+1}, \dots, J_1 e_{n+q};\ J_2 e_{n+1}, \dots, J_2 e_{n+q};\ J_3 e_{n+1}, \dots, J_3 e_{n+q}\}$$

al lui $\mathcal{D}_x^{\perp}$ **astfel încât forma a doua fundamentală** h **a lui** M **satisface**

$$h_{ij}^r = 0,\ i, j = \overline{1, n},\ i \ne j,\ r = \overline{n+1, n+q}.$$

CAPITOLUL 6

INEGALITATEA WINTGEN

6.1 Inegalitatea Wintgen

În 1979, P. Wintgen ([49]) a demonstrat faptul că curbura Gauss K, pătratul curburii medii $\|H\|^2$ și curbura normală $K^\perp$ ale oricărei suprafețe M^2 în E^4 satisfac inegalitatea

$$K \leq \|H\|^2 - K^\perp.$$

Cazul de egalitate are loc dacă și numai dacă elipsa de curbură a lui M^2 în E^4 este un cerc.

O extensie a inegalității Wintgen a fost dată ulterior de către B. Rouxel ([47]) și, independent, de I.V.Guadalupe și L.Rodriguez ([25]), pentru suprafețele M^2 de codimensiune arbitrară m în forme spațiale reale $\tilde{M}^{2+m}(c)$

$$K \leq \|H\|^2 - K^\perp + c.$$

În 2004, A. Mihai ([40]) găsește o inegalitate corespunzătoare pentru suprafețe total reale în forme spațiale complexe n-dimensionale. De asemenea, studiază cazul de egalitate și furnizează un exemplu netrivial de suprafață total reală care satisface cazul de egalitate.

Conjectura legată de inegalitatea Wintgen, cunoscută de asemenea drept *conjectura DDVV*, a fost formulată în 1999 de către P.J. De Smet, F. Dillen, L. Verstraelen și L. Vrancken ([22]).

Conjectură. *Fie $f : M^n \to \tilde{M}^{n+m}$ o imersie izometrică, unde $\tilde{M}^{n+m}$ este o formă spațială reală cu curbura secțională constantă c. Atunci*

$$\rho \leq \|H\|^2 - \rho^\perp + c,$$

unde ρ este curbura scalară normalizată și $\rho^\perp$ este curbura scalară normală normalizată.

Notând prin K și $R^\perp$ curbura secțională, respectiv tensorul de curbură normală pe M^n, curbura scalară normalizată și curbura scalară normală normalizată sunt date prin formulele

$$\rho = \frac{2\tau}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} K(e_i \wedge e_j),$$

$$\rho^{\perp} = \frac{2\tau^{\perp}}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}\sqrt{\sum_{1\le i<j\le n}\sum_{1\le\alpha<\beta\le n}\left(R^{\perp}(e_i,e_j,\xi_\alpha,\xi_\beta)\right)^2},$$

unde τ este curbura scalară.

Această conjectură a fost demonstrată de autori, pentru subvarietăți M^n cu dimensiune arbitrară $n \geq 2$ și codimensiune 2 în forme spațiale reale $\tilde{M}^{n+2}(c)$ cu curbura secțională constantă c și, de asemenea, este prezentată o caracterizare detaliată a cazului de egalitate în funcție de operatorul Weingarten al lui M^n în $\tilde{M}^{n+2}(c)$.

T.Choi și Z.Lu ([21]) au demonstrat că această conjectură este adevărată pentru orice subvarietate 3-dimensională M^3 cu codimensiune arbitrară $m \geq 2$ în $\tilde{M}^{3+m}(c)$. Este prezentată și o caracterizare a cazului de egalitate.

Alte rezultate similare inegalității Wintgen au fost demonstrate pentru subvarietăți în varietăți Kähler, nearly Kähler și spații Sasaki de către P.J. De Smet, F. Dillen, J. Fastenakels, A. Mihai, J.Van der Veken, L. Verstraelen și L. Vrancken.

Recent, Z. Lu și independent J. Ge și Z. Tang au rezolvat, în cele din urmă, cazul general al conjecturii DDVV.

Teoremă 6.1: [29]. *Inegalitatea Wintgen*

$$\rho \leq \|H\|^2 - \rho^{\perp} + c,$$

este adevărată pentru orice subvarietate M^n în orice formă spațială reală $\tilde{M}^{n+m}(c)$, $n \geq 2$, $m \geq 2$.

Cazul de egalitate are loc dacă și numai dacă, în raport cu niște repere ortonormate convenabile $\{e_i\}$ și $\{\xi_\alpha\}$, operatorul Weingarten al lui M^n în $\tilde{M}^{n+m}(c)$ ia formele

$$A_{\xi_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu & 0 & \dots & 0 \\ \mu & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$A_{\xi_2} = \begin{pmatrix} \lambda_2+\mu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2-\mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$A_{\xi_3} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

$A_{\xi_4} = \cdots = A_{\xi_m} = 0$, *unde* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *și* μ *sunt funcții reale pe* M^n.

6.2 Inegalitatea Wintgen generalizată pentru subvarietăți Lagrange în forme spațiale cuaternionice

I. Mihai a demonstrat următoarea inegalitate Wintgen generalizată pentru subvarietăți Lagrange în forme spațiale complexe.

Teoremă 6.2: [42]. *Fie* M^n *o subvarietate Lagrange într-o formă spațială complexă* $\tilde{M}^m(4c)$. *Atunci*

$$(\rho^\perp)^2 \leq (\|H\|^2 - \rho + c)^2 + \frac{4}{n(n-1)}(\rho - c)c + \frac{2c^2}{n(n-1)}.$$

În capitolul 6 sunt prezentate rezultate similare pe care le-am obținut în cazul subvarietăților Lagrange, respectiv θ-oblice în forme spațiale cuaternionice.

Fie M^n o subvarietate total reală n-dimensională a unei forme spațiale cuaternionice $4m$-dimensionale $\tilde{M}^{4m}(4c)$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un reper ortonormat pe M^n și $\{\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{4m}\}$ un reper ortonormat pe fibratul normal $T^\perp M^n$.

Curbura normală scalară a lui M^n este definită prin

$$K_N = \frac{1}{4} \sum_{r,s=n+1}^{4m} \mathrm{Trace}[A_r, A_s]^2. \tag{6.1}$$

Atunci curbura normală scalară normalizată este dată de formula $\rho_N = \dfrac{2\sqrt{K_N}}{n(n-1)}$.

Din relația (6.1) obținem

$$K_N = \frac{1}{2} \sum_{1\leq r<s\leq 4m-n} \mathrm{Trace}[A_r, A_s]^2 = \sum_{1\leq r<s\leq 4m-n} \sum_{1\leq i<j\leq n} \big(g([A_r, A_s]e_i, e_j)\big)^2 \tag{6.2}$$

Notând cu $h_{ij}^r = g(h(e_i, e_j), \xi_r)$, $i, j = \overline{1, n}$, $r = \overline{1, 4m-n}$, avem

$$K_N = \sum_{1\leq r<s\leq 4m-n} \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} (h_{jk}^r h_{ik}^s - h_{ik}^r h_{jk}^s)\right)^2. \tag{6.3}$$

Unul dintre principalele rezultate ale acestui capitol este următorul

Teoremă 6.3: [31]. **Fie** M^n **o subvarietate Lagrange a unei forme spațiale cuaternionice** $\tilde{M}^{4n}(4c)$**. Atunci**

$$\left(\rho^\perp\right)^2 \leq \left(\|H\|^2 - \rho + c\right)^2 + \frac{6}{n(n-1)}c^2 + \frac{4}{n(n-1)}c(\rho - c). \tag{6.4}$$

Am demonstrat această teoremă folosind următoarea lemă, de asemenea demonstrată în acest capitol

Lemă 6.1: [31]. **Fie M^n o subvarietate total reală a unei forme spațiale cuaternionice $4m$-dimensionale $\tilde{M}^{4m}(4c)$. Atunci avem**

$$\|H\|^2 - \rho_N \geq \rho - c. \tag{6.5}$$

Cazul de egalitate are loc dacă și numai dacă, în raport cu un reperele ortonormate convenabil alese $\{e_i\}$ și $\{\xi_\alpha\}$, operatorul Weingarten al lui M^n în $\tilde{M}^{4m}(4c)$ ia următoarele forme

$$A_{\xi_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu & 0 & \dots & 0 \\ \mu & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$A_{\xi_2} = \begin{pmatrix} \lambda_2 + \mu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$A_{\xi_3} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

$A_{\xi_4} = \cdots = A_{\xi_{4m-n}} = 0$, **unde** $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ **și** μ **sunt funcții reale pe** M^n**.**

6.3 Subvarietăți oblice în forme spațiale cuaternionice

Am demonstrat, de asemenea, un rezultat similar privind subvarietățile θ-oblice ale unei forme spațiale cuaternionice.

Reamintim definiția unei subvarietăți oblice într-o formă spațială cuaternionică.

Definiție 6.1: Spunem că o subvarietate M a unei varietăți cuaternionice Kähler $(\tilde{M}, \sigma, \tilde{g})$ estea *subvarietate oblică* dacă pentru orice vector nenul X tangent la M în p, unghiul $\theta(X)$ dintre $J_\alpha(X)$ și T_pM, $\alpha \in \{1,2,3\}$ este constant, i.e. nu depinde de alegerile lui $p \in M$ și $X \in T_pM$.

Teoremă 6.4: [31]. **Fie M^n o subvarietate θ-oblică n-dimensională a unei forme spațiale cuaternionice $4m$-dimensionale $\tilde{M}^{4m}(4c)$. Atunci avem**

$$\|H\|^2 \geq \rho + \rho_N - c - \frac{9c}{n-1} \cos^2 \theta. \tag{6.6}$$

Rezultatele menționate în această lucrare și altele legate de acest subiect au fost deja publicate sau prezentate în reviste de specialitate sau conferințe.

1. Macsim, G., *Improved Chen's inequalities for Lagrangian submanifolds in quaternionic space forms*, Romanian J. Math. Comp. Sci. **6** (2016), 61-84.

2. Macsim, G. and Mihai, A., *An inequality on quaternionic CR-submanifolds*, Ann. Univ. Ovidius Constanţa **26**(3) (2018), 181-196.

3. Macsim, G. and Mihai, A., *A δ−invariant for QR-submanifolds in quaternion space forms*, Int. Electron. J. Geom. **11**(2) (2018), 8-17.

4. Macsim, G., Mihai, A. and Olteanu A., *On rectifying-type curves in a Myller configuration*, Bull. Korean Math. Soc. **56**(2) (2019), 383-390.

5. Macsim, G. and Ghişoiu, V., *Generalized Wintgen inequality for Lagrangian submanifolds in quaternionic space forms*, va apărea în Math. Inequal. Appl.

6. Macsim, G. and Mihai, A., *A constrained maxima method for improving certain Chen inequalities*, trimis spre publicare.

7. Macsim, G. and Mihai, A., *An optimization method for improved Chen inequalities*, Proceedings of Mathematics and Educational Symposium of Department of Mathematics and Computer Sciences, Technical University of Civil Engineering Bucharest, The 2nd edition, May 28, 2016, 75-80.

8. Macsim, G. and Mihai, A., *A CR δ− invariant for quaternionic CR-submanifolds in quaternionic space forms*, The 14th Workshop of Scientific Communications, Department of Mathematics and Computer Science, Technical University of Civil Engineering Bucharest, May 27, 2017, 66-71.

9. Macsim, G. and Ghişoiu, V., *Generalized Wintgen inequality for Lagrangian submanifolds in quaternionic space forms*, The 14-th International Workshop on Differential Geometry and its Applications, Petroleum-Gas University of Ploiesti (UPG), Romania, July, 9th - 11th, 2019.

10. Mihai, A., Macsim, G. and Olteanu, A., *Curves in a Myller configuration*, International Conference on Applied and Pure Mathematics (ICAPM 2017), Iasi, November 2-5 2017.

11. Macsim, G. and Ghişoiu, V., *Optimal inequalities involving Casorati curvature for Lagrangian submanifolds in quaternionic space forms*, trimis spre publicare.

12. Ghişoiu, G., Ghişoiu, V. and Macsim, G., *Generalized Wintgen inequality for Lagrangian submanifolds in generalized complex space forms*, trimis spre publicare.

13. Ghişoiu, V. and Macsim, G., *Generalized Wintgen inequality for submanifolds in generalized Sasaki space forms*, trimis spre publicare.

BIBLIOGRAFIE

[1] Alegre, P., Carriazo, A. Kim, Y.H. and Yoon, D.W., *B.-Y. Chen's inequality for submanifolds of generalized space forms*, Indian J. Pure Appl. Math. **38** (2007), 185-201.

[2] Al-Solamy, F., Chen, B.Y. and Deshmukh, S., *Erratum to: Two optimal inequalities for anti-holomorphic submanifolds and their applications*, Taiwanese J. Math. **22(3)** (2018), 615-616.

[3] Arslan, K., Ezentas, R., Mihai, I., Murathan, C. and Ozgur, C., *B.Y. Chen inequalities for submanifolds in locally conformal almost cosymplectic manifolds*, Bull. Institute Math. Acad. Sinica **29** (2001), 231-242.

[4] Arslan, K., Ezentas, R., Mihai, I., Murathan, C. and Ozgur, C., *Certain inequalities for submanifolds in $(k, \mu)-$contact space forms*, Bull. Austral. Math. Soc. **64** (2001), 201-212.

[5] Barros, M., Chen, B.-Y. and Urbano, F., *Quaternion CR-submanifolds of quaternion manifolds*, Kodai Math. J. **4(3)** (1981), 399-417.

[6] Bejancu, A., *CR-submanifolds of a Kaehler manifold I*, Proc. Amer. Math. Soc. **69** (1978), 134-142.

[7] Bejancu, A., *QR-submanifolds of quaternion Kaehler manifolds*, Chinese J. Math. **14** (1986), no. 2, 81-94.

[8] Berger, M., *La geometrie metrique des varietes Riemaniennes, Elie Cartan et les Mathematiques d'Aujourd'Hui*, Asterisque, (1985), 9-66.

[9] Bolton, J., Dillen, F., Fastenakels, J., Vrancken, L., *A best possible inequality for curvature-like tensor fields*, Math. Inequal. Appl. **12** (2009), 663-681.

[10] Chen, B.-Y., *CR-submanifolds of a Kaehler manifold. I, II*, J. Differential Geom. **16** (1981), 305-323; J. Differential Geom. **16** (1981), 493-509.

[11] Chen, B.-Y., *Slant immersions*, Bull. Austral. Math. Soc. **41** (1990), 135-147.

[12] Chen, B.-Y., *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds*, Arch. Math. **60** (1993), 568-578.

[13] Chen, B.-Y., *A Riemannian invariant and its applications to submanifold theory*, Results Math. **27** (1995), 17-28.

[14] Chen, B.-Y., *A general inequality for submanifolds in complex space forms and its applications*, Arch. Math. J. **67** (1996), 519-528.

[15] Chen, B.-Y., *Some new obstructions to minimal and Lagrangian isometric immersions*, Japan. J. Math. (N.S.) **26** (2000), 105-127.

[16] Chen, B.-Y., *Riemannian DNA, Inequalities and Their Applications*, Tamkang Journal of Science and Engineering **Vol. 3, No. 3** (2000), 123-130.

[17] Chen, B.-Y., *δ-Invariants, Inequalities of Submanifolds and their Applications*, in *Topics in Differential Geometry*, A. Mihai, I. Mihai, R. Miron (Eds.), Editura Academiei Române, Bucharest, 2008.

[18] Chen, B.-Y., *An optimal inequality for CR-warped products in complex space forms involving CR δ-invariant*, Internat. J. Math. **23(3)** (2012), 1250045 (17 pages).

[19] Chen, B.-Y., Dillen, F., Van der Veken, J., Vrancken, L., *Curvature inequalities for Lagrangian submanifolds: the final solution*, Differential Geom. Appl. **31**(6) (2013), 808-819.

[20] Chen, B.-Y., Dillen, F., Verstraelen L. and Vrancken, L., *Totally real submanifolds of* CP^n *satisfying a basic equality*, Arch. Math. **63** (1994), 553-564.

[21] Choi, T. and Lu, Z. *On the DDVV conjecture and the comass in calibrated geometry I*, Math. Z. **260** (2008), 409-429.

[22] De Smet, P.J., Dillen, F., Verstraelen, L. and Vrancken, L., *A pointwise inequality in submanifold theory*, Arch. Math. (Brno) **35** (1999), 115-128.

[23] **Ghişoiu, G., Ghişoiu, V. and Macsim, G.**, *Generalized Wintgen inequality for Lagrangian submanifolds in generalized complex space forms*, trimis spre publicare.

[24] **Ghişoiu, V. and Macsim, G.**, *Generalized Wintgen inequality for submanifolds in generalized Sasaki space forms*, trimis spre publicare.

[25] Guadalupe, I.V. and Rodriguez, L. *Normal curvature of surfaces in space forms*, Pacific J. Math. **106** (1983), 95-103.

[26] Ishihara, S., *Quaternion Kaehlerian manifolds*, J. Differ. Geom. **9** (1974), 483-500.

[27] Kim, J.S., Song, Y.M. and Tripathi, M.M., *B.-Y. Chen's inequalities for submanifolds in generalized complex space forms*, Far East J. Math. Sci. **3**(4) (2001), 645-655.

[28] Kim, J.K., Song, Y.M. and Tripathi, M.M., *B.-Y. Chen inequalities for submanifolds in generalized complex space forms*, Bull. Korean Math. Soc. **40** (2003), 411-423.

[29] Lu, Z., *Normal scalar curvature conjecture and its applications*, J. Funct. Anal. **261** (2011), 1284-1308.

[30] **Macsim, G.**, *Improved Chen's inequalities for Lagrangian submanifolds in quaternionic space forms*, Romanian J. Math. Comp. Sci. **6** (2016), 61-84.

[31] **Macsim, G. and Ghişoiu, V.**, *Generalized Wintgen inequality for Lagrangian submanifolds in quaternionic space forms*, to appear in Math. Inequal. Appl.

[32] **Macsim, G. and Ghişoiu, V.**, *Optimal inequalities involving Casorati curvature for Lagrangian submanifolds in quaternionic space forms*, trimis spre publicare.

[33] **Macsim, G. and Mihai, A.**, *An optimization method for improved Chen inequalities*, Proceedings of Mathematics and Educational Symposium of Department of Mathematics and Computer Sciences, Technical University of Civil Engineering Bucharest, The 2nd edition, May 28, 2016, 75-80.

[34] **Macsim, G. and Mihai, A.**, *A CR $\delta-$ invariant for quaternionic CR-submanifolds in quaternionic space forms*, The 14th Workshop of Scientific Communications, Department of Mathematics and Computer Science, Technical University of Civil Engineering Bucharest, May 27, 2017, 66-71.

[35] **Macsim, G. and Mihai, A.**, *An inequality on quaternionic CR-submanifolds*, Ann. Univ. Ovidius Constanţa **26**(3) (2018), 181-196.

[36] **Macsim, G. and Mihai, A.**, *A $\delta-$invariant for QR-submanifolds in quaternion space forms*, Int. Electron. J. Geom. **11**(2) (2018), 8-17.

[37] **Macsim, G. and Mihai, A.**, *A constrained maxima method for improving certain Chen inequalities*, submitted.

[38] **Macsim, G., Mihai, A. and Olteanu A.**, *On rectifying-type curves in a Myller configuration*, Bull. Korean Math. Soc. **56**(2) (2019), 383-390.

[39] Mihai, A., *Geometric inequalities for purely real submanifolds in complex space forms*, Results Math. **55** (2009), no. 3-4, 457-468.

[40] Mihai, A., *An inequality for totally real surfaces in complex space forms*, Kragujevac J. Math. **26** (2004), 83-88.

[41] Mihai, I., *Geometria Subvarietăţilor în Varietăţi Complexe*, Editura Universităţii Bucureşti, 2001.

[42] Mihai, I., *On the generalized Wintgen inequality for Lagrangian submanifolds in complex space forms*, Nonlinear Anal. **95** (2014), 714-720.

[43] Nash, J.F., *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. Math. **63** (1956), 20-63.

[44] Oiagă, A. and Mihai, I., *B. Y. Chen inequalities for slant submanifolds in complex space forms*, Demonstratio Math. **32** (1999), 835-846.

[45] Olteanu, A., *Recent results in the geometry of warped product submanifolds*, Matrix Rom, Bucureşti, (2011).

[46] Osserman, R., *Curvature in the eighties*, Amer. Math. Monthly, Vol. 97 (1990), 731-754.

[47] Rouxel, B., *Sur une famille des $A-$surfaces d'un espace Euclidien $\mathbb{E}^4$*, Ősterreischer Mathematiker Kongress, Insbruck, 1981, p.185.

[48] Şahin, B., *On QR-submanifolds of a quaternionic space forms*, Turkish J. Math. **25** (2001), 413-425.

[49] Wintgen, P., *Sur l'inégalité de Chen-Willmore*, C.R.Acad.Sci., Paris Sér.A-B **288** (1979), A993-A995.