Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Şcoala Doctorală de Matematică

Rezumatul Tezei de Doctorat

Contribuţii la studiul algebrelor multigraduate asociate unor obiecte combinatoriale

Coordonator ştiinţific:
Prof. Dr. Viviana Ene

Student doctorand:
Andrei (Ciobanu) Claudia-Elena

Bucureşti
2019

Prezentarea tezei şi a rezultatelor originale

Nucleul acestei teze este construit pe baza a trei lucrări, [1], [2] şi [3]. Tema principală constă in a asocia obiecte multigraduate din algebra comutativă şi anume, inele şi ideale, cu obiecte combinatoriale, precum complexe simpliciale şi grafuri.

În prima parte a acestei teze, atenţia noastră este indreptată spre studiul anumitor clase de ideale torice şi anume, ideale asociate polyomino-urilor convexe. Un polyomino $\mathcal{P}$ este o mulţime finită conexă de celule adiacente in planul cartezian $\mathbb{N}^2$, unde o celulă in $\mathbb{N}^2$ reprezintă un pătrat unitar. Prima legătură a polyomino-urilor cu algebra comutativă a apărut in [45]. În această lucrare, fiecărui polyomino i se asociază idealul generat de 2-minorii săi şi inelul cât modulo acest ideal, numit inelul de coordonate al polyomino-ului. In aceeaşi lucrare, s-a demonstrat că dacă $\mathcal{P}$ este un polyomino convex, atunci inelul de coordonate al lui $\mathcal{P}$ este un domeniu normal Cohen-Macaulay. Acest fapt s-a realizat prin interpretarea inelului de coordonate al lui $\mathcal{P}$ ca inelul muchie al unui anumit graf bipartit $G_{\mathcal{P}}$ asociat lui $\mathcal{P}$.

Noi urmăm această direcţie de cercetare şi contribuim la studiul proprietăţilor inelului de coordonate al unui polyomino convex. Mai exact, clasificăm toate polyomino-urile convexe ce au inelul de coordonate Gorenstein, calculăm regularitatea Castelnuovo-Mumford pentru inelul de coordonate al unui polyomino stivă in termeni de cel mai mic interval ce conţine vârfurile sale şi dăm o formulă recursivă pentru calculul multiplicităţii inelului de coordonate al unui polyomino stivă.

În a doua parte a acestei teze, studiem idealele monomiale libere de pătrate şi anume, idealele monomiale t-spread ce au fost introduse recent in [22]. În aceasta lucrare, V. Ene, J. Herzog şi A. Qureshi au demonstrat că fiecare ideal t-spread puternic stabil este liniar pe componente. De asemenea, au dat formule pentru calculul numerelor Betti graduate şi a inălţimii şi au determinat idealul iniţial generic asociat unui ideal t-spread puternic stabil. In această direcţie de cercetare, noi avem lucrările [3] şi [2]. În [3], introducem f_t-vectorul asociat unui ideal t-spread şi un nou t-operator pentru demostraţia Teoremei Kruskal-Katona pentru ideale t-spread puternic stabile. Arătăm că fiecare ideal t-spread puternic stabil are asociat un unic ideal t-spread lexicografic cu acelaşi f_t-vector. Rezultatul principal in [3] oferă o clasificare completă a şirurilor de numere naturale ce sunt f_t-vectorii unor ideale t-spread puternic stabile.

În lucrarea [2], obţinem noi proprietăţi pentru idealele t-spread Borel principale, precum proprietatea de persistenţă puternică şi aceea de a fi secvenţial Cohen-Macaulay. De asemenea, demonstrăm că un ideal t-spread puternic stabil are proprietatea de ℓ-schimb in raport cu o anumită ordine de sortare, ceea ce implică faptul că un ideal t-spread Borel principal satisface condiţia x. Cu alte cuvinte, toate puterile unui astfel de ideal au câturi liniare. În final, caracterizăm comportamentul la limită pentru depth-ul puterilor de ideale t-spread Borel pricipale.

Primul capitol incepe cu o scurtă descriere a complexelor simpliciale. Reamintim câteva metode de clasificare a complexelor simpliciale Cohen-Macaulay şi câteva proprietăţi ale inelelor Stanley-Reisner prin intermediul dualităţii Alexander. Apoi, oferim câteva definiţii de bază şi proprietăţi cunoscute depre inele şi ideale torice. În final, ne indreptăm atenţia spre comportamentul primelor asociate puterilor de ideale monomiale. Aceste proprietăţi

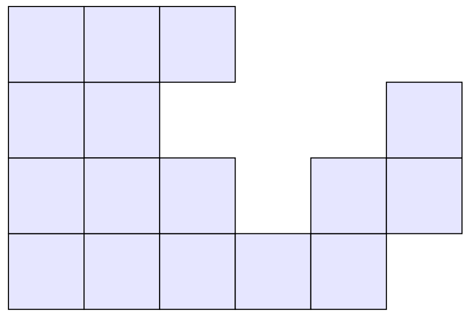


Figure 1: Un polyomino

vor fi folosite de-a lungul celorlalte capitole din teză.

2. Proprietăţi ale inelului de coordonate al unui polyomino convex. Rezultate principale

În acest capitol clasificăm toate polyomino-urile convexe ce au inelul de coordonate Gorenstein, calculăm regularitatea Castelnuovo-Mumford pentru inelul de coordonate al unui polyomino stivă in termeni de cel mai mic interval ce conţine vârfurile sale şi dăm o formulă recursivă pentru calculul multiplicităţii inelului de coordonate al unui polyomino stivă.

Fie $\mathcal{P}$ o colecţie finită de celule din $\mathbb{N}^2$. Două celule A şi B din $\mathcal{P}$ sunt *conectate*, dacă există un şir de celule din $\mathcal{P}$, $A = A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$, astfel incât $A_i \cap A_{i+1}$ este muchie in A_i şi A_{i+1} pentru orice $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Un astfel de şir se numeşte *drum* de legătură intre celulele A şi B.

Definiţie 1. *[45] O colecţie de celule din $\mathcal{P}$ se numeşte polyomino dacă orice două celule din $\mathcal{P}$ sunt conectate.*

Definiţie 2. *[45] Un polyomino $\mathcal{P}$ se numeşte* convex *pe linii (respectiv coloane) dacă pentru orice doua celule A şi B din $\mathcal{P}$ cu colţul din stânga jos $a = (i, j)$ şi $b = (k, j)$ (respectiv $a = (i, j)$ şi $b = (i, l)$), intervalul orizontal (respectiv vertical) de celule $[A, B]$ este conţinut in $\mathcal{P}$*

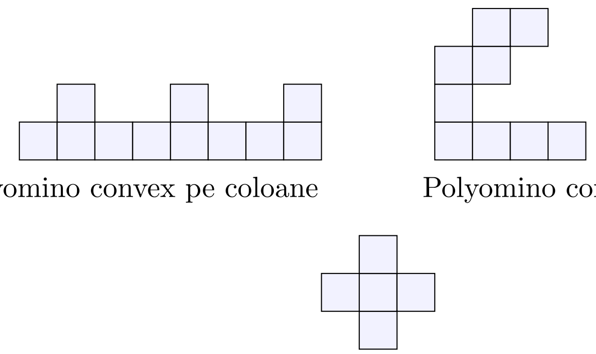
Dacă $\mathcal{P}$ este convex pe linii şi pe coloane, atunci $\mathcal{P}$ se numeşte convex.

In Figura 2, dăm un exemplu de polyomino convex pe coloane (linii) ce nu este convex pe linii (coloane). Cel de-al treilea polyomino din această figură este un polyomino convex.

Fie $\mathcal{P}$ un polyomino convex. După o posibilă translaţie in plan, considerăm

$$[(1, 1), (m, n)]$$

a fi cel mai mic interval ce conţine vârfurile lui $\mathcal{P}$. În acest caz, spunem că $\mathcal{P}$ este un polyomino convex pe $[m] \times [n]$, unde $[m] = \{1, \ldots, m\}$ şi $[n] = \{1, \ldots, n\}$.



Polyomino convex pe coloane Polyomino convex pe linii

Polyomino convex

Figure 2: Polyomino-uri

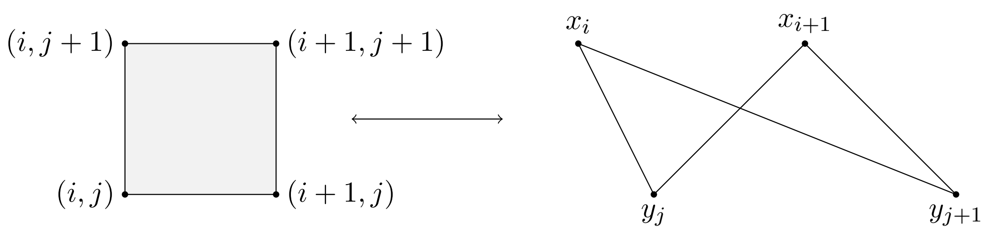


Figure 3: Graful bipartit asociat unei celule in $\mathbb{N}^2$

Fixăm corpul $\mathbb{K}$ şi inelul de polinoame $S = \mathbb{K}[x_{ij} \mid (i,j) \in V(\mathcal{P})]$. Considerăm idealul $I_{\mathcal{P}} \subset S$ generat de toate binoamele $x_{il}x_{kj} - x_{ij}x_{kl}$ pentru care $[(i,j),(k,l)]$ este un interval in $\mathcal{P}$. $\mathbb{K}$-algebra $S/I_{\mathcal{P}}$ se notează cu $\mathbb{K}[\mathcal{P}]$ şi se numeşte *inelul de coordonate* al lui $\mathcal{P}$. Conform [45, Theorem 2.2], $\mathbb{K}[\mathcal{P}]$ este un domeniu normal Cohen-Macaulay.

Fie $\mathcal{P}$ un polyomino convex pe $[m] \times [n]$. Inelul $R = \mathbb{K}[x_iy_j \mid (i,j) \in V(\mathcal{P})] \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$ este inelul muchie al unui graf bipartit $G_{\mathcal{P}}$ cu mulţimea de vârfuri $V(G_{\mathcal{P}}) = X \cup Y$, unde $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ şi $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ şi mulţimea de muchii $E(G_{\mathcal{P}}) = \{\{x_i, y_j\} \mid (i,j) \in V(\mathcal{P})\}$. În Figura 3, prezentăm graful bipartit asociat unei celule din $\mathbb{N}^2$. Conform [45], $\mathbb{K}[\mathcal{P}] = \mathbb{K}[G_{\mathcal{P}}]$.

Fixăm $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ şi $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ şi, dacă este nevoie, identificăm punctul (x_i, y_j) in plan cu vârful $(i,j) \in V(\mathcal{P})$.

Propoziţia 3. *Fie $\mathcal{P}$ un polyomino convex pe $[m] \times [n]$. Atunci graful bipartit $G_{\mathcal{P}}$ este 2-conex.*

Definiţie 4. *Fie $\mathcal{P}$ un polyomino convex pe $[m] \times [n]$ şi $T \subset X$. Mulţimea $N_Y(T) = \{y \in Y \mid$ există $x \in T$ astfel incât $(x,y) \in V(\mathcal{P})\}$ se numeşte interval vertical de vecini dacă $N_Y(T) = \{y_a, y_{a+1}, \ldots, y_b\}$ cu $a < b$ şi pentru orice $i \in \{a, a+1, \ldots, b-1\}$ există $x \in T$ astfel incât $[(x, y_i), (x, y_{i+1})]$ este o muchie in $\mathcal{P}$.*

In polyomino-ul din Figura 4, dacă $T_1 = \{x_1, x_4\}$ şi $T_2 = \{x_1, x_2\}$, atunci $N_Y(T_1) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = N_Y(T_2)$. Observăm că $N_Y(T_2)$ este un interval vertical de vecini, in timp ce $N_Y(T_1)$ nu are această proprietate.

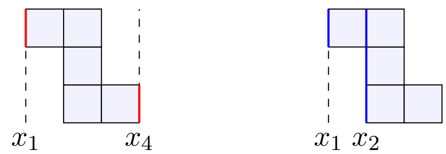


Figure 4: (Non-)Interval vertical de vecini

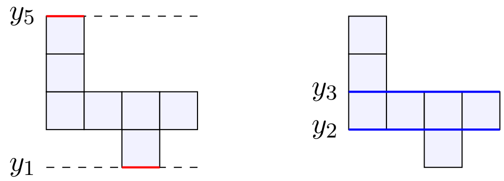


Figure 5: (Non-)Interval orizontal de vecini

Definiţie 5. *Fie $\mathcal{P}$ un polyomino convex pe $[m] \times [n]$ şi $U \subset Y$. Mulţimea $N_X(U) = \{x \in X \mid \text{ există } y \in U \text{ astfel incât } (x, y) \in V(\mathcal{P})\}$ se numeşte interval orizontal de vecini dacă $N_X(U) = \{x_a, x_{a+1}, \ldots, x_b\}$ cu $a < b$ şi pentru orice $i \in \{a, a+1, \ldots, b-1\}$ există $y \in U$ astfel incât $[(x_i, y), (x_{i+1}, y)]$ este o muchie in $\mathcal{P}$.*

In polyomino-ul din Figura 5, fie $U_1 = \{y_2, y_3\}$ şi $U_2 = \{y_1, y_5\}$. Observăm că $N_X(U_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ este un interval orizontal de vecini, in timp ce $N_X(U_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ nu este.

Teorema 6. *Fie $\mathcal{P}$ un polyomino convex pe $[m] \times [n]$.*
Atunci $\mathbb{K}[\mathcal{P}]$ este Gorenstein dacă şi numai dacă următoarele condiţii sunt indeplinite:

1. *$|U| \leq |N_X(U)|$ pentru orice $U \subset Y$ şi $|T| \leq |N_Y(T)|$ pentru orice $T \subset X$;*
2. *Pentru orice $\emptyset \neq T \subsetneq X$ cu proprietăţile*
   (a) *$N_Y(T)$ este un interval vertical de vecini,*
   (b) *$N_X(Y \setminus N_Y(T)) = X \setminus T$ este un interval orizontal de vecini,*

   are loc egalitatea $|N_Y(T)| = |T| + 1$.

Considerăm $\mathcal{P}$ un polyomino şi presupunem că $[(1,1),(m,n)]$ este cel mai mic interval ce conţine vârfurile lui $\mathcal{P}$. Atunci $\mathcal{P}$ se numeşte *polyomino stivă* dacă este un polyomino convex şi pentru orice $i \in [m-1]$, celula $[(i,1),(i+1,2)]$ aparţine lui $\mathcal{P}$.

Teorema 7. *Dacă $\mathcal{P}$ este un polyomino stivă pe $[m] \times [n]$, atunci a-invariantul lui $\mathbb{K}[\mathcal{P}]$ este $-\max\{m,n\}$.*

Corolar 8. *Dacă $\mathcal{P}$ este un polyomino stivă pe $[m] \times [n]$, atunci regularitatea Castelnuovo-Mumford a lui $\mathbb{K}[\mathcal{P}]$ este $\min\{m,n\} - 1$.*

Fie $\mathcal{P}$ un polyomino stivă pe $[m] \times [n]$. Pentru orice $i \in [m]$, definim *height* de i ca

$$\text{height}(i) = \max\{j \in [n] \mid (i,j) \in V(\mathcal{P})\}.$$

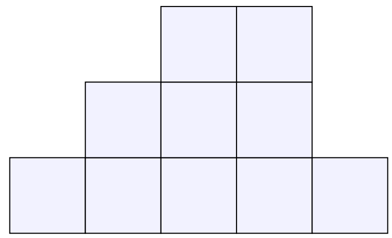


Figure 6: Un polyomino stivă

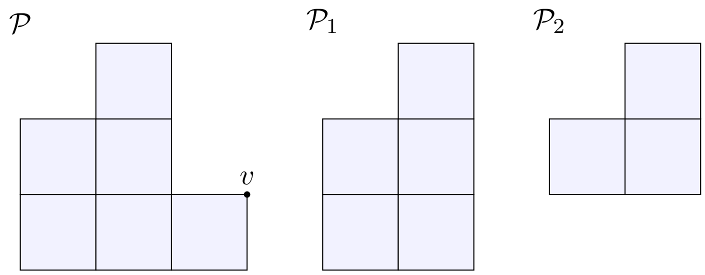


Figure 7: Multiplicitatea lui $\mathbb{K}[\mathcal{P}]$

Urmând demonstraţia [44, Teorema], considerăm o ordine totală pe mulţimea variabilelor x_{ij}, cu $(i,j) \in V(\mathcal{P})$, după cum urmează:

$$x_{ij} > x_{kl} \text{ dacă şi numai dacă} \tag{1}$$

$$(\text{height}(i) > \text{height}(k)) \text{ sau } (\text{height}(i) = \text{height}(k) \text{ şi } i > k) \text{ sau } (i = k \text{ şi } j > l).$$

Fie $<$ ordinea invers lexicografică indusă de această ordine a variabilelor.

Teorema 9. *Fie $\mathcal{P}$ un polyomino stack pe $[m] \times [n]$ şi $v = (i,j) \in V(\mathcal{P})$ cu proprietăţile:*

1. *x_{i1} este cea mai mică variabilă in S şi*
2. *$j = \text{height}(i)$.*

Considerăm $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$ următoarele polyomino-uri:

1. *$\mathcal{P}_1$ este polyomino-ul obţinut din $\mathcal{P}$ prin ştergerea celulei ce conţine vârful v dacă $i = 1$. Altfel, $\mathcal{P}_1$ este dat prin ştergerea celulei din $\mathcal{P}$ ce conţine vârful $(m, \text{height}(m))$.*
2. *$\mathcal{P}_2$ este polyomino-ul obţinut din $\mathcal{P}$ prin ştergerea tuturor celulelor din $\mathcal{P}$ ce se află sub intervalul muchie orizontal ce conţine vârful v.*

Atunci multiplicitatea lui $\mathbb{K}[\mathcal{P}]$ are următoarea formulă recursivă.

$$e(\mathbb{K}[\mathcal{P}]) = e(\mathbb{K}[\mathcal{P}_1]) + e(\mathbb{K}[\mathcal{P}_2]).$$

În Figura 7, prezentăm primul pas in calculul multiplicităţii lui $\mathbb{K}[\mathcal{P}]$.

3. Ideale monomiale t-spread. Rezultate principale

În acest capitol, studiem idealele t-spread puternic stabile cu $t \geq 1$. Ele au fost recent introduse in [22] şi reprezintă o clasă specială de ideale monomiale libere de pătrate.

În prima parte, demonstrăm că orice ideal t-spread puternic stabil are asociat un unic ideal t-spread lexicografic cu acelaşi f_t-vector. Acest rezultat este un pas important in caracterizarea posibililor f_t-vectori asociaţi idealelor t-spread puternic stabile in analogul t-spread al Teoremei Kruskal-Katona.

În ultima parte, studiem idealele t-spread Borel principale. De fapt, determinăm in mod explicit toţi generatorii idealului Stanley-Reisner asociat dualului Alexander $\Delta^{\vee}$, unde Δ este complexul simplicial corespunzător idealului t-spread Borel principal. Din descrierea acestor generatori, deducem că idealul Stanley-Reisner al lui $\Delta^{\vee}$ are câturi liniare, ceea ce arată că un ideal t-spread Borel principal este secvenţial Cohen-Macaulay.

Fixăm corpul $\mathbb{K}$ şi inelul de polinoame $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Fie t un intreg pozitiv. Un monom $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_d} \in S$ cu $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_d$ se numeşte *t-spread* dacă $i_j - i_{j-1} \geq t$ pentru $2 \leq j \leq d$. Un ideal monomial in S se numeşte *ideal monomial t-spread* dacă este generat de monoame t-spread.

Fie $I \subset S$ un ideal monomial t-spread. Notăm cu I_j, componenta graduată de grad j a lui I şi numim mulţimea monoamelor t-spread din I_j, partea t-spread a lui I_j. Notăm partea t-spread a lui I_j cu $[I_j]_t$. Mai mult, fixăm

$$f_{t,j-1}(I) = |[S_j]_t| - |[I_j]_t|.$$

Atunci vectorul

$$\mathbf{f}_t(I) = (f_{t,-1}(I), f_{t,0}(I) \ldots, f_{t,j}(I), \ldots)$$

se numeţe *f_t-vectorul* idealului monomial t-spread I. Prin convenţie, fixăm $f_{t,-1} = 1$.

Observăm că dacă $t = 1$, atunci I este idealul Stanley-Reisner al complexului simplicial Δ şi $\mathbf{f}_1(I)$ este f-vectorul clasic al lui Δ.

Notăm cu $M_{n,d,t}$ mulţimea monoamelor t-spread de grad d in inelul de polinoame S. Pentru un monom $u \in S$, fixăm $\text{supp}(u) = \{i : x_i \mid u\}$.

Definiţie 10. *(a) O submulţime $L \subset M_{n,d,t}$ se numeţe* t-spread puternic stabilă*, dacă pentru orice monom t-spread $u \in L$, orice $j \in \text{supp}(u)$ şi orice $1 \leq i < j$ astfel incât $x_i(u/x_j)$ este un monom t-spread, avem $x_i(u/x_j) \in L$.*

(b) Fie I un ideal monomial t-spread. Atunci I se numeşte t-spread puternic stabil*, dacă $[I_j]_t$ este o mulţime t-spread puternic stabilă pentru orice j.*

O clasă specială de ideale t-spread puternic stabile este dată de idealele t-spread lexicografice.

Definiţie 11. *(a) O submulţime $L \subset M_{n,d,t}$ se numeşte* t-spread lexicografică*, dacă pentru orice $u \in L$ şi orice $v \in M_{n,d,t}$ cu $v >_{\text{lex}} u$, avem $v \in L$.*

(b) Fie I un ideal monomial t-spread. Atunci I se numeşte t-spread lexicografic*, dacă $[I_j]_t$ este o mulţime t-spread lexicografică pentru orice j.*

Fie $I \subset S$ un ideal monomial t-spread puternic stabil. Atunci un ideal t-spread lexicografic $J \subset S$ cu $\mathbf{f}_t(I) = \mathbf{f}_t(J)$, dacă există, este unic determinat. Idealul J il notăm cu $I^{\text{t-lex}}$.

Teorema 12. *Pentru orice ideal monomial t-spread puternic stabil I, idealul monomial t-spread lexicografic $I^{\text{t-lex}}$ există.*

În general, un ideal monomial t-spread nu are intotdeauna asociat un ideal monomial t-spread lexicografic cu acelaşi f_t-vector.

De exemplu, dacă $I = (x_2x_8, x_2x_6, x_2x_4) \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_8]$, atunci

$$B_2 = L_2 = \{x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\} \text{ şi } |\operatorname{Shad}_2(B_2)| = 9 > 5 = |[I_3]_2|,$$

ceea ce duce la imposibilitatea construirii unui ideal monomial 2-spread lexicografic cu acelaşi f_2-vector cu I.

Observaţia 13. *Întrucât fiecare ideal monomial liber de pătrate are asociat un ideal liber de pătrate lexicografic cu acelaşi f-vector, demonstraţia Teoremei Kruskal-Katona dată in [30] rămâne valabilă pentru orice ideal monomial liber de pătrate. În cazul t-spread, un ideal monomial t-spread nu are intotdeauna asociat un ideal t-spread lexicografic cu acelaşi f_t-vector. Prin urmare, rezultatul va fi demonstrat doar pentru ideale t-spread puternic stabile.*

Teorema Kruskal-Katona pentru ideale t-spread puternic stabile oferă un răspuns complet pentru următoarea intrebare: Când un şir de numere naturale

$$f_t = (f_{t,-1}, f_{t,0}, f_{t,1}, \ldots, f_{t,d}, \ldots)$$

este f_t-vectorul unui ideal t-spread puternic stabil?

Pentru a răspunde la această intrebare, am urmat paşi similari celor daţi in demonstraţia Teoremei Kruskal-Katona din [30, Capitolul 6].

Definiţie 14. *Fie n, d, t şi a numere intregi pozitive cu $a \leq \binom{n-(d-1)(t-1)}{d}$. Dacă*

$$a = \binom{a_d}{d} + \binom{a_{d-1}}{d-1} + \cdots + \binom{a_r}{r}$$

este expansiunea binomială a lui a in raport cu d, atunci fixăm

$$a_{r-1} = r - 2,\ a_{d+1} = n - (d-1)(t-1) \text{ şi } a_{d+2} = a_{d+1} + (t+1)$$

şi definim

$$a^{[d]_t} := a^{[d]_t^k},$$

unde k este cel mai mare intreg din intervalul $[-1, d-r+1]$ cu proprietatea că $a_{d-k+1} - a_{d-k} \geq t+1$ şi

$$a^{[d]_t^k} := \sum_{j=d+1-k}^{d} \binom{a_j - (t-1)}{j+1} + \binom{a_{d-k} - (2t-1)}{d-k+1} + \sum_{j=r}^{d-k} \binom{a_j}{j}$$

pentru orice $k \geq 0$ şi

$$a^{[d]_t^{-1}} := \binom{n - d(t-1)}{d+1}.$$

Prin convenţie, fixăm $0^{[d]_t} = 0$ pentru orice numere naturale d şi t.

Teorema 15. *Fie $f = (f(0), f(1), \ldots, f(d), \ldots)$ un şir de numere naturale şi $t \geq 1$ un intreg pozitiv. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) *există un număr natural n şi un ideal t-spread puternic stabil*

$$I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

astfel incât $f(d) = f_{t,d-1}(I)$ pentru orice d.

(2) *$f(0) = 1$ şi $f(d+1) \leq f(d)^{[d]_t}$ pentru orice $d \geq 1$.*

Fie t un intreg pozitiv. Un ideal monomial $I \subset S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ se numeşte *t-spread Borel principal* dacă există un monom $u \in G(I)$ astfel incât I este cel mai mic ideal t-spread puternic stabil ce conţine u. Conform [22], notăm $I = B_t(u)$.

Fie Δ complexul simplicial pentru care $I_\Delta = B_t(u)$. Considerăm $I^\vee$ idealul Stanley-Reisner asociat dualului Alexander al lui Δ.

Teorema 16. *Fie $t \geq 1$ un număr intreg şi $I = B_t(u)$, unde $u = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d} \in S$ este un monom t-spread. Presupunem că $i_d = n$. Atunci $I^\vee$ este generat de următoarele tipuri de monoame*

$$\prod_{k=1}^{n} x_k / (v_{j_1} \cdots v_{j_{d-1}}) \tag{2}$$

cu $j_l \leq i_l$ pentru $1 \leq l \leq d-1$ şi $j_l - j_{l-1} \geq t$ pentru $2 \leq l \leq d-1$, unde $v_{j_k} = x_{j_k} \cdots x_{j_k+(t-1)}$ pentru $1 \leq k \leq d-1$.

$$\prod_{k=1}^{i_1} x_k. \tag{3}$$

$$\prod_{k=1}^{i_s} x_k / (v_{j_1} \cdots v_{j_{s-1}}) \tag{4}$$

cu $2 \leq s \leq d-1$, $j_l \leq i_l$ pentru $1 \leq l \leq s-1$, $j_l - j_{l-1} \geq t$ pentru $2 \leq l \leq s-1$, unde $v_{j_k} = x_{j_k} \cdots x_{j_k+(t-1)}$ pentru $1 \leq k \leq s-1$.

Teorema 17. *Fie $t \geq 1$ un număr intreg şi $u = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d} \in S$ un monom t-spread. Presupunem că $i_d = n$. Atunci idealul t-spread Borel principal $I = B_t(u)$ este secvenţial Cohen-Macaulay.*

4. Puteri de ideale t-spread Borel principale. Rezultate principale

În prima parte a acestui capitol, studiem baza Gröbner a idealului de prezentare a algebrei Rees asociate unui ideal t-spread Borel principal. Forma binoamelor din baza Gröbner arată că toate puterile unui ideal t-spread Borel principal au câturi liniare şi că algebra Rees asociată unui astfel de ideal este un domeniu normal Cohen-Macaulay, ceea ce implică proprietatea de persistenţă puternică pentru ideale t-spread Borel principale.

În ultima parte, studiem comportamentul la limită pentru depth-ul puterilor de ideale t-spread Borel principale.

Fixăm corpul $\mathbb{K}$ şi inelul de polinoame $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Pentru două monoame $v, w \in S$ de grad d, scriem $vw = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{2d}}$ cu $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{2d}$. Atunci *sortarea* perechii (v, w) este perechea de monoame (v', w'), unde $v' = x_{i_1}x_{i_3}\cdots x_{i_{2d-1}}$ şi $w' = x_{i_2}x_{i_4}\cdots x_{i_{2d}}$. Aplicaţia

$$\mathrm{sort} : S_d \times S_d \to S_d \times S_d$$

cu $\mathrm{sort}(v, w) = (v', w')$ se numeşte *operator de sortare.*

O submulţime $B \subset S_d$ se numeşte *sortabilă* dacă $\mathrm{sort}(B \times B) \subset B \times B$.

Propoziţia 18. *[22, Propoziţia 3.1] Fie $t \geq 1$ un intreg şi $I = B_t(u)$, unde $u = x_{i_1}\cdots x_{i_d}$ este un monom t-spread. Sistemul minimal de generatori al lui I este o mulţime sortabilă.*

Teorema 19. *[48, Teorema 14.2] [20, Teorema 6.15] Fie B o mulţime sortabilă de monoame din S de acelaşi grad şi*

$$\mathcal{F} = \{t_u t_v - t_{u'}t_{v'} : u, v \in B, (u, v) \text{ nesortate, } (u', v') = \mathrm{sort}(u, v)\} \subset \mathbb{K}[t_u : u \in B].$$

Atunci există o ordine monomială $<$ pe $\mathbb{K}[t_u : u \in B]$ ce se numeşte ordine de sortare*, astfel incât pentru orice $g = t_u t_v - t_{u'}t_{v'} \in \mathcal{F}$, $\mathrm{in}_<(g) = t_u t_v$.*

Fie $I \subset S$ un ideal monomial generat intr-un singur grad şi $\mathbb{K}[\{t_u : u \in G(I)\}]$ inelul de polinoame in $|G(I)|$ variabile inzestrat cu o ordine monomială $<$. Fie P nucleul morfismului de K-algebre

$$\mathbb{K}[\{t_u : u \in G(I)\}] \to \mathbb{K}[G(I)], t_u \mapsto u, u \in G(I).$$

Un monom $t_{u_1}\cdots t_{u_N}$ se numeşte *standard in raport cu* $<$, dacă nu aparţine lui $\mathrm{in}_<(P)$.

Definiţie 20. *[33, Definiţia 4.1] Idealul monomial $I \subset S$ indeplineşte proprietatea de ℓ-schimb in raport cu $<$ dacă are loc următoarea condiţie: pentru orice $t_{u_1}\cdots t_{u_N}, t_{v_1}\cdots t_{v_N}$ monoame standard in raport cu $<$ de acelaşi grad N ce satisfac*

(i) $\deg_{x_i} u_1\cdots u_N = \deg_{x_i} v_1\cdots v_N$ *pentru $1 \leq i \leq q-1$ cu $q \leq n-1$ şi*

(ii) $\deg_{x_q} u_1\cdots u_N < \deg_{x_q} v_1\cdots v_N$,

există intregii δ, j cu $q < j \leq n$ şi $j \in \mathrm{supp}(u_\delta)$ astfel incât $x_q u_\delta / x_j \in I$.

Propoziţia 21. *Fie $u = x_{i_1}\cdots x_{i_d} \in S$ un monom t-spread. Atunci idealul t-spread Borel principal $B_t(u)$ satisface proprietatea de ℓ-schimb in raport cu ordinea de sortare $<_{\mathrm{sort}}$.*

Fie $I = B_t(u) \subset S$, unde $u \in S$ este un monom t-spread.

Considerăm $\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{j\geq 0} I^j t^j$ algebra Rees a lui I. Întrucât generatorii minimali ai lui I au acelaşi grad, fibra algebrei Rees, $\mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)$, este izomorfă cu $K[G(I)]$.

Fixăm ordinea de sortare $<_{\mathrm{sort}}$ pe inelul de polinoame $T = K[\{t_v : v \in G(I)\}]$ şi ordinea lexicografică $<_{\mathrm{lex}}$ pe inelul S. Fie $<$ ordinea monomială pe $R = S[\{t_v : v \in G(I)\}]$ definită in următorul mod: dacă m_1, m_2 sunt monoame din S şi v_1, v_2 sunt monoame din T, atunci

$$m_1 v_1 > m_2 v_2 \text{ dacă } m_1 >_{\mathrm{lex}} m_2 \text{ sau } m_1 = m_2 \text{ şi } v_1 >_{\mathrm{sort}} v_2.$$

Teorema 22. *Baza Gröbner redusă a idealului de prezentare J asociat algebrei Rees $\mathcal{R}(I)$ in raport cu $<$ constă dintr-o mulţime de binoame $t_v t_w - t_{v'} t_{w'}$, unde (v, w) este o pereche nesortată şi $(v', w') = \mathrm{sort}(v, w)$, impreună cu binoamele de forma $x_i t_v - x_j t_w$, unde $i < j$, $x_i v = x_j w$ şi j este cel mai mare intreg cu proprietatea că $x_i v / x_j \in G(I)$.*

Propoziţia 23. *Toate puterile lui $B_t(u)$ au câturi liniare. În particular, toate puterile lui $B_t(u)$ au rezoluţie liniară.*

Corolar 24. *Algebra Rees $\mathcal{R}(B_t(u))$ este Koszul.*

Corolar 25. *Algebra Rees $\mathcal{R}(B_t(u))$ este un domeniu normal Cohen-Macaulay. În particular, $B_t(u)$ satisface proprietatea de persistenţă puternică şi prin urmare, $B_t(u)$ indeplineşte proprietatea de persistenţă.*

Teorema 26. *Fie $t \geq 1$ un intreg şi $I = B_t(u) \subset S$ idealul t-spread Borel principal generat de $u = x_{i_1} \cdots x_{i_d}$, unde $t + 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{d-1} < i_d = n$. Atunci*

$$\operatorname{depth} \frac{S}{I^k} = 0, \text{ pentru } k \geq d.$$

În particular, răspândirea analitică a lui I este $\ell(I) = n$.

Corolar 27. *Fie $t \geq 1$ un intreg şi $B_t(u) \subset S$ idealul t-spread Borel principal generat de $u = x_{i_1} \cdots x_{i_d}$, unde $t + 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{d-1} < i_d = n$. Atunci $\dim K[G(B_t(u))] = n$.*

În ultimul capitol, prezentăm un rezumat al rezultatelor principale din cadrul acestei teze. De asemenea, oferim câteva intrebări interesante ce au ca punct de plecare aceste rezultate.

Bibliografie

[1] C. Andrei, *Properties of the coordinate ring of a convex polyomino*, https://arxiv.org/abs/1803.03801.

[2] C. Andrei, V. Ene, B. Lajmiri, *Powers of t-spread principal Borel ideals*, Arch. Math. **112** (6)(2019), 587–597.

[3] C. Andrei-Ciobanu, *Kruskal-Katona Theorem for t-spread strongly stable ideals*, to appear in Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.).

[4] P. Ballen, *Perfect graphs and perfect graph theorem*, http://www.cis.upenn.edu/ pballen/brinkmann.pdf.

[5] S. Bandari, J. Herzog, T. Hibi, *Monomial ideals whose depth function has any given number of strict local maxima*, Ark. Mat. **52** (2014), 11–19.

[6] B. Bollobás, *Modern graph theory*, Grad. Texts in Math. **184**, Springer, 1998.

[7] W. Bruns, A. Conca, *Gröbner bases and determinantal ideals*, Commutative Algebra, Singularities and Computer Algebra, (J. Herzog, V. Vuletescu Eds.), NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry **115**, Kluwer Academic Publishers (2003), 9–66.

[8] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Revised Ed., Cambridge University Press, 1998.

[9] W. Bruns, U. Vetter, *Determinantal rings*, Lecture Notes in Math., Springer, 1988.

[10] J. M. Bernal, S. Morey, R. H. Villarreal, *Associated primes of powers of edge ideals* Collect. Math. **63** (2012), 361–374.

[11] L. J. Billera, J. S. Provan, *A decomposition property for simplicial complexes and its relation to diameters and shellings*, Second International Conference on Combinatorial Mathematics (New York, 1978), New York Acad. Sci., New York, 1979, 82—85.

[12] M. Brodmann *Asymptotic stability of* $\mathrm{Ass}(M/I^nM)$. Proc. Am. Math. Soc. **74** (1979), 16—18.

[13] M. Brodmann *The asymptotic nature of the analytic spread.* Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **86** (1979), 35—39.

[14] CoCoATeam, *CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra*, Available at http://cocoa.dima.unige.it.

[15] A. Conca, *Ladder determinantal rings*, J. Pure Appl. Algebra **98** (1995), 119–134.

[16] G. Castiglione, A. Restivo, *Reconstruction of L-convex polyominoes*, Electron. Notes Discrete Math. **12** (2003), 290–301.

[17] R. Dinu, *Gorenstein t-spread Veronese algebras*, https://arxiv.org/abs/1901.01561.

[18] D. Eisenbud, B. Sturmfels, *Binomial ideals*, Duke Math. J. **84** (1996), 1–45.

[19] V. Ene, A. Olteanu, *Powers of lexsegment ideals with linear resolution*, Illinois J. Math. **56** no. 2 (2012), 533–549.

[20] V. Ene, J. Herzog, *Gröbner bases in commutative algebra*, Grad. Stud. Math. **130**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[21] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, *Liniarly related polyominoes*, J. Algebraic Combin. **41** (2015), 949–968.

[22] V. Ene, J. Herzog, A. A. Qureshi, *t-spread strongly stable monomial ideals*, to appear in Comm. Algebra.

[23] C. A. Francisco, J. Mermin, J. Schweig, *Borel generators*, J. Algebra **332** (2011), 522–542.

[24] C. A. Francisco, H. Tài Hà, A. Van Tuyl, *Colorings of hypergraphs, perfect graphs, and associated primes of powers of monomial ideals*, J. Algebra **331** (2011), 224—242.

[25] C. A. Francisco, H. Tài Hà, A. Van Tuyl, *A conjecture on critical graphs and connections to the persistence of associated primes.* Discrete Math. **310** (2010), 2176—2182.

[26] D. R. Fulkerson, *On the perfect graph theorem*, Technical Report **153**, 1972.

[27] G. M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, *Singular 2.0. A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern*, (2001), http://www.singular.uni-kl.de.

[28] M. Hachimori, *Decompositions of two-dimensional simplicial complexes*, Discrete Math. **308** (2008), 2307–2312.

[29] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley Ser. Comput. Sci. Inform. Process, 1972.

[30] J. Herzog, T. Hibi, *Monomial ideals*, Grad. Texts in Math. **260**, Springer, London, 2010.

[31] J. Herzog, T. Hibi, *Ideals generated by adjacent 2-minors*, J. Commut. Algebra **4** (2012), 525–549.

[32] J. Herzog, T. Hibi, F. Hreinsdóttir, T. Kahle, J. Rauf, *Binomial edge ideals and conditional independence statements*, Adv. in Appl. Math **45** (2010), 317–333.

[33] J. Herzog, T. Hibi, M. Vlădoiu, *Ideals of fiber type and polymatroids*, Osaka J. Math. **42** (2005), 807–829.

[34] J. Herzog, T. Hibi, H. Ohsugi, *Binomial ideals*, Grad. Stud. Math. **279**, Springer, 2018.

[35] J. Herzog, A. Rauf, M. Vlădoiu, *The stable set of associated prime ideals of a polymatroidal ideal*, J. Algebraic Combin. **37** (2013) 289—312.

[36] J. Herzog, A. Asloob Qureshi, *Persistence and stability properties of powers of ideals*, J. Pure Appl. Algebra **219** (2015), 530—542.

[37] J. Herzog, A. Asloob Qureshi, M. Mohammadi Saem, *The fiber cone of a monomial ideal in two variables*, J. Symbolic Comput. **94** (2019), 52–69.

[38] J. Herzog, N. V. Trung, *Gröbner bases and multiplicity of determinantal and Pfaffian ideals*, Adv. Math. **96** (1992), 1–37.

[39] G. Katona, *A theorem for finite sets*, P. Erdös and G. Katona (eds.), Theory of graphs, Academic Press, 1968, 187–207.

[40] J. Kruskal, *The number of simplices in a complex*, R. Bellman (eds.), Mathematical optimization techniques, University of California Press, 1963, 251–278.

[41] J. Loera, J. Rambau, F. Santos, *Triangulations, Structures for Alghorithms and Applications*, Algorithms and Computation in Mathematics **25**, Springer-Verlag (2010).

[42] S. Moriyama, F. Takeuchi, *Incremental construction properties in dimension two — shellability, extendable shellability and vertex decomposability*, Discrete Math. **263** (2003), 295–296.

[43] H. Ohsugi, T. Hibi, *Special simplices and Gorenstein toric rings*, J. Combin. Theory Ser. A **113** (2006), 718–725.

[44] H. Ohsugi, T. Hibi, *Koszul Bipartite Graphs*, Adv. Appl. Math. **22** (1999), 25–28.

[45] A. Qureshi, *Ideals generated by* 2*-minors, collections of cells and stack polyominoes*, J. Algebra **357** (2012), 279–303.

[46] L. J. Ratliff Jr., *On prime divisors of I^n, n large*, Michigan Math. J. **23** (1976), 337–352.

[47] R. P. Stanley, *The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings*, Stud. Appl. Math **54** (1975), 135–142.

[48] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[49] A. Van Tuyl, *A beginner's guide to edge and cover ideals, in Monomial Ideals, Computations and Applications*, (Castro Urdiales, 2011), Lecture Notes in Math. **2083** (2013), 63—94.

[50] C. E. Valencia, R. H. Villarreal, *Canonical modules of certain edge rings*, European J. Combin. **24** (2003) 471–487.

[51] W. V. Vasconcelos, *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic geometry*, Algorithms and Computation in Mathematics **2**, Springer-Verlag (1998).

[52] R. Villarreal, *Monomial Algebras*, Monogr. Res. Notes Math. **2**, CRC Press (2015).

[53] H. Wang, *A determinantal formula for the Hilbert series of determinantal rings of one-sided ladder*, J. Algebra **265** (2003), 79–99.