UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

ŞCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ

CONTRIBUŢII ÎN GEOMETRIA SUBVARIETĂŢILOR

(Rezumat)

CONDUCĂTOR ŞTIINŢIFIC:
PROF. UNIV. DR. ION MIHAI

DOCTORAND:

ILEANA PRESURĂ

BUCUREŞTI, 2017

1 Rezumat

Geometria de contact este corespondentul în dimensiune impară al geometriei complexe.

Atât geometria de contact, cât şi geometria simplectică sunt motivaţia formalismelor matematice ale mecanicii clasice, unde se poate considera, fie spaţiul fazelor de dimensiune pară al unui sistem mecanic sau spaţiul fazelor extins de dimensiune impară, incluzând variabila timp.

O varietate metrică de contact este o varietate de contact dotată cu o metrică asociată, numită metrică de contact. O clasă importantă de varietăţi metrice de contact este clasa varietăţilor Sasaki. Varietăţile Sasaki sunt înzestrate cu un câmp vectorial ξ, numit câmpul vectorial caracteristic sau câmpul vectorial Reeb, care generează o foliaţie de dimensiune unu. Dacă foile acestei foliaţii sunt compacte, atunci spaţiul tuturor foilor este un orbifold Kähler. Varietăţile Sasaki cu metrică riemanniană au fost introduse în 1960 de Shigeo Sasaki în [Sasaki(1960)]. Noţiunea a fost extinsă de T. Takahashi în 1969 la varietăţi cu metrici pseudo-riemanniene în [Takahashi(1969)].

Geometria de contact are numeroase aplicaţii în fizică, incluzând mecanica clasică, dinamică, optica geometrică şi teoria controlului.

Inspiraţi de teoria relativităţii generale, atât matematicienii, cât şi fizicienii, au studiat teoria subvarietăţilor în varietăţi riemanniene.

Subvarietăţile legendreene joacă un rol important în geometria de contact.
Studiul subvarietăţilor legendriene în forme spaţiale Sasaki din punctul de vedere al geometriei riemanniene a fost iniţiat în 1970. În particular, subvarietăţile legendreene minimale au fost studiate intensiv de mai mulţi geometri. Subvarietăţile legendreene în forme spaţiale Sasaki prezintă un deosebit interes în geometria de contact.

O subvarietate M^n într-o formă spaţială Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}$ normală la ξ se numeşte subvarietate *C-total reală*. Dacă $n = m$, i.e, M^n este de dimensiune maximă, atunci M^n se numeşte *subvarietate legendreană*.

Recent, Loubeau şi Montaldo [60] au introdus conceptul de subvarietate biminimală ca o extindere naturală a subvarietăţii minimale din punct de vedere al calculului variaţional.

O subvarietate minimală este biminimală. Reciproca nu este adevărată, în general. Toate suprafeţele biminimale nonminimale în forme spaţiale Sasaki au fost determinate în [90].

Tanno [98] a arătat că o formă spaţială Sasaki $N^{2n+1}(\epsilon)$, cu $\epsilon > 3$, este izomorfă cu $S^{2n+1}(\epsilon)$, adică există un C^∞-difeomorfism care transformă structurile tensoriale în structuri tensoriale corespunzătoare şi a obţinut următorul rezultat.

Fie M o subvarietate în S^{2n+1}. Atunci M este o subvarietate legendreană în $S^{2n+1}(1)$ dacă şi numai dacă M este o subvarietate legendreană în $S^{2n+1}(\epsilon)$.

Este cunoscut faptul că nu există subvarietăţi lagrangeene total ombilicale de dimensiune ≥ 2, în afară de cele total geodezice (conform [62], [107]). În [30], B.Y.Chen introduce conceptul de subvarietate lagrangeană H-ombilicală.

O subvarietate lagrangeană H-ombilicală într-o varietate Kähler $\widetilde{M}$ este o subvarietate lagrangeană, în care a doua formă fundamentală are următoarele forme:

$$h(e_1, e_1) = \lambda J e_1, \quad h(e_2, e_2) = \ldots = h(e_n, e_n) = \mu J e_1,$$

$$h(e_1, e_j) = \mu J e_j, \quad h(e_j, e_k) = 0, \quad j \neq k;\ j, k = 2, \ldots, n,$$

pentru funcţii convenabile λ şi μ, în raport cu un reper ortonormat $\{e_1, \ldots, e_n\}$, unde J reprezintă structura complexă a lui $\widetilde{M}$.

Clasa subvarietăţilor lagrangeene H-ombilicale conţine subvarietăţi importante, ca de exemplu, suprafeţe lagrangeene twistor în planul proiectiv complex ([22],[30]), sfera lui Whitney în spaţiul euclidian complex [29], etc.

În [95] toate subvarietăţile lagrangeene H-ombilicale biminimale nonminimale cu curbură medie constantă în forme spaţiale complexe au fost determinate.

Analog cu subvarietăţile lagrangeene, nu există subvarietăţi legendreene total ombilicale de dimensiune ≥ 2 într-o varietate Sasaki ([54]).

I. Mihai şi I.N. Rădulescu ([74]) au introdus versiunea legendreană a subvarietăţii lagrangeene H-ombilicale după cum urmează:

O subvariettate legendreană într-o varietate Sasaki se numeşte subvarietate legendreană H-ombilicală dacă a doua formă fundamentală are următoarea formă:

$$h(e_1, e_1) = \lambda\phi e_1, \quad h(e_2, e_2) = \ldots = h(e_n, e_n) = \mu\phi e_1,$$

$$h(e_1, e_j) = \mu\phi e_j, \quad h(e_j, e_k) = 0,\ j \neq k, j, k = 2, \ldots n,$$

pentru funcţii convenabile λ şi μ, în raport cu un reper ortonormat convenabil $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Subvarietăţile nonminimale legendreene H-ombilicale satisfac următoarele două condiţii:
(a) ϕH este un vector propriu al lui A_H şi
(b) restricţia lui A_H la $(\phi H)^\perp$ este proporţională cu aplicaţia identitate.

Următorul rezultat a fost obţinut de T. Sasahara în [94].

Lemă. *Fie $f : M^n \to S^{2n+1}$ o imersie legendreană, g_0 şi g metricile riemanniene pe S^{2n+1} şi respectiv $S^{2n+1}(\epsilon)$, h_0 şi h forma a doua fundamentală în raport cu (M^n, f^*g_0), respectiv (M^n, f^*g). Atunci, avem $h_0(X, Y) = h(X, Y)$, pentru orice vectori X, Y tangenţi la M^n.*

Următoarea teoremă arată legătura dintre subvarietăţile lagrangeene din $\mathbb{C}P^n(4)$ şi subvarietăţile legendreene din $S^{2n+1}(1)$.

Teoremă.([87]) *Dacă $f : M^n \to S^{2n+1}(1)$ este o imersie legendreană, atunci $g = \pi \circ f : M^n \to \mathbb{C}P^n(4)$ este o imersie lagrangeană. Reciproc, dacă M^n o varietate simplu conexă şi $g : M^n \to CP^n(4)$ o imersie lagrangeană, atunci există o familie cu 1-parametru de lifturi legendreene $f : M^n \to S^{2n+1}(1)$ astfel încât $g = \pi \circ f$. Oricare două lifturi legendreene f_1 şi f_2 satisfac $f_1 = e^{i\theta} f_2$, unde θ este o constantă. Mai mult, a doua formă fundamentală h^f a lui f ia valori pe distribuţia orizontală a lui π şi verifică proprietatea $\pi_* h^f = h^g$, unde h^g este a doua formă fundamentală a lui g.*

B.Y. Chen [24] a introdus noţiunea de subvarietate oblică într-o varietate hermitiană. În teoria subvarietăţilor varietăţilor de contact avem următoarea noţiune analoagă, introdusă de A. Lotta ([61]).

O subvarietate M tangentă la ξ într-o varietate Sasaki $\widetilde{M}$ se numeşte *subvarietate oblică de contact* dacă pentru orice punct $p \in M$ şi orice vector tangent $X \in T_pM$ liniar independent în raport cu ξ_p, unghiul dintre ϕX şi T_pM este o constantă θ, numit unghiul de oblicitate al lui M.

O subvarietate oblică proprie (a se vedea [14]) este o subvarietate oblică de contact care nu este nici invariantă, nici anti-invariantă.

Un caz particular de subvarietăţi oblice de contact îl reprezintă cazul subvarietăţilor oblice de contact speciale, care a fost considerat în [73].

O subvarietate θ-oblică de contact proprie se numeşte *oblică de contact specială* dacă

$$(\nabla_X P)(Y) = \cos^2(\theta)[g(X,Y)\xi - \eta(Y)X], \ \forall X, Y \in \Gamma(TM). \tag{1}$$

Este cunoscut că orice subvarietate oblică de contact proprie de dimensiune 3 a unei forme spaţiale Sasaki este o subvarietate oblică de contact specială.

Invarianţii de curbură sunt cei mai importanţi şi cei mai naturali. De asemenea, aceşti invarianţi joacă un rol important în fizică. De exemplu, magnitudinea unei forţe necesară deplasării unui obiect cu viteză constantă, este, în contextul legilor lui Newton, un multiplu constant al traiectoriei sale. Împrumutând un termen din biologie, invarianţii Riemann sunt ADN-ul varietăţilor riemanniene. Dintre invarianţii de curbură, geometrii au studiat curbura secţională, curbura scalară şi curbura Ricci în cele mai amănunţite detalii [a se vedea Berger(2003)].

Una din problemele fundamentale din teoria subvarietăţilor este imersabilitatea (sau non-imersabilitatea) unei varietăţi riemanniene într-un spaţiu euclidian (sau, mai general, într-o formă spaţială). Conform celebrei teoreme de scufundare a lui Nash din 1956, orice varietate riemanniană poate fi scufundată izometric într-un spaţiu Euclidian de codimensiune suficient de mare [Nash, 1956].

În contextul teoremei lui Nash, pentru a studia problemele de scufundare, este natural să se impună anumite condiţii asupra imersiilor. De exemplu, dacă se va impune condiţia de minimalitate, atunci se obţine următoarea problemă.

Problemă. *Fiind dată o varietate riemanniană M, să se determine condiţii necesare pentru ca varietatea M să admită o imersie izometrică minimală într-un spaţiu euclidian $\mathbb{E}^m$.*

O condiţie necesară pentru ca o varietate riemanniană să admită o imersie izometrică minimală într-un spaţiu euclidian este Ric≤ 0.

De asemenea o astfel de varietate nu poate fi compactă.

Timp de mai mulţi ani acestea erau singurele condiţii cunoscute.

Mai mult, este necesară stabilirea unor relaţii optime generale între invarianţii extrinseci şi noi invarianţi intrinseci definiţi pe subvarietăţi. Aşadar, aceasta este motivaţia introducerii unui nou tip de invarianţi riemannieni, diferiţi de invarianţii clasici. La începutul anilor 1990, B.Y. Chen a introdus δ-invarianţii de curbură, cunoscuţi în prezent ca invarianţii Chen, pe varietăţi riemanniene.

Primul invariant al lui Chen pe o varietate riemanniană M este definit, în punctul $p \in M$, prin

$$\delta_M(p) = \tau(p) - (\inf K)(p), \tag{2}$$

unde K şi τ sunt curbura secţională, respectiv curbura scalară ale lui M.

Pentru un număr întreg $k \geq 0$, vom nota cu $S(n,k)$ mulţimea finită formată din sistemele $(n_1, ..., n_k)$ de k numere naturale ≥ 2 care verifică condiţiile $n_1 < n$, $n_1 + ... + n_k \leq n$. Vom nota cu $S(n) = \cup_{k\geq 0} S(n,k)$, pentru n fixat. Pentru fiecare $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$, Chen a introdus un invariant riemannian definit prin

$$\delta(n_1, ..., n_k)(p) = \tau(p) - \inf\{\tau(L_1) + ... + \tau(L_k)\}, \tag{3}$$

unde $L_1, ..., L_k$ sunt subspaţii mutual ortogonale ale lui T_pM cu $\dim L_j = n_j$, $j = 1, ..., k$.

Reamintim inegalităţi importante obţinute de B.Y. Chen pentru subvarietăţi în forme spaţiale reale.

Teoremă. [28] *Fie M^n o subvarietate n-dimensională $(n \geq 3)$ a unei forme spaţiale reale $\widetilde{M}^m(c)$ cu curbura secţională constantă c. Atunci*

$$\delta_M \leq \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + (n+1)c\right\}. \tag{4}$$

Cazul de egalitate al lui (4) *are loc dacă şi numai dacă, în raport cu repere ortonormate convenabile* $\{e_1, ..., e_n\}$ *şi* $\{e_{n+1}, ..., e_m\}$*, operatorii Weiengarten au forma*:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \mu - a & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \mu & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \mu \end{pmatrix}$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h^r_{11} & h^r_{12} & 0 & ... & 0 \\ h^r_{12} & -h^r_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \quad r = n+2, ..., m.$$

Mai mult, când cazul de egalitate al inegalităţii (4) *are loc într-un punct* $p \in M^n$*, rezultă* $K(e_1 \wedge e_2) = (\inf K)(p)$.

Pentru fiecare $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$, notăm:

(5) $$d(n_1, ..., n_k) = \frac{n^2(n + k - 1 - \sum_{j=1}^{k} n_j)}{2(n + k - \sum_{j=1}^{k} n_j)},$$

(6) $$b(n_1, ..., n_k) = \frac{1}{2}[n(n-1) - \sum_{j=1}^{k} n_j(n_j - 1)].$$

Următoarea inegalitate optimă, între invarianţii Chen şi pătratul curburii medii are un rol fundamental în acest domeniu.

Teoremă.[28] *Pentru fiecare* $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$ *şi fiecare subvarietate n-dimensională* M *într-un spaţiu cu curbura secţională constantă* $\widetilde{M}^m(c)$*, avem*

(7) $$\delta(n_1, ..., n_k) \leq d(n_1, ..., n_k) \|H\|^2 + b(n_1, ..., n_k)c.$$

Cazul de egalitate al inegalităţii (7) are loc într-un punct $p \in M$ dacă şi numai dacă există o bază ortonormată $\{e_1, ..., e_m\}$, în p, în raport cu care operatorii Weiengarten ai lui M în $\widetilde{M}^m(c)$ au forma:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

$$A_r = \begin{pmatrix} A_1^r & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_k^r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_r & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mu_r \end{pmatrix}, \quad r = n+2, ..., m.$$

unde $a_1, ..., a_n$ satisfac

$$a_1 + ... + a_{n_1} = ... = a_{n_1+...+n_{k-1}+1} + ... + a_{n_1+...+n_k} = a_{n_1+...+n_k+1} = ... = a_n$$

şi fiecare A_j^r este o submatrice simetrică de tip $n_j \times n_j$, satisfăcând

$$trace(A_1^r) = ... = trace(A_k^r) = \mu_r.$$

În [39], B.-Y. Chen et al. au obţinut o inegalitate optimă pentru invarianţii intrinseci principali ai unei subvarietăţi M, curbura secţională K şi curbura scalară τ, şi invariantul extrinsec principal, curbura medie $\|H\|$. Această inegalitate optimă are loc pentru subvarietăţile total reale $M^n (n \geq 3)$ în forme spaţiale complexe $\widetilde{M}^m(4c)$ cu curbură secţională olomorfă $4c$. De asemenea, autorii au obţinut o teoremă de caracterizare pentru imersii minimale total reale $\psi : S^3 \to \mathbb{C}P^3$, ce satisfac prima egalitate a lui Chen.

Teoremă. *Fie* $x : M^n \to \tilde{M}^n(4c)$, $c \in \{-1, 0, 1\}$ *şi* $n \geq 3$, *o imersie izometrică total reală minimală cu curbura scalară constantă. Atunci* M^n *satisface prima egalitate a lui Chen*

$$\delta_M = \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c,$$

dacă şi numai dacă, fie

(1) x *este o imersie total geodezică, sau*

(2) $n = 2$, $c = 3$ *şi* x *este local congruentă cu o imersie dată* $\psi : S^3 \to \mathbb{C}P^3$ *a unei* 3*-sfere toplogice* S^3 *cu o metrică non-standard.*

Teoremă. *Fie* $(M^n, < \cdot, \cdot >)$ *o varietate riemanniană, simplu conexă,* n*-dimensională. Fie* α *o formă biliniară simetrică pe* M, *satisfăcând*

(1) $< \alpha(X, Y), Z >$ *este total simetrică*;

(2) $(\nabla\alpha)(X, Y, Z) = \nabla_X \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$ *este total simetrică*;

(3) $R(X, Y)Z =< Y, Z > X- < X, Z > Y + \alpha(\alpha(Y, Z), X) - \alpha(\alpha(X, Z), Y)$.

Atunci există o imersie total reală $x : (M, < \cdot, \cdot >) \to CP^n(4)$, *asfel încât cea de a doua formă fundamentală* h *satisface* $h(X, Y) = J\alpha(X, Y)$.

În [39], autorii au construit un exemplu netrivial de imersie total reală a lui S^3 în $\mathbb{C}P^3$, care are curbura scalară constantă şi verifică prima egalitate a lui Chen.

Exemplul. Considerăm sfera unitate $S^3 = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 | y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1\}$ din $\mathbb{R}^4$. Fie câmpurile vectoriale X_1, X_2 şi X_3 definite prin

$$X_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_2, -y_1, y_4, -y_3),$$

$$X_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_3, -y_4, -y_1, y_2),$$

$$X_3(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_4, y_3, -y_2, -y_1).$$

Atunci vectorii tangenţi X_1, X_2 şi X_3 formează o bază pe spaţiul tangent al lui S^3. De asemenea, obţinem

$$[X_1,\ X_2] = 2X_3,\ [X_2, X_3] = 2X_1,\ [X_3, X_1] = 2X_2.$$

Definim o metrică g pe S^3, astfel încât

$$g(X_1, X_1) = g(X_2, X_2) = 3,\ g(X_3, X_3) = 9.$$

Atunci vectorii E_1, E_2, E_3 definiţi prin

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} X_1,\ E_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} X_2,\ E_3 = \frac{1}{3} X_3,$$

formează o bază ortonormată pe S^3. Tensorul de curbură R al lui (S^3, g) are următoarele forme

$$R(E_1, E_2)E_2 = -\frac{5}{3}E_1,\ R(E_1, E_2)E_3 = 0,$$

$$R(E_1, E_3)E_3 = E_1,\ R(E_2, E_3)E_1 = 0,$$

$$R(E_2, E_3)E_3 = E_2,\ R(E_3, E_1)E_2 = 0,$$

în raport cu cu baza ortonormată $\{E_1, E_2, E_3\}$.

În continuare, vom defini o formă biliniară simetrică α pe TS^3 prin

$$\alpha(E_1, E_1) = \frac{2}{\sqrt{3}}E_1,\ \alpha(E_3, E_1) = 0,$$

$$\alpha(E_1, E_2) = -\frac{2}{\sqrt{3}}E_2,\ \alpha(E_3, E_2) = 0,$$

$$\alpha(E_2, E_2) = -\frac{2}{\sqrt{3}}E_1,\ \alpha(E_3, E_3) = 0.$$

Forma biliniară α satisface condiţiile teoremei. Aşadar, obţinem o imersie izometrică total reală $\psi : (S^3, g) \to \mathbb{C}P^3$, astfel încât cea de a doua formă fundamentală h satisface $h(X,Y) = J\alpha(X,Y)$. Din modul de definire al lui α, rezultă că imersia ψ este minimală şi satisface prima egalitate a lui Chen.

În [12] autorii au obţinut un rezultat important pentru subvarietăţiile lagrangeene 3-dimensionale non-minimale din $\mathbb{C}P^3(4)$ care satisfac cazul de egalitate în prima inegalitate a lui Chen îmbunătăţită. De asemenea, autorii au arătat că asemenea subvarietăţi pot fi obţinute cu ajutorul unei suprafeţe lagrangene din $\mathbb{C}P^2(4)$.

Teoremă. *Fie M o subvarietate lagrangeană non-minimală a lui $\mathbb{C}P^3(4)$, astfel încât cazul de egalitate al primei inegalităţi a lui Chen îmbunătăţite are loc în fiecare punct. Atunci există o suprafaţă lagrangeană minimală $\tilde{W}(z,\bar{z})$ în $CP^2(4)$, astfel încât M poate fi scrisă local de forma*

$$E_0(t,z,\bar{z}) = \frac{e^{it/3}}{\sqrt{1+b_1^2+\lambda_2^2}}(0, W(z,\bar{z})) + \frac{(-b_1+i\lambda_2)}{\sqrt{1+b_1^2+\lambda_2^2}}(e^{it},0,0),$$

unde b_1 şi λ_2 sunt soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale ordinare:

$$\frac{db_1}{dt} = -\frac{1+3\lambda_2^2+b_1^2}{3\lambda_2}, \qquad \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{2}{3}b_1$$

iar W este liftul orizontal al lui $\tilde{W}$ la $S^5(1)$, fiind definit prin

$$W = e^{i\theta}(E_0 - (-b_1+i\lambda_2)E_1)/\sqrt{1+b_1^2+\lambda_2^2}.$$

Reciproc, orice subvarietate lagrangeană 3-dimensională, obţinută în acest mod verifică cazul de egalitate al primei inegalităţi a lui Chen îmbunătăţite.

Tema tezei noastre de doctorat este "Contribuţii în geometria subvarietăţilor", având ca obiectiv principal atât studiul invarianţilor de curbură pe subvarietăţi în forme spaţiale Sasaki, cât şi obţinerea inegalităţilor geometrice optime de tip Chen pentru subvarietăţi C-total reale (în particular, legendreene), subvarietăţi oblice de contact speciale şi CR-subvarietăţi (generice) în forme spaţiale Sasaki. Studiul inegalităţilor geometrice optime a fost iniţiat de B.Y. Chen şi oferă probleme deschise în acest domeniu de cercetare.

Teza este structurată în patru capitole.

Capitolul 1 este un rezumat al tezei.

Capitolul 2 are caracter introductiv, în care precizăm proprietăţile subvarietăţilor în varietăţi riemanniene, definim structurile de contact, în particular varietăţile Sasaki, şi indicăm proprietăţi importante ale acestor varietăţi. De asemenea, definim tipuri de subvarietăţi în forme spaţiale Sasaki. Mai precis, reamintim noţiunile de subvarietate legendreană, subvarietate invariantă, subvarietate anti-invariantă şi subvarietate oblică de contact specială, menţionând proprietăţi importante ale acestor subvarietăţi.

Capitolele 3 şi 4 conţin rezultate originale, unele fiind deja publicate sau trimise spre publicare în reviste de specialitate din străinătate.

În Capitolul 3, **Inegalităţi geometrice pentru subvarietăţi în forme spaţiale Sasaki,** am îmbunătăţit prima inegalitate a lui Chen pentru subvarietăţi legendreene, respectiv, subvarietăţi oblice de contact speciale în forme spaţiale Sasaki. De asemenea, reamintim atât inegalităţi optime remarcabile pentru subvarietăţi lagrangeene în forme spaţiale complexe, implicând tensorul de tip curbură, obţinute de F. Dillen et al. [10], cât şi inegalităti optime remarcabile pentru subvarietăţi oblice de contact în forme spaţiale Sasaki.

Noţiunea de produs warped joacă un rol important în geometria diferenţială şi în fizică.

În geometria diferenţială a subvarietăţilor sunt interesante teoreme care stabilesc relaţii între invarianţi intrinseci şi extrinseci. În acest domeniu, B.Y. Chen a obţinut un rezultat remarcabil în [28], în 1993. În această lucrare a introdus un nou invariant de curbură, care a fost numit δ-curbura lui Chen, dat prin definiţia

$$\delta(p) = \tau(p) - (\inf K)(p),$$

unde τ reprezintă curbura scalară şi $(\inf K)(p)$ este infimumul curburilor secţionale definite în p. De asemenea, tot în [28], a demonstrat o inegalitate asupra invariantului δ şi curbura medie H pentru subvarietăţi în forme spaţiale reale.

Subvarietăţile care verifică egalitatea în fiecare punct din această inegalitate au fost numite, mai târziu, imersii ideale şi au fost studiate intensiv de mai mulţi geometri. Ne referim la [**?**].

Inegalităţi similare au fost obţinute pentru subvarietăţi lagrangeene în forme spaţiale complexe şi hipersuprafeţe centroafine din $\mathbf{R}^{n+1}$. Ne referim la [**?**],[**?**], [**?**], [49] şi [**?**].

Recent, prima inegalitate a lui Chen pentru subvarietăţi lagrangeene în forme spaţiale complexe a fost îmbunătăţită. În [9], F. Dillen et al. au demonstrat o inegalitate generală pentru un tensor de tip curbură, care are ca un corolar prima inegalitate a lui Chen îmbunătăţită pentru subvarietăţi lagrangeene în forme spaţiale complexe.

Inegalităţi remarcabile pentru subvarietăţi lagrangeene în forme spaţiale complexe

Dacă T este un câmp tensorial de tip (0,4) pe varietatea riemanniană M şi μ o formă biliniară simetrică pe TM cu valori într-un fibrat vectorial B peste M astfel încât

$$T(X,Y,Z,W) = g(\mu(Y,Z),\mu(X,W)) - g(\mu(X,Z),\mu(Y,W)), \tag{8}$$

pentru orice câmpuri vectoriale X, Y, Z, W, atunci T este de tip curbură.

Ecuaţia (8) se numeşte ecuaţia algebrică a lui Gauss.

Un exemplu trivial este dat de o subvarietate M a spaţiului euclidian, dacă B este fibratul normal, μ cea de-a doua formă fundamentală şi T tensorul de curbură. Fie M o subvarietate n-dimensională a unei forme spaţiale complexe $\widetilde{M}^n(4c)$. M se numeşte subvarietate lagrangeană dacă $J(T_pM) = T_p^{\perp}M$, pentru fiecare punct $p \in M$.

Dacă vom considera tensorul T de forma

$$T(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W) + c(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)), \tag{9}$$

unde R este tensorul de curbură Riemann pe M şi $\mu(X,Y) = Jh(X,Y)$, cu h cea de-a doua formă fundamentală a imersiei lui M în $\widetilde{M}^n(4c)$, atunci obţinem

$$\delta_T = \delta - \frac{(n-2)(n+1)}{2}c, \tag{10}$$

unde $\delta = \delta_R$ este definit prin $\delta(p) = \tau(p) - (\inf K)(p)$.

Teoremă.[10] *Fie (M^n, g) o subvarietate lagrangeană a unei forme spaţiale complexe $\widetilde{M}^n(4c)$. Atunci, avem*

$$\delta(p) \leq \frac{(n-2)(n+1)}{2}c + \frac{n^2(2n-3)}{2(2n+3)}\|H\|^2, \tag{11}$$

unde $H = \frac{1}{n}\mathrm{trace}h$ *este vectorul curbură medie.*

Cazul de egalitate al inegalităţii (11) *are loc într-un punct* $p \in M$ *dacă şi numai dacă există o bază ortonormată* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *în* p, *astfel încât în raport cu această bază,* h *are următoarele forme*:

$$h(e_1, e_1) = aJe_1 + 3\lambda Je_3, \quad h(e_1, e_3) = 3\lambda Je_1, h(e_3, e_j) = 4\lambda Je_j,$$

$$h(e_2, e_2) = -aJe_1 + 3\lambda Je_3, \quad h(e_2, e_3) = 3\lambda Je_2, \quad h(e_j, e_k) = 4\lambda Je_3\delta_{jk},$$

$$h(e_1, e_2) = -aJe_2, \quad h(e_3, e_3) = 12\lambda Je_3, \quad h(e_1, e_j) = h(e_2, e_j) = 0,$$

pentru a, λ *numere reale şi* $j, k \in \{4, \ldots, n\}$.

Orice subvarietate lagrangeană ce satisface cazul de egalitate al primei inegalităţi (clasice) a lui Chen este minimală (conform [37]).

Următorul rezultat este valabil pentru prima inegalitate a lui Chen îmbunătăţită.

Teoremă.[10] *Fie* M^n *o subvarietate lagrangeeană de dimensiune* n *a unei forme spaţiale complexe* $\widetilde{M}^n(4c)$ *care satisface cazul de egalitate al inegalităţii* (11) *în fiecare punct* $p \in M$. *Dacă* $n \geq 4$, *atunci* M *este o subvarietate minimală.*

Inegalităţi remarcabile pentru subvarietăţi legendreene în forme spaţiale Sasaki

F. Defever, I. Mihai şi L. Verstraelen [44] au demonstrat prima inegalitate a lui Chen pentru subvarietăţi C-total reale M^n de dimensiune n ($n \geq 3$), într-o formă spaţială Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$.

Teoremă. [44] *Fie* M^n *o subvarietate* C*-total reală de dimensiune* $n \geq 3$ *a unei forme spaţiale Sasaki* $\tilde{M}^{2m+1}(c)$ *de dimensiune* $2m+1$. *Atunci*:

$$\delta_M \leq \frac{n-2}{2}\left[\frac{n^2}{n-1}||H||^2 + (n+1)\frac{c+3}{4}\right]. \tag{12}$$

Cazul de egalitate a fost caracterizat în funcţie de forma operatorului Weingarten.

În plus, autorii au demonstrat că dacă M^n este o subvarietate legendreană şi cazul de egalitate are loc în orice punct $p \in M^n$, atunci M^n este o subvarietate minimală.

Noi am îmbunătăţit această inegalitate în articolul [75]

I. Mihai, I. Presură, *An improved first Chen inequality for Legendrian submanifolds in Sasakian space forms*, Period. Math. Hung. **74** (2017), 220-226.

Dacă M^n este o subvarietate legendreană, atunci o bază ortonormată a spaţiului normal $T_p^{\perp} M^n$ este de forma $\{e_{n+1} = e_1^* = \phi e_1, \cdots, e_{2n} = e_n^* = \phi e_n, e_{2n+1} = \xi\}$.

Pentru subvarietăţi legendreene n-dimensionale în forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$ am îmbunătăţit prima inegalitate a lui Chen din [44] în articolul [75].

Teoremă. *Fie M^n o subvarietate legendreană ($n \geq 3$) a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c), p \in M^n, \pi \subset T_pM^n$, o 2-secţiune plană. Atunci*

$$\delta_M \leq \frac{(n-2)(n+1)}{8}(c+3) + \frac{n^2(2n-3)}{2(2n+3)}\|H\|^2, \tag{13}$$

unde H este vectorul curbură medie.

Mai mult, cazul de egalitate al inegalităţii (13) *are loc pentru o secţiune plană π într-un punct $p \in M^n$ dacă şi numai dacă există o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ în T_pM^n astfel încît $\pi = span\{e_1, e_2\}$ şi în raport cu această bază a doua formă fundamentală are următoarele forme*

$$h(e_1, e_1) = a\phi e_1 + 3\lambda\phi e_3, \qquad h(e_1, e_3) = 3\lambda\phi e_1, \qquad h(e_3, e_j) = 4\lambda\phi e_j,$$

$$h(e_2, e_2) = -a\phi e_1 + 3\lambda\phi e_3, \qquad h(e_2, e_3) = 3\lambda\phi e_2, \qquad h(e_j, e_k) = 4\lambda\phi e_3\delta_{jk},$$

$$h(e_1, e_2) = -a\phi e_2, \qquad h(e_3, e_3) = 12\lambda\phi e_3, \qquad h(e_1, e_j) = h(e_2, e_j) = 0,$$

pentru numerele reale a, b şi *$j, k = 4, \ldots, n$.*

Dacă subvarietatea M^n este minimală atunci inegalitatea devine prima inegalitate a lui Chen care a fost demonstrată în [44].

De asemenea, am studiat cazul de egalitate al inegalităţii.

Am obţinut un exemplu de imersie legendreană minimală în forma spaţială Sasaki S^{2n+1}, care satisface cazul de egalitate al lui (13).

Fie $f : M^2 \to S^5$ o imersie izometrică, legendreană, minimală a unei suprafeţe M^2 în sfera 5-dimensională S^5 şi definim

$$x : (0, \frac{\pi}{2}) \times_{\cos t} M^2 \times_{\sin t} S^{n-3} \to S^{2n+1},\ (t, p, q) \mapsto (\cos t)f(p) + (\sin t)q.$$

Atunci x este o imersie legendreană minimală în forma spaţială Sasaki S^{2n+1}, care satisface cazul de egalitate al inegalităţii (13).

Următorul rezultat ne arată faptul că o subvarietate legendreană de dimensiune $n \geq 4$, care satisface cazul de egalitate al inegalităţii, este minimală.

Teoremă. *Fie M^n o subvarietate legendreană de dimensiune $n \geq 4$, în forma spaţială Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$. Dacă M^n satisface cazul de egalitate al inegalităţii* (13)*, atunci M^n este o subvarietate minimală.*

Am obţinut un exemplu de subvarietate legendreană non-minimală 3-dimensională a sferei S^7 care satisface cazul de egalitate al inegalităţii (13).

Remarcă. În [12] autorii au dat un exemplu de subvarietate lagrangeană non-minimală M^3 de dimensiune 3 în spaţiul proiectiv complex $\mathbb{C}P^3$ satisfăcând cazul de egalitate al primei inegalităţi a lui Chen îmbunătăţite. Prin liftarea lui M^3 la S^7 via fibrarea lui Hopf, vom obţine un exemplu de subvarietate legendreană non-minimală 3-dimensională a sferei S^7 satisfăcând cazul de egalitate al inegalităţii (13).

Inegalităţi remarcabile pentru subvarietăţi oblice de contact

A. Carriazo a demonstrat prima inegalitate a lui Chen pentru subvarietăţi tangente la câmpul vectorial ξ într-o formă spaţială Sasaki. Mai precis, a demonstrat următoarea teoremă pentru subvarietăţi oblice proprii în forme spaţiale Sasaki.

Teoremă.[35] *Fie $\varphi : M^{n+1} \to \widetilde{M}^m(c)$ o imersie izometrică a unei varietăţi riemannienne M^{n+1} de dimensiune $n+1$ într-o formă spaţială Sasaki $\widetilde{M}^m(c)$, astfel* *încât* $\xi \in TM$*. Atunci, pentru orice punct* $p \in M$ *şi orice secţiune plană* $\pi \subset D_p$*, avem*

$$\tau - K(\pi) \leq \frac{(n+1)^2(n-1)}{2n}\|H\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)\frac{c+3}{4} +$$
$$+n + \frac{3}{2}\|P\|^2\frac{c-1}{4} - 3\Phi^2(\pi)\frac{c-1}{4} - \|F\|^2.$$

D. Cioroboiu şi A. Oiagă au demonstrat prima inegalitate a lui Chen pentru subvarietăţi oblice în forme spaţiale Sasaki, în cazul secţiunilor plane π ortogonale la ξ. Acest rezultat este dat de următoarea teoremă.

Teoremă.[23] *Fie* M *o subvarietate* θ*-oblică* $(n = 2k+1)$*-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki* $(2m+1)$*-dimensională* $\widetilde{M}(c)$*. Atunci, avem*:

$$\delta(M) \leq \frac{n-2}{2}\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\} + \frac{(c-1)}{8}[3(n-3)\cos^2\theta - 2(n-1)].$$

Mai mult, autorii au demonstrat inegalităţi Chen generale, implicând invarianţii Chen $\delta(n_1, ..., n_k)$ pentru asemenea subvarietăţi.

De asemenea, prima inegalitate a lui Chen îmbunătăţită pentru subvarietăţi pur reale M în forme spaţiale complexe $\widetilde{M}(4c)$ cu curbură secţională olomorfă constantă $4c$ a fost demonstrată de A. Mihai.

Teoremă.[69] *Fie* M *o subvarietate pur reală* n*-dimensională* $(n \geq 3)$ *a unei forme spaţiale complexe* $\widetilde{M}(4c)$ *de dimensiune complexă* m*,* $p \in M$ *şi* $\pi \subset T_pM$ *o secţiune* 2*-plană . Atunci*

$$\tau(p) - K(\pi) \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2 + [(n+1)(n+2) + 3\|P\|^2 - 6\Phi^2(\pi)]\frac{c}{2},$$

nde $\Phi^2(\pi) = g^2(Je_1, e_2)$ *şi* $\{e_1, e_2\}$ *este o bază ortonormată a lui* π*.*

Pentru subvarietăţi oblice speciale de dimensiune $n+1$ în forme spaţiale Sasaki $(2n+1)$-dimensionale $\widetilde{M}(c)$ am demonstrat o primă inegalitate a lui Chen care îmbunătăţeşte prima inegalitate a lui Chen din teorema 3.1 [18], în articolul

I. Presură, *Geometric inequalities for submanifolds in Sasakian space forms,* Bull. Korean Math. Soc. **53** (2016), No. 4, 1095-1103.

Teoremă. *Fie M o subvarietate oblică de contact specială $(n+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ de dimensiune $2n+1$ şi $p \in M$, $\pi \subset T_pM$ o secţiune 2-plană ortogonală la ξ. Atunci*

$$\tau(p) - \inf K(p) \leq \frac{n^2(2n-3)}{2(2n+3)}\|H\|^2 + \frac{(n+1)(n-2)}{8}(c+3) + \\ + 3n\cos^2\theta\frac{(c-1)}{8} - \frac{3\psi^2(\pi)}{4}(c-1) + n\cos^2\theta, \tag{14}$$

unde H este vectorul curbură medie.

Mai mult, cazul de egalitate al inegalităţii (14) are loc pentru o secţiune plană π într-un punct $p \in M$ dacă şi numai dacă există o bază ortonormată $\{e_0 = \xi, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ în p astfel încât $\pi = span\{e_1, e_2\}$ şi în raport cu această bază a doua formă fundamentală are următoarele forme

$$h(e_1,e_1) = aFe_1 + 3bFe_3, \quad h(e_1,e_3) = 3bFe_1, \quad h(e_3,e_j) = 4bFe_j,$$
$$h(e_2,e_2) = -aFe_1 + 3bFe_3, \quad h(e_2,e_3) = 3bFe_2, \quad h(e_j,e_k) = 4bFe_3\delta_{jk},$$
$$h(e_1,e_2) = -aFe_2, \quad h(e_3,e_3) = 12bFe_3, \quad h(e_1,e_j) = h(e_2,e_j) = 0,$$

pentru numerele a, b şi $j, k = 4, \ldots, n$.

În capitolul 4, **Un invariant Chen pentru CR-subvarietăţi de contact în varietăţi Sasaki**, definim CR δ-invariantul de contact pe o CR-subvarietate de contact şi obţinem o inegalitate geometrică optimă pentru subvarietăţi generice în forme spaţiale Sasaki în articolul [76]:

I. Mihai, I. Presură, *An optimal inequality for contact CR-submanifolds in Sasakian space forms*, trimis spre publicare.

CR δ-invariantul, notat prin $\delta(D)$, pe o CR-subvarietate M într-o varietate Kähler, cu $\alpha = \mathrm{rank}_{\mathbb{C}} D \geq 2$ şi $\beta = \mathrm{rank}\ D^{\perp} \geq 1$, a fost definit prin ([36])

$$\delta(D)(p) = \tau(p) - \tau(D_p),$$

unde τ şi $\tau(D)$ reprezintă curbura scalară a lui M şi respectiv curbura scalară a distribuţiei invariante $D \subset TM$.

Pe o CR-subvarietate M sunt definiţi doi vectori curbură medie parţiali H_D şi $H_{D^\perp}$ prin formulele

$$H_D = \frac{1}{2\alpha}\sum_{i=1}^{2\alpha}\sigma(e_i,e_i),\ \ H_{D^\perp} = \frac{1}{\beta}\sum_{r=2\alpha+1}^{2\alpha+\beta}\sigma(e_r,e_r).$$

O CR-subvarietate M a unei varietăţi Kähler $\widetilde{M}$ se numeşte minimală (respectiv D-minimală sau $D^\perp$-minimală) dacă $H=0$ (respectiv $H_D=0$ sau $H_{D^\perp}=0$).

F. Al-Solamy, B.Y. Chen şi S. Deshmukh au demonstrat o inegalitate optimă pentru subvarietăţi anti-olomorfe în forme spaţiale complexe.

Teoremă.[97] *Fie N o subvarietate anti-olomorfă a unei forme spaţiale complexe $\widetilde{M}^{h+p}(4c)$, cu $h=\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}D\geq 1$ şi $p=\mathrm{rank}D^\perp\geq 2$. Atunci, avem*

$$\delta(D)\leq \frac{(p-1)(2h+p)^2}{2(p+2)}H^2+\frac{p}{2}(4h+p-1)c. \tag{15}$$

Cazul de egalitate al inegalităţii (15) *are loc dacă şi numai dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute*:

(a) *N este D-minimală, adică $H_D=0$,*

(b) *N este mixt total geodezică, şi*

(c) *există un reper ortonormat $\{e_{2h+1},\ldots,e_n\}$ pe $D^\perp$ astfel încât cea de-a doua formă fundamentală σ a lui N satisface*

$$\sigma^r_{rr}=3\sigma^r_{ss},\ \textit{pentru}\ 2h+1\leq r\neq s\leq 2h+p,$$

$$\sigma^r_{st}=0,\ \textit{pentru numere distincte}\ r,s,t\in\{2h+1,\ldots,2h+p\}.$$

Pe o CR-subvarietate de contact M de dimensiune $(n+1)$ a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}$ am definit *CR δ-invariantul de contact* prin

$$\delta(D)(p)=\tau(p)-\tau(D_p),$$

unde τ şi $\tau(D)$ reprezintă curbura scalară a lui M şi respectiv curbura scalară a distribuţiei invariante $D \subset TM$. Dacă $\dim D = 2n_1 + 1$ şi $\dim D^\perp = n_2$, vectorii curbură medie parţiali H_D şi $H_{D^\perp}$ ai lui M se definesc prin

$$H_D = \frac{1}{2n_1+1}\sum_{i=0}^{2\alpha}\sigma(e_i,e_i),\ \ H_{D^\perp} = \frac{1}{n_2}\sum_{r=2n_1+1}^{2n_1+n_2}\sigma(e_r,e_r).$$

O CR-subvarietate de contact M a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}$ se numeşte minimală (respectiv D-minimală sau $D^\perp$-minimală) dacă $H = 0$ (respectiv $H_D = 0$ sau $H_{D^\perp} = 0$).

Am obţinut o estimare optimă pentru CR δ-invariantul de contact a unei subvarietăţi generice într-o formă spaţială Sasaki în articolul menţionat mai sus [76].

Teoremă. *Fie M o subvarietate generică de dimensiune $(n+1)$ a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$, cu $\dim D = 2n_1 + 1$ şi $\dim D^\perp = n_2$. Atunci avem*

$$\delta(D) \leq \frac{(n+1)^2(n_2-1)}{2(n_2+2)}\|H\|^2 + \frac{n_2}{2}(4n_1+n_2-1)\frac{c+3}{4} + n_2. \tag{16}$$

Mai mult, cazul de egalitate are loc dacă şi numai dacă următoarele proprietăţi sunt satisfăcute:

(a) *M este D-minimală, adică, $H_D = 0$,*

(b) *M este mixt total geodezică, şi*

(c) *există un reper ortonormat $\{e_{2n_1+1}, \ldots, e_{2n_1+n_2}\}$ pe $D^\perp$ astfel încât cea de-a doua formă fundamentală σ a lui M satisface*

$$\sigma^r_{rr} = 3\sigma^r_{ss},\ \textit{pentru}\ 2n_1+1 \leq r \neq s \leq 2n_1+n_2,$$

$$\sigma^r_{st} = 0,\ \textit{pentru numere distincte}\ r,s,t \in \{2n_1+1,\ldots,2n_1+n_2\}.$$

□

Bibliografie

[1] P.Alegre, *Slant submanifolds of Lorentzian Sasakian and para Sasakian manifolds,* Taiwanese J.Math.**17**(2013), 897-910.

[2] K.Arslan, A.Carriazo, B.-Y.Chen, C.Murathan, *On slant submanifolds neutral Käehler manifolds,* Taiwanese J.Math.**14**(2010), 561-584.

[3] K.Arslan, R.Ezentas, C.Murathan, T.Sasahara, *Biharmonic submanifolds in 3-dimensional* (k, μ)*-manifolds,* Internat.J.Math.Sci.2005:(2005), 3575-3786.

[4] K.Arslan, R.Ezentas, C.Murathan, T.Sasahara *Bihamornic anti-invariant submanifolds in Sasakian space forms*, Beiträge Algebra.Geom.**48**(2007), 191-207.

[5] A. Bejancu, *Geometry of CR-Submanifolds*, D.Reidel Publ. Co., 1986.

[6] D.E.Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds,* Progress in Mathematics, Vol 203, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[7] D.E.Blair, K.Ogiue, *Geometry of integral submanifolds of contact distribution*, Illinois J.Math., **19**(1975) 269-276.

[8] A.Balmuş, S.Montaldo, C.Oniciuc, *Classification results for biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math.**168**(2008), 201-220.

[9] J.Bolton, F. Dillen, J. Fastenakels, L. Vrancken, *A best possible inequality for curvature like tensor fields,* Math. Ineq. Appl. , **63**(1994), 553-564.

[10] J.Bolton, F. Dillen, J. Fastenakels, L. Vrancken, *A best inequality for curvature like tensor fields,* Math. Inequal. Appl.**12**(2009), no. 3, 663-681.

[11] J. Bolton, C. Rodriguez Montealegre, L.Vrancken, *Characterizing warped product Lagrangian immersions in complex projective space,* Proc. Edinb. Math. Soc., **51**(2008), 1-14.

[12] J.Bolton, L.Vrancken, *Lagrangian submanifolds attaining equality in the improved Chen's inequality,* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **14**(2007), 311-315.

[13] J.L.Cabrerizo, A.Carriazo, L.M.Fernandez, M.Fernandez, *Semi-slant submanifolds of a Sasakian manifold,* Geom. Dedicata **78**(1999), 183-199.

[14] J.L. Cabrerizo, A .Carriazo, L.M. Fernandez, M. Fernandez, *Slant submanifolds in Sasakain manifolds,*Glasg. Math.J. **42**(2000), no.1, 125-138.

[15] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez, M. Fernandez, *Existence and uniqueness theorem for slant immersions in Sasakian-space-forms,* Publ. Math. Debrecen **58**(2001), 559-574.

[16] R.Caddeo, S.Montaldo, C.Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of* S^3, Internat.J.Math. **12**(2001), 867-876.

[17] R.Caddeo, S.Montaldo, C.Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in spheres,* Israel J.Math.**130**(2002), 109-123.

[18] A.Carriazo, *A contact version of B.-Y.Chen's inequality and its applications to slant immersions,* Kyungpook Math.J.**39**(1999), no. 2, 465-476.

[19] A.Carriazo, *Bi-slant immersions.*In:Proceedings ICRAMS 2000, 2000.

[20] A.Carriazo, *New developments in slant submanifolds theory.*In:Applicable Mathematics in the Golden Age, Narosa Publishing House, 2002, p. 339-356.

[21] A.Carriazo, *On slant submanifolds of semi-Riemannian manifolds,* Riemannian Geometry and Applications, Proceedings RIGA, Ed.Univ.din Bucureşti, 2014.

[22] I.Castro, F.Urbano, *Twistor holomorphic Lagrangian surfaces in complex projective and hyperbolic planes,* Ann.Global.Anal.Geom.**13**(1995), 59-67.

[23] D.Cioroboiu, A.Oiaga, *B.Y.Chen inequalities for slant submanifolds in Sasakain space forms,* Rend.Circ.Mat.Palermo(2)**52**(2003), no. 3, 367-381.

[24] B.Y. Chen, *Geometry of Submanifolds,* M. Dekker, New York, 1973.

[25] B.Y.Chen, *Total mean curvature and Submanifold of finite Type*, World Scientific Publ.Singapore, 1984.

[26] B.Y.Chen, *Geometry of Slant Submanifolds,*K. U.Leuven, 1990.

[27] B.-Y.Chen, *Slant immersions,* Bull.Austral.Math.Soc.**41**(1990), 135-147.

[28] B.Y.Chen, *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds,* Arch.Math. **60**(1993), 568-578.

[29] B.Y.Chen, *Complex extensors and Lagrangian submanifolds in complex Euclidean spaces*, Tohoku Math.J.**49**(1997), 277-297.

[30] B.Y.Chen, *Interaction of Legendre curves and Lagrangian submanifolds*, Israel J.Math **99**(1997), 69-108.

[31] B.Y.Chen, *Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions,* Glasgow Math.J. **41**(1999), 33-41.

[32] B.Y.Chen, *On Ricci curvature of isotropic and Lagrangian submanifolds in complex space forms*, Archiv.Math., **74**(2000), 154-160.

[33] B.Y.Chen, *Some new obstructions to minimal and Lagrangian isometric immersions,* Japan.J.Math. **26**(2000), 1-17.

[34] B.Y.Chen, *On isometric minimal immersions from warped products into real space forms,* Proc.Edinburgh Math.Soc. **45**(2002), 579-587.

[35] B.Y.Chen, *Pseudo-Riemannian Geometry, δ-Invariants and Applications,* (World Scientific Publishing, Co.Pte.Ltd., Hackensack, 2011), p.xxxii+477.

[36] B.Y. Chen, *An optimal inequality for CR-warped products in complex space forms involving CR δ-invariant*, Internat. J. Math. **23** (2012), no. 3, 1250045 (17 pages).

[37] B.Y.Chen, F.Dillen, L.Verstraelen, L.Vrancken, *Totally real submanifolds of CP^n satisfying a basic equality*, Arch.Math., Vol.**63,** 553-564(1994).

[38] B.-Y.Chen, I.Mihai, *Classification of quasi-minimal slant surfaces in Lorentzian complex space forms,* Acta Math.Hungar.**122**(2009), 307-328.

[39] B.-Y. Chen,F. Dillen, L. Verstraelen L.Vrancken, *An exotic totally real minimal immersion of S^3 in P^3 and its characterisation,* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. **126A,** (1996), 153-165.

[40] B.-Y.Chen, L.Vrancken, *Existence and uniqueness theorem for slant immersions and its applications,* Results Math.**31**(1997), 28-39.

[41] S.S.Chern, M.Do Carmo, S.Kobayashi, *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, Functional analysis and related fields, Springer, (1970), 59-75.

[42] J.T.Cho, J.Inoguchi, J.-E.Lee, *Biharmonic curves in 3-dimensional Sasakain space forms*, Ann.Mat. Pura Appl.**186**(2007), 685-701.

[43] S.Decu, *Optimal inequalities involving Casorati curvature of slant submanifolds in quaternionic space forms*, Proceedings of the Conference RIGA 2014, Bucharest, Romania.

[44] F.Defever, I.Mihai, L.Verstraelen, *B.-Y.Chen's inequality for C-totally real submanifolds of Sasakian space forms,* Boll.Un.Mat.Ital.B(7)**11**(1997), no.11, 365-374.

[45] F.Dillen, J.Fastenakels, *On an inequality of Oprea for Lagrangian submanifolds,* Cent.Eur.J.Math.**7**, 1(2009), 140-144.

[46] F.Dillen, S.Nölker, *Semi-parallelity,multi-rotation surfaces and the helix-property,* J.Reine.Angew.Math.**435**, 33-63(1993).

[47] F.Dillen, L.Vrancken, *The classification of* 3*-dimensional homogeneous locally strongly convex affine hypersurfaces,* Manuscripta Math.**80**, 165-180(1993).

[48] J.Eells, J.H.Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J.Math.**86**(1964), 109-160.

[49] D.Fetcu, C.Oniciuc, *Explicit formulas for biharmonic submanifolds in Sasakian space forms,* Pacific J.Math.**240**(2009), 85-107.

[50] D.Fetcu, C.Oniciuc, *A note on integral C-parallel submanifolds in* $S^7(c)$, Rev.Un.Mat.Argentina.**52**(2011), 33-45.

[51] A.Fiakow, *Hypersurfaces of a space of constant curvature,* Ann.of Math., **39**(1938), 762-785.

[52] R.S.Gupta, S.M.Khursheed, M.H.Shahid, *Slant submanifolds of a Kenmotsu manifold,* Radovi Matematicki, **12**(2004), 205-214.

[53] I.E.Hirică, *Geometrie spectrală pe varietăţi Riemann,* Editura Universităţii din Bucureşti, 2004.

[54] C.J.Hsu, *Remarks on totally umbilical submanifolds in Sasakian manifolds*, Soochow J.Math.**9**(1983), 85-94.

[55] J.Inoguchi, *Biminimal submanifolds in contact 3-manifolds*, Balkan J.Geom.Appl. **12**(2007), 56-67.

[56] T.Ikawa, *Sasakian immersions with vanishing C-Bochner curvature tensors,* TRU Math., **11**(1975), 31-34.

[57] G.Y.Jiang, 2-*harmonic maps and their first and second variational formulas*(Chinese), Chinese Ann.Math. A **7**(1986), 389-402.

[58] K.Kenmotsu, *A class of almost contact Riemannian manifolds*, Tohoku Math.J., **21**(1972), 93-103.

[59] M.Kon, *Totally real submanifolds in a Kähler manifold*, J.Differential Geometry, **11**(1976), 251-257.

[60] E.Loubeau, S.Montaldo, *Biminimal immersions*, Proc.Edinburgh Math.Soc.**51**(2008), 421-437.

[61] A.Lotta, *Slant submanifolds in contact geometry,* Bull.Math.Soc.Roumanie, **39**(1996), 183-198.

[62] G.D.Ludden, M.Okumura, K.Yano, *Totally real submanifolds of complex manifolds*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei. **58**(1975), 544-555.

[63] G.D,Ludden, M.Okumura, K.Yano, *A totally real surface in* CP^2 *that is not totally geodesic*, Proc.Amer.Math.Soc.**53**(1975), 186-190.

[64] S.Maeda, Y.Ohnita, S.Udagawa, *On slant immersiones into Kähler manifolds*, Kodai Mathematical Journal, **16**(1993), 205-219.

[65] J.C.Marrero, *The local structure of trans-Sasakian manifolds,*Ann.Mat.Pura Appl. **162**(1992), 77-86.

[66] K.Matsumoto, I.Mihai, *Ricci tensor of C-totally real submanifolds in Sasakian space forms,* Nihonkai Math.J. **13**(2002), 191-198.

[67] A.Mihai, *B.Y.Chen inequalities for slant submanifolds in generalized complex space forms,* Rad.Mat.**12**(2004), no. 2, 215-231.

[68] A.Mihai, *Warped product submanifolds in generalized complex space forms,* Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis **21**(2005), 79-87.

[69] A.Mihai, *Geometric inequalities for purely real submanifolds in complex space forms,* Results Math.**55**(2009), no.3-4, 457-468.

[70] A.Mihai, I.Mihai, R.Miron(Eds.), *Topics in Differential Geometry,*Ed.Academiei Romane, Bucharest, 2008.

[71] I.Mihai, *Geometria subvarietăţilor în varietăţi complexe,* Editura Univ.Bucureşti, 2002.

[72] I.Mihai, *Ricci curvature of submanifolds in Sasakian space forms,* J.Austral.Math.Soc.**72**(2002), 247-256.

[73] I.Mihai, V.Ghisoiu, *Minimality of certain contact slant submanifolds in Sasakian space forms*, Int.J.Pure and Appl.Math.Sci.**1**(2004), 95-99.

[74] I.Mihai, N.Radulescu, *An improved Chen-Ricci inequality for Legendrian submanifolds in Sasakian space forms*, J.Adv.Math.Stud.**4**(2011), 51-58.

[75] I.Mihai, I.Presură , *An improved first Chen inequality for Legendrian submanifolds in Sasakian space forms*, Period Math Hung(2017)74:220-226.

[76] I.Mihai, I.Presură, *An optimal inequality for contact CR-submanifolds in Sasakian space forms*, trimis spre publicare.

[77] C.R.Montealegre, L.Vrancken, *Lagrangian submanifolds of the three dimensional complex projective space,* J.Math.Soc.Japan, **53**, 3(2001), 603-631.

[78] S.Nölker, *Isometric immersions of warped products*,to appear in Diff.Geom.Appl.; Isometrische Immersionen verzerrter Produkte, Doctoral Thesis, Ḱoln, 1990.

[79] K.Nomizu, *Some results in E.Cartan's theory of hypersurfaces,* Bull.of Amer.Math.Soc., **79**(1973), 1184-1188.

[80] A.Olteanu, *Recent results in the geometry of warped product submnifolds,* Matrix Rom, 2011.

[81] A.Olteanu, *Doubly warped product submanifolds in generalized complex space forms*, Prooceedings of the Conference RIGA, 2014.

[82] T.Oprea, *Chen's inequality in Lagrangian case,* Colloq.Math., **108**, 1(2007), 163-169.

[83] T.Oprea, *On a Riemannian invariant of Chen type,* Rocky Mountain J.Math.**38**, 568-587.

[84] P.K.Pandey, *On contact slant submanifolds in Kenmotsu space forms,* Journal of Engineering, Vol.2(2012), 41-44.

[85] I.Presură, *Geometric inequalities for Legendrian submanifolds in Sasakian space forms,* Proceedings of the Conference RIGA 2014, Bucharest, Romania,
191-194.

[86] I.Presură, *Geometric inequalities for submanifolds in Sasakian space forms,* Bull.Korean Math.Soc. **53**(2016), No.4, 1095-1103.

[87] H.Reckziegel, *Horizontal lifts of isometric immersions into the bundle space of a pseudo-Riemannian submersion*, Global Differential Geometry and Global Analysis (1984), Lecture notes in Mathematics **12**(1985), 264-279.

[88] T.Sasahara, *Legendre surfaces in Sasakian space forms whose mean curvature are eigenvectors*, Publ.Math.Debrecen.**67**(2005), 285-303.

[89] T.Sasahara, *Biharmonic Lagrangian surfaces of constant mean curvature in complex space forms*, Glasgow Math.J.**49**(2007), 497-507.

[90] T.Sasahara, *Biminimal Legendrian surfaces in 5-dimensional Sasakian space forms*, Colloq.Math.**108**(2007), 297-304.

[91] T.Sasahara, *Stability of biharmonic Legendrian submanifolds in Sasakian space forms*, Canad.Math.Bull.**51**(2008), 448-459.

[92] T.Sasahara, *Biminimal Lagrangian surfaces of constant mean curvature in complex space forms*, Differential Geom.Appl.**27**(2009), 647-652.

[93] T.Sasahara, *A classification for biminimal Lagrangian surfaces in complex space forms*, J.Geom.Phys.**60**(2010), 884-895.

[94] T.Sasahara, *A class of biminimal Legendrian submanifolds in Sasakian space forms*, Mathematische Nachrichten**287**, 79-90, 2014.

[95] T.Sasahara, *Biminimal Lagrangian H-umbilical submanifolds in complex space forms*, to appear in Geom.Dedicata.

[96] S.Sasaki, *Almost contact manifolds, Lecture note I*, Tohoku University, (1965).

[97] F. Solamy, B.Y. Chen, S. Deshmukh, *Two optimal inequalities for anti-holomorphic submanifolds and their applications*, ArXiv [Math. DG], 2013.

[98] S.Tanno, *Sasakian manifolds with constant ϕ-holomorphic sectional curvature*, Tohoku Math.J.**21**(1969), 501-507.

[99] M.M.Tripathi, J.-S.Kim, S.-B.Kim, *Mean curvature and shape operator of slant immersions in a Sasakian space form,* Balkan J.Geom.Appl.**7**(2002), no. 1, 101-111.

[100] M.M.Tripathi, J.-S.Kim, S.-B.Kim, *A note on B.-Y.Chen's basic equality for submanifolds in a Sasakian space form,* Int.J.Math.Sci.**33**(2003), no. 11, 711-716.

[101] B.Ünal, *Doubly warped products*, Differ.Geom.App.**15**(3)(2001), 253-263.

[102] F.Urbano, *CR-submanifolds of Nearly Käehler Manifolds,* Doctoral Thesis, Granada, 1980.

[103] G.E.Vîlcu, *B.-Y.Chen inequalities for slant submanifolds in quaternionic space forms,* Turk J Math, **34**(1)(20110), 115-128.

[104] G.E.Vîlcu, *Slant submanifolds of quaternionic space forms,* Publ.Math.(Debr.), **81**(3-4)(2012), 397-413.

[105] S.Yamaguchi, M.Kon, T.Ikawa, *On C-totally real submanifolds*, J.Differential Geometry, **11**(1976), 59-64.

[106] K.Yano, S.Ishihara, *Submanifolds with parallel mean curvature vector,* J.Differential Geometry, **6**(1971), 95-118.

[107] K.Yano, M.Kon, *Totally real submanifolds of complex space forms*, Tohoku Math.J.**28**(1976), 215-225.

[108] K.Yano, M.Kon, *Anti-invariant submanifolds of Sasakian space forms I,* Tohoku Math.Journ. **29**(1977), 9-23.

[109] K.Yano, M.Kon, *Generic submanifolds of Sasakian manifolds*, Kodai Math.J. **3**(1980), 163-196.

[110] K. Yano, M. Kon, *Contact CR Submanifolds,* Kodai Math. J. **5** (1982), 238-252.

[111] K.Yano, M.Kon, *Structures on Manifolds,* World Scientific, 1984.