Universitatea din Bucureşti

Facultatea de Matematică şi Informatică

Şcoala Doctorală de Matematică

NOI REZULTATE PRIVIND ENTROPIA CUMULATIVĂ ŞI MODELAREA ENTROPICĂ

Student-doctorand: PANAIT (ILEANA) Ioana
Profesor coordonator: Prof. univ.dr. Vasile PREDA

Bucureşti, 2018

Cuprins

NOTAŢII ŞI ABREVIERI

• (Ω, K, P) - câmp finit de probabilitate, unde (Ω, K) - este un câmp finit de evenimente, iar $P : K \to R$ este o probabilitate.

• X - o variabilă aleatoare, în general presupusă ne-negativă, absolut continuă pe (Ω, K, P).

• $F(x) = P(X \leq x)$ - funcţia de repartiţie cumulativă a variabilei aleatoare X.

• $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$ - funcţia de supravieţuire a variabilei aleatoare X.

• Oriunde apare funcţia F, vom presupune că este absolut continuă şi inversabilă, inversa acesteia fiind notată cu F^{-1}.

• $f(x)$ - densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare X, de regulă, pe domeniul pe care se lucrează presupunem $f(x) > 0$.

• $D = \{(t_1, t_2)/0 \leq t_1 < t_2 \leq \infty, F(t_1) < F(t_2)\}$.

• $E_X[\varphi(X)]$ - media variabilei aleatoare $\varphi(X)$ în raport cu densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare X, unde φ este o aplicaţie măsurabilă. Vom presupune că $E_X(\varphi(X))$ există şi este finită.

• $E_Z[\varphi(Z)]$ - media variabilei aleatoare $\varphi(Z)$ în raport cu repartiţia variabilei aleatoare Z, unde φ este o aplicaţie măsurabilă şi Z este o variabilă aleatoare repartizată uniform pe intervalul $[0, 1]$ sau, uneori, pe intervalul $[a, b]$. Vom presupune că $E_Z[\varphi(Z)]$ există şi este finită.

• $E_{(X,Y)}[\varphi(X, Y)]$ - media vectorului aleator $\varphi(X, Y)$ în raport cu densitatea de probabilitate a vectorului aleator (X, Y).

• $H(X)$ - entropia Shannon a unei variabile aleatoare X.

• $H(X/\mathcal{F})$ - entropia Shannon a unei variabile aleatoare X condiţionată de $\sigma-$câmpul $\mathcal{F}$.

• $H(X, Y)$ - entropia Shannon a variabilelor aleatoare X şi Y.

• $CPIE_{w_1,w_2}(X; t_1, t_2)$ - entropia cumulativă ponderată pereche interval a variabilei aleatoare X pe intervalul $[t_1, t_2]$ cu funcţiile pondere w_1 si w_2.

• $\overline{H}_{w_1}^{t,q}(X)$ - entropia cumulativă ponderată Tsallis a unei variabile aleatoare X, cu funcţia pondere w_1.

• $H_{w_2}^{t,q}(X)$ - entropia cumulativă reziduală ponderată Tsallis a unei variabile aleatoare X, cu funcţia pondere w_2.

• $\overline{IH}_{w_1}^{t,q}(X; t_1, t_2)$ - entropia cumulativă ponderată Tsallis interval a unei variabile aleatoare X, $t_1 \leq X \leq t_2$, cu funcţia pondere w_1.

• $IH_{w_2}^{t;q}(X; t_1, t_2)$ - entropia cumulativă reziduală ponderată Tsallis interval a unei variabile aleatoare X, $t_1 \leq X \leq t_2$, cu funcţia pondere w_2.

• $CPE^{w_1,w_2}_{\varphi_1,\varphi_2}(X)$ - entropia cumulativă ponderată pereche - (φ_1, φ_2) a variabilei aleatoare X. Uneori această entropie va fi notată $CPE^{w_1,w_2}_{\varphi_1,\varphi_2}(F)$, unde F reprezintă funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X. Acest lucru se va aplica şi altor măsuri care apar în lucrare.

• $CE_w(X)$ - entropia cumulativă ponderată a variabilei aleatoare X sau a vectorului aleator X, în funcţie de context.

• $CRE_w(X)$ - entropia cumulativă reziduală ponderată a variabilei aleatoare X sau a vectorului aleator X, în funcţie de context. $CRE(X)$ este cazul particular al $CRE_w(X)$ pentru $w = 1$ şi reprezintă entropia cumulativă reziduală definită în lucrarea [102].

• $CRE_w(X, Y)$ - cross-entropia cumulativă reziduală ponderată.

• $CRE_w(Y/X)$ - entropia cumulativă reziduală ponderată a variabilei aleatoare Y condiţionată de variabila aleatoare X.

• $CRE_w(X/\mathcal{F})$ - entropia cumulativă reziduală ponderată a vectorului aleator X, condiţionată de $\sigma-$câmpul $\mathcal{F}$.

• $CE^n_w(X)$ - entropia cumulativă ponderată de ordin n a variabilei aleatoare X.

• $CE^{t,q}_w(X)$ - entropia cumulativă ponderată Tsallis a variabilei aleatoare X.

• $CRE^{t,q}_w(X)$ - entropia cumulativă reziduală ponderată Tsallis a variabilei aleatoare X.

• $cov(X, Y)$ - covarianţa variabilelor aleatoare X si Y.

• (X, Y, Z) - matricea de covarianţă a vectorilor aleatori X, Y, Z.

• $var(X)$ - dispersia variabilei aleatoare X.

• $C(\cdot, \cdot)$ - funcţia cupla bidimensională (engl. *copula*)

• $c(u, v)$ - densitatea de probabilitate a funcţiei cupla.

• $CKL_w(X, Y)$ - informaţia Kullback-Leibler cumulativă ponderată a variabilelor aleatoare X şi Y.

• $K_w(X, Y)$ - lipsa de acurateţe cumulativă ponderată a variabilelor aleatoare X şi Y.

• $CKL^{t,q}(X, Y)$ - informaţia Kullback-Leibler cumulativă Tsallis a variabilelor aleatoare X şi Y.

• $K^{t,q}(X, Y)$ - lipsa de acurateţe cumulativă Tsallis a variabilelor aleatoare X şi Y.

• $CKL^{t,q}_w(X, Y)$ - informaţia Kullback-Leibler cumulativă ponderată Tsallis a variabilelor aleatoare X şi Y.

• $K^{t,q}_w(X, Y)$ - lipsa de acurateţe (engl. *„cumulative inaccuracy”*) cumulativă ponderată Tsallis a variabilelor aleatoare X şi Y.

• $\log(\cdot) = \ln(\cdot)$, unde $\ln(\cdot)$ desemnează logaritmul natural.

• $0 \log 0 = 0 \log \infty = 0$ (convenţie).

- $\ln_q^t x = \left\{ \begin{array}{c} \frac{x^{1-q}-1}{1-q},\ \text{dacă}\ x>0,\ q\neq 1 \\ \ln x,\ \text{dacă}\ x>0,\ q=1 \end{array} \right\}$
- $0\ln_q^t 0 = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ \text{pentru}\ q<2 \\ -1,\ \text{pentru}\ q=2 \\ -\infty,\ \text{pentru}\ q>2 \end{array} \right\}$ (convenţie).

$0\ln_q^t \infty = \left\{ \begin{array}{c} +\infty,\ \text{pentru}\ q<0 \\ 0,\ \text{pentru}\ q>0 \end{array} \right\}$ (convenţie).

- $I(X\leq x) = \left\{ \begin{array}{cc} 1, & X\in[0,x] \\ 0, & X\notin[0,x] \end{array} \right\}$ este funcţia caracteristică a evenimentului $X\leq x$, unde X este variabilă aleatoare ne-negativă.
- $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $(\forall)\ p,\ q>0$, reprezintă funcţia beta a lui Euler, unde $\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx,\ p>0$ este funcţia gamma a lui Euler.
- R - mulţimea numerelor reale.
- $R_+^N = \{x=(x_1,x_2,...,x_N)\ /\ x_i\geq 0,\ i=\overline{1,N}\}$.

Capitolul 1

Introducere

1.1 Motivaţia şi importanţa cercetării

„Să nu pierdem nimic din trecut, cu trecutul se clădeşte viitorul" - este afirmaţia lui Anatole France, care ne-a întărit convingerea că pentru a crea o lucrare ştiinţifică este necesară o introspecţie a experienţei transmise de predecesori, întrucât documentarea insuficientă ar putea conduce la redescoperiri inutile sau ar orienta cercetarea în direcţii greşite, care trebuie evitate.

În anul 1948, Claude Elwood Shannon şi Norbert Wiener au dat conceptului de entropie semnificaţia de măsură a informaţiei furnizate de un experiment probabilistic sau de o variabilă aleatoare, având la bază entropia introdusă de Boltzman.

Motivaţia alegerii temei de cercetare *„Noi rezultate privind entropia cumulativă şi modelarea entropică",* este justificată de faptul că entropia cunoaşte o apreciere şi o recunoaştere din ce în ce mai mare, fiind aplicată cu succes în diferite ramuri ale ştiinţei, fapt care determină necesitatea aprofundării şi extinderii aplicaţiilor acestei măsuri.

Un argument în acest sens este dezvoltarea spectaculoasă pe care entropia a cunoscut-o, de la introducerea ei de către Shannon până în prezent. Odată cu descoperirea entropiei a fost deschisă o nouă ramură a matematicii, putând fi aplicată în numeroase domenii de activitate cu scopul de a eficientiza procesele specifice acestora, precum: ecologie [12], teoria informaţiei [25], statistică matematică [72], neurobiologie [103], comprimarea datelor [106], analiza financiară [111].

Datorită complexităţii sale, considerăm entropia un domeniu important de cercetare, tematica aleasă fiind de actualitate, iar evoluţia pe care o are necesitând un laborios efort de cercetare şi documentare, de culegere a informaţiilor şi cunoştinţelor pentru dezvoltarea ei.

Succesul înregistrat în domeniul teoriei informaţiei după introducerea entropiei este confirmat de rezultatele obţinute de matematicieni celebri, printre care menţionăm: S. Kullback, J. von Neumann, D.K.Faddeev, A.J. Khinchin, E.T. Jaynes, A.N. Kolmogorov, A. Renyi.

Capitolul 2

Un model general de entropie cumulativă ponderată pereche - (φ_1, φ_2)

2.1 Entropia cumulativă ponderată pereche - (φ_1, φ_2)

Dacă $\mathcal{K}$ reprezintă mulţimea tuturor funcţiilor de repartiţie cumulative, definim entropia cumulativă ponderată pereche - (φ_1, φ_2) astfel:

Definiţie 1 *Funcţionala* $CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2} : \mathcal{K} \to [0, \infty)$, *cu*

$$CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}(F) = \int_R [w_1(x) \cdot (\varphi_1 \circ F)(x) + w_2(x) \cdot (\varphi_2 \circ \overline{F})(x)]dx \qquad (2.1)$$

se numeşte entropie cumulativă ponderată pereche - (φ_1, φ_2).

2.2 $CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}$ pentru date grupate

În continuare vom introduce unele notaţii utilizate în descrierea datelor grupate, [69]. Intervalul $[\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_k]$ este divizat în k subintervale

$$[\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1],\ [\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2], ..., [\widetilde{x}_{k-1}, \widetilde{x}_k],$$

iar rangul fiecărei clase este dat de $\Delta x_j = \widetilde{x}_j - \widetilde{x}_{j-1}$, pentru orice $j = \overline{1, k}$.

Fie X o variabilă aleatoare cu funcţia de probabilitate absolut continuă F, care este cunoscută numai la capetele fiecărui subinterval.

Vom nota cu $p_j = F(\widetilde{x}_j) - F(\widetilde{x}_{j-1}),\ j = \overline{1,k}$ probabilităţile asociate fiecărui subinterval.

X^* reprezintă variabila aleatoare a cărei funcţie de repartiţie F^* este reprezentată de combinaţia liniară a valorilor lui F la capetele intervalelor considerate mai sus.

Avem:

$$F^*(x) = F(\widetilde{x}_{j-1}) + \frac{p_j}{\Delta x_j}(x - \widetilde{x}_{j-1}),\ \text{dacă } x \in (\widetilde{x}_{j-1}, \widetilde{x}_j], \tag{2.2}$$

$$F^*(x) = 0 \text{ pentru } x \leq \widetilde{x}_0 \text{ si } F^*(x) = 1 \text{ pentru } x > \widetilde{x}_k.$$

Astfel, F^* corespunde variabilei aleatoare X^*. Funcţia de densitate de probabilitate f^* a lui X^* este definită de $f^*(x) = \frac{p_j}{\Delta x_j}$, pentru $x \in (\widetilde{x}_{j-1}, \widetilde{x}_j],\ j = \overline{1,k}$. Presupunem $p_j > 0,\ \forall j$.

Lema 2 *Presupunem că funcţiile $\varphi_i, i = \overline{1,2}$ admite primitive şi notăm cu S_{φ_i} o primitivă a sa. Dacă $w_1(x) = w_2(x) = c,\ c \in R_+$ pentru orice $x \in [0, \infty)$, atunci entropia cumulativă ponderată pereche - (φ_1, φ_2) a funcţiei de repartiţie din relaţia (2.2) are următoarea formă:*

$$CPE^{w_1,w_2}_{\varphi_1,\varphi_2}(F^*) = c\sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta x_i}{p_i}[(S_{\varphi_1}(F(\widetilde{x}_i)) - S_{\varphi_1}(F(\widetilde{x}_{i-1})) + S_{\varphi_2}(\overline{F}(\widetilde{x}_{i-1})) - S_{\varphi_2}(\overline{F}(\widetilde{x}_i))] \tag{2.3}$$

Lema 3 *Dacă există $\widehat{w}_1,\ \widehat{w}_2 : [0,1] \to R_+$ astfel încât $w_1(x) = \widehat{w}_1(F(x))$, $w_2(x) = \widehat{w}_2(\overline{F}(x))$ şi $\psi_i(\cdot) = \varphi_i(\cdot)\widehat{w}_i(\cdot)$ admite o primitivă, notată $\widehat{S}_{\psi_i}(t) = \int_0^t \varphi_i(z)\widehat{w}_i(z)dz,\ i = \overline{1,2}$, atunci entropia cumulativă ponderată pereche - (φ_1, φ_2) a funcţiei de repartiţie din relaţia (2.2) are următoarea formă:*

$$CPE^{w_1,w_2}_{\varphi_1,\varphi_2}(F^*) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta x_i}{p_i}[\widehat{S}_{\psi_1}(F(\widetilde{x}_i)) - \widehat{S}_{\psi_1}(F(\widetilde{x}_{i-1})) + \widehat{S}_{\psi_2}(\overline{F}(\widetilde{x}_{i-1})) - \widehat{S}_{\psi_2}(\overline{F}(\widetilde{x}_i))]. \tag{2.4}$$

Teorema 4 *În ipotezele lemei 2, fie φ_1 şi φ_2 două funcţii generatoare de entropie şi F o funcţie de repartiţie absolut continuă pe $[a,b]$. X^* reprezintă variabila aleatoare corespunzătoare datelor grupate, cu $\Delta x_i = \Delta x = (b - a)/k,\ k > 0$.*

Atunci avem următorul rezultat:

$$CPE^{w_1,w_2}_{\varphi_1,\varphi_2}(F^*) \to c\int_a^b ((\varphi_1 \circ F)(x) + (\varphi_2 \circ \overline{F})(x))dx,\ \textit{pentru } k \to \infty. \tag{2.5}$$

Teorema 5 *În ipotezele lemei 3, fie φ_1 şi φ_2 două functii generatoare de entropie şi F o funcţie de repartiţie continuă pe $[a,b]$. X^* reprezintă variabila aleatoare corespunzătoare datelor grupate, cu $\Delta x_i = \Delta x = (b-a)/k$.*

Atunci avem următorul rezultat:

$$CPE^{w_1,w_2}_{\varphi_1,\varphi_2}(F^*) \to \int\limits_a^b [\widehat{w}_1(F(x))(\varphi_1 \circ F)(x) + \widehat{w}_2(\overline{F}(x))(\varphi_2 \circ \overline{F})(x)]dx. \quad (2.6)$$

2.3 Reprezentări alternative ale $CPE^{w_1,w_2}_{\varphi_1,\varphi_2}$

În această secţiune am stabilit unele reprezentări alternative pentru entropia cumulativă ponderată pereche - (φ_1, φ_2), valabile în cazul în care φ_1, φ_2 sunt diferenţiabile. Aceste reprezentări vor contribui la determinarea unor condiţii care asigură existenţa $CPE^{w_1,w_2}_{\varphi_1,\varphi_2}$ şi a unor estimatori simpli.

Rezultatul prezentat de propoziţia următoare se obţine considerând $Z = F(X)$ o variabilă aleatoare uniformă pe $[0,1]$ şi utilizând integrarea prin părţi. Variabila aleatoare X este absolut continuă cu densitatea $f > 0$.

Propoziţie 6 *Fie φ_1, φ_2 două funcţii diferenţiabile ne-negative definite pe intervalul $[0,1]$ şi w_1, w_2 două funcţii pondere pozitive mărginite şi diferenţiabile definite pe mulţimea numerelor reale.*

Atunci pentru $F \in \mathcal{K}$ (pentru care există F^{-1}) cu funcţia cuantilă $F^{-1}(u)$, densitatea de probabilitate $f > 0$, funcţia cuantilă de densitate $q(u) = 1/f(F^{-1}(u))$, unde $u \in [0,1]$ şi variabila aleatoare $Z \sim U_{[0,1]}$ astfel încât $Z = F(x)$, au loc următoarele relaţii:

$$CPE^{w_1,w_2}_{\varphi_1,\varphi_2}(F) = E_Z\{[w_1(F^{-1}(Z))\varphi_1(Z) + w_2(F^{-1}(Z))\varphi_2(1-Z)]q(Z)\}.$$

$$CPE^{w_1,w_2}_{\varphi_1,\varphi_2}(F) = E_Z\{\frac{1}{f(F^{-1}(Z))}\left[w_1'(F^{-1}(Z))\varphi_1(Z)\right] + w_1(F^{-1}(Z))\varphi_1'(Z) -$$
$$-\frac{1}{f(F^{-1}(Z))}\left[w_2'(F^{-1}(Z))\varphi_2(1-Z)\right] - w_2(F^{-1}(Z))\varphi_2'(1-Z)\}F^{-1}(Z).$$

$$CPE^{w_1,w_2}_{\varphi_1,\varphi_2}(F) = E_Z\{\frac{1}{f(F^{-1}(Z))}\cdot[w_1'(F^{-1}(Z))\varphi_1(Z) - w_2'(F^{-1}(Z))\varphi_2(1-Z)] +$$
$$+w_1(F^{-1}(Z))\varphi_1'(Z) - w_2(F^{-1}(Z))\varphi_2'(1-Z)\}F^{-1}(Z).$$

$$CPE^{w_1,w_2}_{\varphi_1,\varphi_2}(F) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\{w_1'(x)(\varphi_1 \circ F)(x) - w_2'(x)(\varphi_2 \circ \overline{F})(x) + f(x)[w_1(x)(\varphi_1' \circ F)(x) - w_2(x)(\varphi_2' \circ \overline{F})(x)]\}xdx,$$

unde mediile se presupun că există şi sunt finite.

2.4 Repartiţii de probabilitate de $CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}$ maximă pentru medie şi dispersie date

În această secţiune vom da condiţii necesare şi condiţii suficiente de optimalitate, care se bazează pe principiul variaţional dat de ecuaţia Euler-Lagrange.

Fie $F(x)$ funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X. Notăm cu $Q(u)$ funcţia cuantilă asociată repartiţiei F, definită astfel:

$$Q(u) = \inf\{x/F(x) \geq u\}.$$

Presupunem că F şi Q sunt diferenţiabile cu derivate continue. Fie $q(u) = Q'(u)$, funcţia cuantilă de densitate.

Teorema 7 *Fie funcţiile $w_1, w_2, \varphi_1, \varphi_2$ diferenţiabile de clasă C^1. Condiţiile necesare de optimalitate pentru ca repartiţia de entropie cumulativă maximă $CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}$ compatibilă cu media m şi dispersia σ^2 fixate să corespundă funcţiei de repartiţie $F(x)$ de cuantilă Q a unei variabile aleatoare X sunt:*

$$\phi'(u) + l_1 + 2l_2 Q(u) - q(u) \cdot \left[w_1'(Q(u))\varphi_1(u) + w_2'(Q(u))\varphi_2(1-u)\right] = 0,$$

$$E_U[Q(U)] = m \tag{2.7}$$

$$E_U[Q^2(U)] = m^2 + \sigma^2 \tag{2.8}$$

unde

$$\phi(u) = w_1(Q(u))\varphi_1(u) + w_2(Q(u))\varphi_2(1-u) \text{ şi variabila } U \sim U_{[0,1]},$$

iar l_1 şi l_2 sunt multiplicatorii Lagrange care se determină din restricţiile corespunzătoare.

Teorema 8 *Fie funcţiile $w_1, w_2, \varphi_1, \varphi_2$ diferenţiabile de clasă C^1, $CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}$ $(\varphi_1, \varphi_2)-$ entropia cumulativă ponderată şi $Z(u) = w_1(u)\varphi_1(u) + w_2(1-u)\varphi_2(1-u)$ concavă şi diferenţiabilă, cu Z' de pătrat integrabilă pe $[0,1]$.*

Atunci repartiţia de entropie cumulativă maximă compatibilă cu medie m şi dispersie σ^2 fixate este dată de funcţia cuantilă:

$$Q(u) = m + \sigma\phi'(u)\cdot$$

$$\cdot \left(E_U[\widetilde{w}_1'(U)\varphi_1(U) + \widetilde{w}_1(U)\varphi_1'(U) - \widetilde{w}_2'(1-U)\varphi_2(1-U) - \widetilde{w}_2(1-U)\varphi_2'(1-U)]^2\right)^{-1/2},$$

unde

$$w_1(x) = \widetilde{w}_1(F(x)) \quad si \quad w_2(x) = \widetilde{w}_2(1-F(x))$$

iar expresia

$$\widetilde{w}_1'(u)\varphi_1(u) + \widetilde{w}_1(u)\varphi_1'(u) - \widetilde{w}_2'(1-u)\varphi_2(1-u) - \widetilde{w}_2(1-u)\varphi_2'(1-u)$$

este de pătrat integrabilă.

2.5 Proprietăţi ale $CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}$ pentru masura de scală

Propoziţie 9 *Fie F_X funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X, $w_1 = c_1 > 0$, $w_2 = c_2 > 0$, unde c_1, c_2 sunt constante reale date.*

Atunci

$$CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}(aX+b) = |a|\, CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}(F_X). \tag{2.9}$$

Propoziţie 10 *Fie F_{X_1}, F_{X_2} funcţiile de repartiţie absolut continue ale variabilelor aleatoare X_1, respectiv X_2 cu $F_{X_1} \preceq_1 F_{X_2}$ şi funcţiile de densitate de probabilitate pozitive f_1, respectiv f_2. Fie $w_1(x) = \widehat{w}_1(F(x))$; $w_2(x) = \widehat{w}_2(\overline{F}(x))$. Atunci avem următorul rezultat:*

$$CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}(F_{X_1}) \leq CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}(F_{X_2}). \tag{2.10}$$

2.6 $CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}$ pentru suma a două variabile aleatoare independente

Teorema 11 *Fie X şi Y două variabile aleatoare independente absolut continue şi φ_1, φ_2 două funcţii concave definite pe intervalul $[0,1]$ şi w_1, respectiv w_2 numere reale pozitive.*

Dacă mediile există, atunci avem:

$$CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}(F_{X+Y}) \geq \max\{CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}(F_X), CPE_{\varphi_1,\varphi_2}^{w_1,w_2}(F_Y)\}, \tag{2.11}$$

unde F_X, F_Y şi F_{X+Y} sunt funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare X, Y, respectiv $X+Y$.

Capitolul 3

Estimări ale entropiei cumulative reziduale ponderate şi ale entropiei cumulative ponderate

3.1 Entropia cumulativă reziduală ponderată

3.1.1 Entropia cumulativă reziduală ponderată. Proprietăţi

Definiţie 12 *Fie X un vector aleator cu valori în R^N. Vom defini entropia cumulativă reziduală ponderată a vectorului X, dacă există şi este finită:*

$$CRE_w(X) = -\int_{R_+^N} w(\lambda)P(|X| > \lambda)\log P(|X| > \lambda)d\lambda \tag{3.1}$$

unde $X = (X_1, ..., X_N)$, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N)$, $|X| > \lambda$ semnifică $|X_i| > \lambda_i$, $R_+^N = \{x \in R^N / \ x = (x_1, ..., x_N),\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1, N}\}$, iar $w : (0, \infty)^N \to [0, \infty)$ este o aplicaţie integrabilă.

Teorema 13 *Fie $w_i,\ i = \overline{1, N}$ funcţii pondere mărginite (pentru care există constantele $m_i \in (0, \infty),\ i = \overline{1, N}$ aşa încât $w_i \leq m_i,\quad i = \overline{1, N}$) şi fie*

$$w(x_1, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} w_i(x_i). \tag{3.2}$$

Atunci $CRE_w(X) < \infty$ dacă şi numai dacă $E\left[|X_i|^p\right] < \infty$, pentru orice $i = \overline{1, N}$ şi $p > N$.

Teorema 14 *Pentru orice variabile aleatoare independente şi ne-negative X şi Y şi pentru $w(x)=$constant>0, $(\forall)$ $x\geq 0$, avem:*

$$\max\left(CRE_w(X),CRE_w(Y)\right)\leq CRE_w(X+Y)$$

Teorema 15 *Fie vectorul aleator X şi aplicaţia $w:R_+^N\to[0,\infty)$. Sunt adevărate următoarele proprietăţi:*

a) $CRE_w(X)\geq 0$;

b) $CRE_w(X)=0\Leftrightarrow$ vectorul $|X|$ este constant $P-$aproape sigur.

Teorema 16 *Fie vectorul aleator $X=(X_i)_{i=\overline{1,N}}$ şi aplicaţiile integrabile $w:R_+^N\to R_+$, $w_i:R_+\to R_+$, $i=\overline{1,N}$, $w(x)=w_1(x_1)\cdot\ldots\cdot w_N(x_N)\geq 0$. Atunci:*

$$CRE_w(X)=\sum_{i=1}^{N}CRE_{w_i}(X_i)\prod_{j\neq i}\int_0^\infty w_j(\lambda_j)(\overline{F}_{|X_j|}(\lambda_j))d\lambda_j. \tag{3.3}$$

3.1.2 Entropia cumulativă reziduală ponderată condiţionată

Propoziţie 17 *Fie $X\in L^p$, $p>N$, $\sigma-$câmpurile $\mathfrak{F}$ şi $\mathcal{G}$, cu $\mathfrak{F}\subset\mathcal{G}$ şi aplicaţia convexă $w:R^N\to(0,+\infty)$. Atunci:*

$$E[CRE_w(X/\mathfrak{F})/\mathcal{G}]\leq CRE_w(X/\mathcal{G}). \tag{3.4}$$

3.1.3 Entropia cumulativă reziduală ponderată şi entropia diferenţială

Teorema 18 *Fie $X\geq 0$ cu densitatea f şi aplicaţia integrabilă concavă $w:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$. Atunci*

$$CRE_w(X)\geq C^w\exp\{H(X)\},$$

unde

$$C^w=\exp\left\{\int_0^1\log(x\,|\log x|)dx+\int_0^\infty f(x)\log w(x)dx\right\}. \tag{3.5}$$

Urmând linia din Propoziţia 2, [102] şi Teorema 18 de mai sus, avem:

Propoziţie 19 *Fie variabila aleatoare ne-negativă X şi σ - câmpul $\mathfrak{F}$. Presupunem că X are o densitate condiţionată în raport cu $\mathfrak{F}$ (X are o densitate de probabilitate condiţionată dată, $Y=y$).*

Atunci $CRE_w(X/\mathfrak{F}) \geq C^w \exp\{H(X/\mathfrak{F})\}$, *unde*

$$C^w = \exp\left\{\int_0^1 \log(x\,|\log x|)dx + \int_0^\infty f(x)\log w(x)dx\right\},$$

iar $H(X/\mathfrak{F})$ *este entropia Shannon condiţionată, definită astfel:*

$$H(X/\mathfrak{F}) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x/\mathfrak{F})\log f(x/\mathfrak{F})dx,$$

iar pentru densitatea condiţionată $f(x/\mathfrak{F})$, *avem:*

$$P[X > t/\mathfrak{F}] = \int_t^\infty f(x/\mathfrak{F})dx.$$

3.2 O abordare a entropiei cumulative ponderate pereche interval

Considerăm X o variabilă aleatoare ne-negativă, cu funcţia de densitate de probabilitate $f(x)$, funcţia de repartiţie cumulativă $F(x) = P(X \leq x)$ şi funcţia de supravieţuire $\overline{F}(x) = P(X > x)$. Presupunem $f > 0$ pentru $x > 0$.

$$f(x;t_1,t_2) = \frac{f(x)}{F(t_2) - F(t_1)},$$
$$F(x;t_1,t_2) = P(X < x/t_1 \leq X \leq t_2), \text{ pentru orice } t_1 \leq x \leq t_2.$$

Definiţie 20 *Entropia cumulativă ponderată pereche interval a variabilei aleatoare* X *pe intervalul* $[t_1, t_2]$ *cu funcţiile pondere* w_1 *şi* w_2 *este definită astfel:*

$$CPIE_{w_1,w_2}(X;t_1,t_2) = -(t_2 - t_1)\cdot$$
$$\cdot E_Z[w_1(Z)\cdot F(Z;t_1,t_2)\cdot\log F(Z;t_1,t_2)+w_2(Z)\cdot\overline{F}(Z;t_1,t_2)\cdot\log\overline{F}(Z;t_1,t_2)], \tag{3.6}$$

unde $Z \sim U_{[t_1,t_2]}$.

Propoziţie 21 *Fie*

$$\delta_{w_1}(t_1,t_2) = (t_2 - t_1)\cdot(F(t_2) - F(t_1))^{-1}\cdot E_Z[w_1(Z)\cdot(F(Z) - F(t_1))]$$

şi

$$\delta_{w_2}(t_1,t_2)=(t_2-t_1)\cdot(F(t_2)-F(t_1))^{-1}\cdot E_Z\left[w_2(Z)\cdot(\overline{F}(Z)-\overline{F}(t_2)\right].$$

Atunci,

$$CPIE_{w_1,w_2}(X;t_1,t_2)=(t_2-t_1)\cdot(F(t_1)-F(t_2))^{-1}\cdot$$

$$\cdot E_Z[w_1(Z)\cdot(F(Z)-F(t_1))\cdot\log(F(Z)-F(t_1))+w_2(Z)\cdot(\overline{F}(Z)-\overline{F}(t_2))\cdot\log(\overline{F}(Z)-\overline{F}(t_2))]+$$

$$+\log(F(t_2)-F(t_1))\cdot(\delta_{w_1}(t_1,t_2)+\delta_{w_2}(t_1,t_2)).$$

3.3 Entropia cumulativă reziduală ponderată Tsallis interval. Entropia cumulativă ponderată Tsallis interval.

Definiţie 22 *Definim entropia cumulativă ponderată Tsallis* ($\overline{H}^{t,q}_{w_1}(X)$) *şi entropia cumulativă reziduală ponderată Tsallis* ($H^{t,q}_{w_2}(X)$) *a unei variabile aleatoare* X *cu funcţia de repartiţie cumulativă* F *şi funcţia de supravieţuire* $\overline{F}$ *astfel:*

$$\overline{H}^{t,q}_{w_1}(X)=-\int_{R_+}w_1(x)F(x)\ln^t_q F(x)dx.$$

$$H^{t,q}_{w_2}(X)=-\int_{R_+}w_2(x)\overline{F}(x)\ln^t_q \overline{F}(x)dx.$$

Definiţie 23 *Definim entropia cumulativă ponderată Tsallis interval* ($\overline{IH}^{t,q}_{w_1}(X;t_1,t_2)$) *şi entropia cumulativă reziduală Tsallis ponderată interval* ($IH^{t,q}_{w_2}(X;t_1,t_2)$) *a unei variabile aleatoare* X, $t_1\le X\le t_2$ *:*

$$\overline{IH}^{t,q}_{w_1}(X;t_1,t_2)=-(t_2-t_1)E_Z[w_1(Z)F(Z;t_1,t_2)\ln^t_q F(Z;t_1,t_2)],$$

$$IH^{t,q}_{w_2}(X;t_1,t_2)=-(t_2-t_1)E_Z[w_2(Z)\overline{F}(Z;t_1,t_2)\ln^t_q \overline{F}(Z;t_1,t_2)]$$

unde $Z\sim U_{[t_1,t_2]}$.

Lema 24 *Avem:*

$$IH^{t,q}_{w_2}(X;t_1,t_2)=$$

$$-(\overline{F}(t_1)-\overline{F}(t_2))^{q-2}(t_2-t_1)E_Z[w_2(Z)(\overline{F}(Z)-\overline{F}(t_2))\ln^t_q(\overline{F}(Z)-\overline{F}(t_2))]+$$

$$(\overline{F}(t_1)-\overline{F}(t_2))^{q-1}\ln^t_q(\overline{F}(t_1)-\overline{F}(t_2))\left\{-\psi_2(t_1)+E[\psi_2(X)/t_1\le X\le t_2]\right\}.$$

Lema 25 *Avem:*

$$\overline{IH}^{t,q}_{w_1}(X;t_1,t_2) =$$
$$-(\overline{F}(t_1)-\overline{F}(t_2))^{q-2}(t_2-t_1)E_Z[w_1(Z)(\overline{F}(t_1)-\overline{F}(t_2))\ln_q^t(\overline{F}(t_1)-\overline{F}(t_2))]+$$
$$(\overline{F}(t_1)-\overline{F}(t_2))^{q-1}\ln_q^t(\overline{F}(t_1)-\overline{F}(t_2))\left\{\psi_1(t_2)-E[\psi_1(X)/t_1\leq X\leq t_2]\right\}.$$

Capitolul 4

Estimare empirică

4.1 Reprezentări echivalente pentru CRE_w şi CE_w

Definiţie 26 *Fie $w : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, o funcţie pondere. Definim entropia cumulativă ponderată empirică şi entropia cumulativă reziduală ponderată empirică ale eşantionului aleator $X_1,\ X_2, ..., X_n$ cu funcţia de repartiţie F, astfel:*

$$CE_w(F_n) = -\int_0^\infty w(x) F_n(x) \log F_n(x) dx,$$

şi respectiv,

$$CRE_w(F_n) = -\int_0^\infty w(x) \overline{F}_n(x) \log \overline{F}_n(x) dx,$$

Propoziţie 27 *Considerăm statisticile de ordine $X_{(1)} \leq\ X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$ ale unui eşantion aleator $X_1,\ X_2, ..., X_n$ şi fie ψ o primitivă pentru w. Atunci:*

$$CE_w(F_n) = [\psi(X_{(n)}) - \overline{\psi(X)}] \log n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} B_j \log j,$$

unde

$$B_j = j(\psi(X_{(j+1)}) - \psi(X_{(j)})), \tag{4.1}$$

iar $\overline{\psi(X)}$ reprezintă media eşantionului $(\psi(X_i))_{i=\overline{1,n}}$.

Propoziţie 28 *Considerăm statisticile de ordine* $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$ *ale unui eşantion aleator* $X_1, X_2, ..., X_n$ *şi fie* ψ *o primitivă pentru* w. *Atunci:*

$$CRE_w(F_n) = (\overline{\psi(X)} - \psi(X_{(1)})) \log n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} D_j \log(n-j),$$

unde

$$D_j = (n-j)(\psi(X_{(j+1)}) - \psi(X_{(j)})), \tag{4.2}$$

iar $\overline{\psi(X)}$ *reprezintă media eşantionului* $(\psi(X_j))_{j=\overline{1,n}.}$

4.2 Informatia Kullback-Leibler cumulativă empirică

Considerăm variabilele aleatoare absolut continue, ne-negative, independente, identic repartizate X şi Y şi eşantioanele aleatoare independente $\mathcal{X}= (X_i;\ i = \overline{1,n})$ şi $\mathcal{Y}= (Y_j;\ j = \overline{1,m})$, unde X_i şi Y_j sunt copii independente ale lui X, respectiv Y.

Considerăm $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} I(X_i \in [0,x])$ şi $G_m(y) = \frac{1}{m} \sum\limits_{j=1}^{m} I(Y_j \in [0,y])$, $x, y \in R$, repartiţiile empirice ale eşantioanelor $\mathcal{X}$, respectiv $\mathcal{Y}$, iar $\overline{X}_n$ şi $\overline{Y}_m$ reprezintă mediile respectivelor eşantioane.

Considerăm $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$ şi $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq ... \leq Y_{(m)}$ statisticile de ordine ale celor două eşantioane.

Fie $\Delta X_{(i)} = X_{(i+1)} - X_{(i)}$, unde $i = \overline{1, n-1}$.

Utilizând notaţiile din [31], fie $N_j = \sum\limits_{i=1}^{n} I(X_i \in [0, Y_{(j)}])$, $j = \overline{1,m}$, numărul de variabile aleatoare ale eşantionului $\mathcal{X}$ mai mici sau egale cu statistica de ordin j a eşantionului $\mathcal{Y}$.

Vom nota $X_{j,1} < X_{j,2} < ...$, variabilele aleatoare ale primului eşantion ce aparţin intervalului $(Y_{(j)}, Y_{(j+1)}]$, dacă există. Ca şi în [31], punctul stâng, respectiv punctul drept al unei variabile aleatoare T cu funcţia de repartiţie cumulativă F_T sunt date de $l_T = \inf\{t \in R / F_T(t) > 0\}$, respectiv $r_T = \sup\{t \in R / F_T(t) < 1\}$.

Considerăm funcţia pondere integrabilă $w : [0,\infty) \to [0,\infty)$ şi $W : [0,\infty) \to [0,\infty)$, o primitivă a sa.

4.2.1 Informaţia Kullback-Leibler cumulativă ponderată empirică

Informaţia Kullback-Leibler a variabilelor aleatoare X şi Y, cu funcţiile de repartiţie F, respectiv G, introdusă de A. di Crescenzo, M. Longobardi este definită astfel:

$$CKL(F,G) = \int_{l}^{\max\{r_X,r_Y\}} F(t)\log\left(\frac{F(t)}{G(t)}\right)dt + E\left[X\right] - E\left[Y\right]. \tag{4.3}$$

Definiţie 29 *Fie X şi Y două variabile aleatoare pentru care punctele - stânga coincid $l = l_X = l_Y$ şi $E[W(X)]$ şi $E[W(Y)]$ finite.*

Informaţia Kullback-Liebler cumulativă ponderată a variabilelor aleatoare X şi Y este dată de:

$$CKL_w(X,Y) = \int_{l}^{\max\{r_X,r_Y\}} w(x)\cdot\left[F(x)\cdot\log\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right) - F(x) + G(x)\right]dx \tag{4.4}$$

Definiţie 30 *Pentru orice pereche de variabile aleatoare X şi Y, astfel încât $l = l_X = l_Y$, lipsa de acurateţe cumulativă ponderată este definită astfel:*

$$K_w(X,Y) = -\int_{l}^{\max\{r_X,r_Y\}} w(x)\cdot F(x)\cdot\log G(x)dx \tag{4.5}$$

cu condiţia ca integrala să fie finită.

Entropia cumulativă ponderată a variabilei aleatoare X este definită astfel:

$$CE_w(X) = -\int_{0}^{\infty} w(x)\cdot F(x)\cdot\log F(x)dx \tag{4.6}$$

Remarcă 31 *Utilizând definiţiile 29 şi 30, obţinem următoarea exprimare a informaţiei Kullback-Leibler cumulative ponderate:*

$$CKL_w(X,Y) = K_w(X,Y) - CE_w(X) + E\left[W(X)\right] - E\left[W(Y)\right] \tag{4.7}$$

Informaţia Kullback-Leibler cumulativă ponderată empirică a variabilelor aleatoare X şi Y corespunde la:

$$CKL_w(F_n, G_m) = \int_0^{\infty} w(x) \left(F_n(x) \log \frac{F_n(x)}{G_m(x)} - F_n(x) + G_m(x) \right) dx.$$

Lipsa de acurateţe cumulativă ponderată empirică corespunde la:

$$K_w(F_n, G_m) = -\int_0^{\infty} w(x) F_n(x) \log(G_m(x)) dx \tag{4.8}$$

Entropia cumulativă ponderată empirică corespunde la:

$$CE_w(F_n) = -\int_0^{\infty} w(x) \cdot F_n(x) \log(F_n(x)) dx \tag{4.9}$$

Calcule simple conduc la:

$$CKL_w(F_n, G_m) = K_w(F_n, G_m) - CE_w(F_n) + \overline{W(X)}_n - \overline{W(Y)}_m \tag{4.10}$$

Teorema 32 *Informaţia Kullback-Leibler cumulativă ponderată empirică a variabilelor aleatoare X şi Y se exprimă astfel:*

$$CKL_w(F_n, G_m) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m-1} \left[\log \frac{j}{m} \left(\sum_{r=1}^{N_{j+1}-N_j} W(X_{j,r}) + N_j W(Y_{(j)}) - N_{j+1} W(Y_{(j+1)}) \right) \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n} \cdot \log \frac{i}{n} \cdot \Delta W(X_{(i)}) \right) + \overline{W(X)}_n - \overline{W(Y)}_m \tag{4.11}$$

unde $\overline{W(X)}_n$ şi $\overline{W(Y)}_m$ sunt mediile eşantioanelor $(W(X_i))_{i=\overline{1,n}}$ şi respectiv, $(W(Y_j))_{j=\overline{1,m}}$

Aplicaţie numerică. Fie X şi Y două variabile aleatoare continue, nenegative. Am realizat un studiu de simulare pentru a evalua informaţia Kullback-Leibler cumulativă ponderată empirică (bazată pe Teorema 32), considerând un eşantion de dimensiune $n = 1500$, pentru variabila aleatoare X şi $m = 1000$, pentru variabila aleatoare Y. Procesul de calcul a fost repetat de 1000 de ori. Erorile medii pătrate (MSEs) dintre mediile informaţiei Kullback-Leibler cumulative ponderate empirice şi corespondenţii săi teoretici sunt prezentate în tabelul de mai jos.

4.3 Reprezentări echivalente pentru $CRE_w^{t,q}$ şi $CE_w^{t,q}$

În această secţiune vom introduce entropia cumulativă reziduală ponderată empirică Tsallis şi entropia cumulativă ponderată empirică Tsallis şi utilizând statistici de ordine, media de selecţie $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ şi dispersia de selecţie $\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, vom da estimări ale acestora. În cele ce urmează, presupunem cantităţile care apar că există şi sunt finite.

Definiţie 33 *Fie $w : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, o funcţie pondere. Definim entropia cumulativă ponderată Tsallis ($CE_w^{t,q}$) şi entropia cumulativă reziduală ponderată Tsallis ($CRE_w^{t,q}$) ale variabilei aleatoare X cu funcţia de repartiţie F, astfel:*

$$CE_w^{t,q}(X) = -\int_0^{\infty} w(x)F(x)\ln_q^t F(x)dx,$$

şi respectiv,

$$CRE_w^{t,q}(X) = -\int_0^{\infty} w(x)\overline{F}(x)\ln_q^t \overline{F}(x)dx.$$

Definiţie 34 *Fie $w : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, o funcţie pondere. Definim entropia cumulativă ponderată empirică Tsallis şi entropia cumulativă reziduală ponderată empirică Tsallis ale eşantionului aleator $X_1,\ X_2, ..., X_n$ cu funcţia de repartiţie empirică F_n, astfel:*

$$CE_w^{t,q}(F_n) = -\int_0^{\infty} w(x)F_n(x)\ln_q^t F_n(x)dx$$

şi respectiv,

$$CRE_w^{t,q}(F_n) = -\int_0^{\infty} w(x)\overline{F}_n(x)\ln_q^t \overline{F}_n(x)dx$$

În continuare vom da reprezentări alternative pentru $CE_w^{t,q}$ şi $CRE_w^{t,q}$.

Propoziţie 35 *Presupunem că* $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$ *este statistica de ordine a unui eşantion aleator* $X_1, X_2, ..., X_n$ *şi fie* ψ *o primitivă pentru* w. *Atunci:*

$$CE_w^{t,q}(F_n) = n^{1-q} \cdot \ln_q^t n \cdot [\psi(X_{(n)}) - \overline{\psi(X)}] - n^{-q} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} B_j \cdot \ln_q^t j.$$

Propoziţie 36 *Presupunem că* $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$ *este statistica de ordine a unui eşantion aleator* $X_1, X_2, ..., X_n$, *iar* ψ *o primitivă pentru* w. *Atunci:*

$$CRE_w^{t,q}(F_n) = n^{-q} \cdot \ln_q^t n \cdot n[\overline{\psi(X)} - \psi(X_{(1)})] - n^{-q} \sum_{j=1}^{n-1} D_j \cdot \ln_q^t(n-j).$$

Capitolul 5

Caracterizări ale unor repartiţii statistice prin intermediul CRE_w şi CRE

5.1 O aplicaţie a CRE_w în teoria fiabilităţii

Teorema 37 *Fie variabila aleatoare ne-negativă X şi aplicaţia concavă $w:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$.*

Atunci $CRE_w(X)\le CRE_w(X(\lambda))$, unde $X(\lambda)$ este o variabilă aleatoare repartizată exponenţial cu media $\lambda=\frac{\int_0^\infty tw(t)\overline{F}(t)dt}{E[X]}$.

5.2 O caracterizare a entropiei cumulative reziduale pentru o clasă de repartiţii statistice

Teorema 38 *Variabila aleatoare X cu funcţia de repartiţie*

$$F(x,\lambda_1,...,\lambda_k)=1-e^{-\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i x^{\alpha_i}};\ \lambda_i\ge 0;\ \alpha_i>0$$

are entropie cumulativă reziduală maximă în clasa A a variabilelor aleatoare pozitive absolut continue Y, care satisfac relaţia:

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_i}{\alpha_i+1}E[X^{\alpha_i+1}]=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_i}{\alpha_i+1}E[Y^{\alpha_i+1}],\ \textit{unde } \lambda_0=-1. \qquad (5.1)$$

5.3 Entropia cumulativă reziduală pentru repartiţia Weibull. Test pentru repartiţia Weibull

Fie X o variabilă aleatoare repartizată $Weibull(\alpha, \lambda_1)$ şi variabilele aleatoare $X_1, X_2, ..., X_n$ independente, identic repartizate $Weibull(\alpha, \lambda_1)$, unde α este parametru cunoscut, iar λ_1 este necunoscut.

Considerăm statisticile de ordine $X_{(1)} \leq ... \leq X_{(n)}$, funcţia cumulativă de repartiţie $F_0(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x^\alpha},\ x > 0,\ \alpha > 0,\ \alpha \neq 1,\ \alpha \neq 2,\ \lambda_1 > 0$, respectiv funcţia de densitate de probabilitate $f_0(x) = \lambda_1 \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda_1 x^\alpha}$. Media variabilei aleatoare X este $E[X] = \frac{1}{\lambda_1^{1/\alpha}}\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1) = \frac{1}{\alpha \cdot \lambda_1^{1/\alpha}}\Gamma(\frac{1}{\alpha})$, iar $E[X^{\alpha+1}] = \frac{\alpha+1}{\alpha^2 \lambda_1^{1+1/\alpha}}\Gamma(\frac{1}{\alpha}) = \frac{\alpha+1}{\alpha\lambda_1}E[X]$. De aici, obţinem $\lambda_1 = \frac{(\alpha+1)E[X]}{\alpha \cdot E[X^{\alpha+1}]}$.

În această secţiune vom testa ipoteza

$$H_0 : F(x) = F_0(x, \alpha; \lambda_1) \quad \text{cu alternativa} \quad H_1 : F(x) \neq F_0(x, \alpha; \lambda_1)\ .$$

Definiţie 39 *[4] Dacă X şi Y sunt două variabile aleatoare ne-negative cu funcţiile de repartiţie F şi respectiv, G atunci CKL dintre aceste repartiţii este definită astfel:*

$$CKL(F, G) = \int_0^\infty \overline{F}(x) \log \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} dx - \{E[X] - E[Y]\}, \tag{5.2}$$

unde $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ şi $\overline{G}(x) = 1 - G(x)$ sunt repartiţiile reziduale (funcţiile de supravieţuire) ale lui X, respectiv Y.

Astfel, în ipoteza nulă, avem $CKL(F, F_0) = 0$ şi valori mari pentru $CKL(F, F_0)$ conduc la respingerea ipotezei nule H_0 în favoarea ipotezei alternative H_1. Deoarece evaluarea integralei din formula $CKL(F, F_0)$ presupune cunoaşterea completă a funcţiilor F şi F_0, atunci $CKL(F, F_0)$ nu este operaţională. Urmând linia din [5] $CKL(F, F_0)$ vom construi o statistică de discriminare a informaţiei. Astfel, în cazul nostru, $CKL(F, F_0)$ se scrie:

$$CKL(F, F_0) = -CRE(F) - \int_0^\infty \overline{F}(x) \log \overline{F}_0(x, \alpha; \lambda_1) dx - E[X] + \Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})\lambda_1^{-1/\alpha}$$

$$= -CRE(F) + \lambda_1 \int_0^\infty x^\alpha \overline{F}(x) dx - E[X] + \Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})\lambda_1^{-1/\alpha} \tag{5.3}$$

Un estimator al $CKL(F,F_0)$ se obţine înlocuind în relaţia (5.3), F cu funcţia de repartiţie empirică $F_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} I(x \in [x_{(i)}, x_{(i+1)}])$, λ_1 cu $\frac{(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n} X_i}{\alpha \sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha+1}}$ şi $E[X]$ cu $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Prin urmare, avem estimatorul:

$$\widehat{CKL}(F_n,F_0) = -CRE(F_n) - \frac{\alpha-1}{\alpha}\overline{X} + \Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})\left(\frac{(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n} X_i}{\alpha\sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha+1}}\right)^{-1/\alpha} \tag{5.4}$$

unde $CRE(F_n) = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{n}(\log \frac{n-i}{n})(X_{(i+1)} - X_{(i)})$. Împărţind relaţia (5.4) la $\overline{X}$ (evident, $\overline{X} > 0$, exceptând cazul degenerat), obinem următorul test statistic:

$$CK_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{n}(\log \frac{n-i}{n})(X_{(i+1)} - X_{(i)}) + \Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})\left(\frac{(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n} X_i}{\alpha\sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha+1}}\right)^{-1/\alpha}}{\overline{X}}. \tag{5.5}$$

5.4 Puterea testului

Puterea testului CK_n este estimată în raport cu mai multe alternative. Metoda este aceea a simulării CK_n sub repartiţii alternative. Pentru fiecare alternativă au fost generate 10000 eşantioane de dimensiuni $n = 10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 100$, iar puterea testului este estimată de frecvenţa eşantioanelor care intră în regiunea critică.

Alternativele continue investigate sunt:

$\Gamma(\lambda,\beta)$ cu funcţia de densitate de probabilitate:

$$f(x;\lambda,\beta) = \frac{1}{\lambda^{\beta}\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\frac{x}{\lambda}},\ x > 0,\ \beta > 0,\ \lambda > 0.$$

$LN(\mu,\vartheta)$ cu funcţia de densitate de probabilitate:

$$f(x;\mu,\vartheta) = \frac{1}{x\vartheta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\vartheta^2}},\quad x > 0,\ \mu \in R,\ \vartheta > 0.$$

$Burr(k=1;c,\delta)$ cu funcţia de densitate de probabilitate:

$$f(x;c,\delta) = \frac{\frac{c}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right)^{c-1}}{\left(1+\left(\frac{x}{\delta}\right)^{c}\right)^{2}},\ x > 0,\ \delta > 0,\ c > 0.$$

Puterea testului CK_n este comparată cu aceea a altor teste. Testele selectate sunt: testul Van-Soest, testul Finkelstein şi Schafers şi testul Anderson-Darling. Aceste teste statistice sunt, respectiv:

$$W^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(F_0 \left(X_{(i)}, \widehat{\lambda}_1 \right) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n},$$

$$S^* = \sum_{i=1}^{n} \max \left\{ \left| F_0 \left(X_{(i)}, \widehat{\lambda}_1 \right) - \frac{i}{n} \right|, \left| F_0 \left(X_{(i)}, \widehat{\lambda}_1 \right) - \frac{i-1}{n} \right| \right\},$$

$$A^2 = -n - \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n} \left\{ \ln \left(F_0 \left(X_{(i)}, \widehat{\lambda}_1 \right) \right) - \ln \left(1 - F_0 \left(X_{(n+1-i)}; \widehat{\lambda}_1 \right) \right) \right\},$$

unde $F_0 \left(X_{(i)}, \widehat{\lambda}_1 \right) = 1 - e^{-\frac{4\sum_{i=1}^{n} x_i}{4\sum_{i=1}^{n} x_i^4} \cdot x_i^3}$.

H_0 este respinsă în cazul valorilor mari ale testelor statistice $W^2,\ S^*,\ A^2$.

Bibliografie

[1] Arndt, C., *Information Measures*, Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2004.

[2] Asadi, M., Zohrevand, Y., *On the dynamic cumulative residual entropy, Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 137, no. 6, pp. 1931-1941, 2007.

[3] Balakrishnan, N., Lai, C.D., *Continuous Bivariate Distributions,* Springer, 2009.

[4] Baratpour, S., Habibi Rad, A., *Testing Goodness-of-Fit for Exponential Distribution Based on Cumulative Residual Entropy,* Commun. Statist. Theor. Meth., 41, 1387-1396, 2012.

[5] Baratpour, S., Khodadadi, F., *A Cumulative Residual Entropy Characterization of the Rayleigh Distribution and Related Goodness-of-Fit Test*, J. Statist. Res. Iran 9: 115–131, 2012.

[6] Bedford, T., Wilson, K.J., *On the construction of minimum information bivariate copula families*, Ann. Inst. Stat. Math., 66, 703-723, 2014.

[7] Beganu, G., Toma, A., Badin, L., Manu, L., Covrig, M., *Probability Theory and Mathematical Statistics. Book of problems,* Meteora Press Publ. House, Bucharest, ISBN 973-590-597-3, 2002.

[8] Beirlant, J., Dudewicz, E.J., Györfi, L., Van Der Meulen, E.C., *Nonparametric entropy estimation: An overview*, Int. J. Math. Stat. Sci., 6, 17–39, 1997.

[9] Bickel, P.J., Lehmann, E.L., *Descriptive statistics for nonparametric models. III. Dispersion.*, Annals of Statistics 4 1139–1158, 1976.

[10] Bickel, P. J., and Lehmann, E. L., *Descriptive statistics for nonparametric models. IV. Spread*, Contributions to Statistics: Jaroslav Hájek Memorial Volume (J. Jurečková, ed.), pp. 33–40. Academia, Prague, 1979.

[11] Burbea, J., Rao, C.R., *On the convexity of some divergence measures based on entropy functions*, IEEE Transactions on Information Theory 28, 489-495, 1982.

[12] Burnham, K. P., Anderson, D. R., *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*, Second Edition (Springer Science, New York) ISBN 978-0-387-95364-9, 2002.

[13] Calsaverini, R.S., Vicente, R., *An information-theorethic approach to statistical dependence: Copula information,* Europhys. Lett., 88, 68003, 2009.

[14] Caroni, C., *The Correct Ball Bearing Data. Life-time Data Analysis,* 8, 395-399, 2002.

[15] Chen, S., Poon, S., *Modelling international stock market contagion using copula and risk appetite.* http://ssrn.com/abstract=1024288, 2007.

[16] Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W., *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons, New York, 2004.

[17] Choros, B., Ibragimov, R., Permiakova, E., *Copula estimation*, Copula Theory and Its Applications, Lecture Notes in Statistics, V198, Springer. pp. 77–91, 2010.

[18] Chu, B., *Recovering copulas from limited information and an application to asset allocation*, J. Bank. Financ., 35, 1824-1842, 2011.

[19] Chu, B., Satchell, S., *Recovering the Most Entropic Copulas from Preliminary Knowledge of Dependence*, Econometrics, 4, 20; doi:10.3390/econometrics4020020, 2016.

[20] Chung, K. L., *A Course in Probability Theory*, Academic Press, 2nd edition, 1974.

[21] Ciucu, G., Tudor, C., *Probabilităţi şi procese stocastice*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1978.

[22] Ciumara, R., **Ileana, I.,** *On generalized cumulative information of Kullback-Leibler type,* Proceedings of the Romanian Academy, Series A, Volume x, Number x/20xx, pp. 000-000 (acceptat pentru publicare).

[23] Ciumara, R., **Panait (Ileana), I.**, *Some applications in fiability of CRE_w. Statistical entropic test for Weibull distribution,* (în curs de publicare).

[24] Contreras-Reyes, J.E., Arellano-Valle R.B., *Kullback-Leibler divergence measure for multivariate skew-normal distributions*, Entropy, 14: 1606-1626, 2012.

[25] Cover, T.M., Thomas, J.A., *Elements of Information Theory*, Wiley: New York, NY, USA, 1991.

[26] Cox, D., Wermuth, N., *Multivariate Dependencies: Models, Analysis and Interpretation*, CRC, 1996.

[27] De la Peña, V.H., Ibragimov, R., Sharakhmetov, S., *Characterizations of joint distributions, copulas, information, dependence and decoupling, with applications to time series*, In Optimality, Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes—Monograph Series 49, The Institute of Mathematical Statistics: Beachwood, OH, USA, pp. 183–209, 2006.

[28] Di Crescenzo, A., Longobardi, M., *Entropy-based measure of uncertainty in past lifetime distributions*, J. Appl. Prob. 39, 434–440, 2002.

[29] Di Crescenzo, A., Longobardi, M., *On cumulative entropies and lifetime estimation*, In Mira. J.M. et al. (eds) IWINAC 2009, Part I, LNCS 5601. Springer, Berlin, 132-141, 2009.

[30] Di Crescenzo, A., Longobardi, M., *On cumulative entropies*, Journal of Statistical Planning and Inference 139, 4072-4087, 2009.

[31] Di Crescenzo, A., Longobardi, M., *Some properties and applications of cumulative Kullback-Leibler information*, Applied Stochastic Models in Business and Industry, 31 875-891, 2015.

[32] Di Crescenzo, A., Toomaj, A., *Further results on the generalized cumulative entropy*, Kybernetika, vol. 53(2017), no. 5, 959-982.

[33] Drissi, N., Chonavel, T., Boucher, J.M., *Generalized cumulative residual entropy for distributions with unrestricted supports*, Res. Lett. Sign. Proc. 2008, Article ID 790607, 2008.

[34] Dumitrescu, M., Florea, D., Tudor, C., *Elemente de teoria probabilitatilor si statistica matematica*, Tipografia Universitatii Bucuresti, 1983.

[35] Dumitrescu, M., Entropic measures, *Markov information sources and complexity*, (coautor Cristian Calude), Applied Mathematics and Computation, 132, pp. 369-384, 2002.

[36] Ebrahimi, N., Masoumi, E., Soofi, E.S., *Ordering univariate distributions by entropy and variance*, Journal of Econometrics 90, 317-336, 1999.

[37] Embrechts, P., *Copulas: a personal view*. Journal of Risk and Insurance 76, 639–650, 2009.

[38] Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A.J., *Modelling dependence with copulas and applications to risk management*, in: Rachev, S.T. (Ed.), Handbook of Heavy Tailed Distribution in Finance. Elsevier, North-Holland, Amserdam. chapter 8, pp. 329–384, 2003.

[39] Faddeev, D.K., *On the concept of entropy of a finite probabilistic scheme (Russian)*, Uspehi Mat. Nauk (N. S.) 11, no. 1(67), 227-231, 1956.

[40] Fan, Y., Patton, A.J., *Copulas in econometrics*, Annu. Rev. Econ., 6, 179-200, 2014.

[41] Favre, A.C., El Adlouni, S., Perreault, L., Thiémonge, N., Bobée, B., *Multivariate hydrological frequency analysis using copulas*, Water Resour. Res., 40, doi:01110.01029/02003WR002456, 2004.

[42] Fermanian, J., Scaillet, O., *Nonparametric estimation of copulas for time series*, Journal of Risk 5, 25–54, 2003.

[43] Frery, A.C., Nascimento, A.D.C., Cintra, R.J., *Information theory and image understanding: an application to polarimetric SAR imagery*, Chilean Journal of Statistics, 2: 81-100, 2011.

[44] Genest, C., MacKay, J., *The joy of copulas: bivariate distributions with uniform marginals,* The American Statistician, Vol. 40, Issue 4, 280-283, 1986.

[45] Genest, C., Favre, A.C., *Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask*, J. Hydrol. Eng., 12, 347–368, 2007.

[46] Genest, C., Gendron, M., Bourdeau-Brien, M., *The advent of copulas in finance*, The European Journal of Finance 15, 609–618, 2009.

[47] Genest, C., Nešlehová, J., *Copula Modeling for Extremes*. In Encyclopedia of Environmetrics, 2nd ed.; El-Shaarawi, A.H., Piegorsch, W.W., Eds.; Wiley: Chichester, UK, Volume 2, pp. 530–541, 2012.

[48] Gijbels, I., Mielniczuk, J., *Estimating the density of a copula function*, Communications in Statistics - Theory and Methods 19, 445–464, 1990.

[49] Golan, A., *Information and entropy econometrics: Editor's view*, J. Econom., 107, 1–15, 2002.

[50] Golan, A., *Information and entropy econometrics—Volume overview and synthesis*, J. Econom., 138, 379–387,2007.

[51] Granger, C., Lin, J.L, *Using the mutual information coefficient to identify lags in nonlinear models*, J. Time Ser. Anal., 15, 371–384, 1994.

[52] Guiaşu, S., *Information Theory with Applications*, McGraw-Hill International Book Co., New York-Auckland-Bogota, 1977.

[53] Hao, Z., *Application of Entropy Theory in Hydrologic Analysis and Simulation*, Ph.D Thesis, Texas A&M University, College Station, TX, USA, 2012.

[54] Hao, Z., Singh, V.P., *Entropy-copula method for single-site monthly streamflow simulation*, Water Resour. Res., 48, W06604, 2012.

[55] Hao, Z., Singh, V.P., *Entropy-based method for bivariate drought analysis*, J. Hydrol. Eng., 18, 780–786, 2013.

[56] Hao, Z., Singh, V.P., *Modeling multi-site streamflow dependence with maximum entropy copula*, Water Resour. Res., 49, doi:10.1002/wrcr.20523, 2013.

[57] Haug, S., Kluppelberg, C., Peng, L., *Statistical models and methods for dependence in insurance data*, Journal of the Korean Statistical Society In Press, 2011.

[58] Hosking, J.R.M., *Distributions with maximum entropy subject to constraints on their $L-$moments or expected order statistics*, Journal of Statistical Planning and Inference 137 (2007) 2870-2891.

[59] Hosking, J.R.M., *L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics, Journal of the Royal Statistical Society*, Series, B, 52 105-124, 1990.

[60] Hosking, J.R.M., Wallis, J.R., *Regional Frequency Analysis*, 1997.

[61] **Ileana, I.**, Bălcău, C., Constantin, D., *Interval Weighted Cumulative Entropies for Pareto Distribution,* Buletin Stiintific, Universitatea din Pitesti, Seria Matematica si Informatica, Nr. 21, pg.1-8, 2015.

[62] Iosifescu, M., *Sampling entropy for random homogeneous systems with complete connections*, The Annals of Mathematical Statistics, 36, pp. 1433–1436, 1965.

[63] Iosifescu, M., Theodorescu, R., *Asupra entropiei lanturilor cu legaturi complete (On the entropy of chains with complete connections)*, Comunicarile Academiei R.P. Romane 11, 821-824, 1961.

[64] Jaynes, E.T., *Probability theory as logic. Maximum entropy and Bayesian methods* (Hanover, NH, 1989), 1-16, Fund. Theories Phys., 39, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.

[65] Joe, H., *Relative entropy measures of multivariate dependence*, J. Am. Stat. Assoc., 84, 157–164, 1989.

[66] Johnson, D.H., Glantz, R.M., *When does interval coding occur?*, Neurocomputing 59-60, 13–18, 2004.

[67] Junker, M., May, A., *Measurement of aggregate risk with copulas*, Econ J 8, 428–454, 2005.

[68] Kayal, S., *On generalized cumulative entropies.* Probab. Engrg. Inform. Sci. 30 (2016), 640–662. DOI:10.1017/s0269964816000218.

[69] Klein, I., Mangold, B., Doll, M., *Cumulative paired ϕ - Entropy*, Entropy, 18(7), 2016.

[70] Kolmogorov, A.N., *Entropy per unit time as a metric invariant of automorphisms (Russian)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 124, 754-755, 1959.

[71] Kolve, N., Dos Anjos, U., Mendes, B., *Copulas: a review and recent developments*, Stochastic Models 22, 617–660, 2006.

[72] Kullback, S., *Information Theory and Statistics*, John Wiley and Sons, Inc., New York; Chapman and Hall, Ltd., London, 1959.

[73] Kullback, S., Leibler, R.A., *On information and sufficiency*, Annals of Mathematical Statistics, 22: 79-86, 1951.

[74] Liebscher, E., *Construction of asymmetric multivariate copulas*, Journal of Multivariate Analysis 99(10), 2234–2250, 2008.

[75] Liese, F., Vajda, I., *Convex Statistical Distances*, Teubner-Verlag: Leipzig, Germany, 1987.

[76] Liu, B., *Uncertainty Theory*, 5th ed. http://orsc.edu.cn/liu/ut.pdf, 2015.

[77] Malevergne, Y., Sornette, D., *Testing the gaussian copula hypothesis for financial assets dependence*, Quant Fin 3, 231250, 2003.

[78] Mikosch, T., *Copulas: tales and facts*, Extremes 9, 3–20, 2006.

[79] Misagh, F., *On shift-Dependent Cumulative Entropy Measures*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 1-8, 2016.

[80] Misagh, F., Panahi, Y., Yari, G.H., Shahi, R., *Weighted cumulative entropy and its estimation*, Quality and Reliability (ICQR), IEEE International Conference on, 477-480, 2011.

[81] Misagh, F., Yari, G.H., *On weighted interval entropy*, Statistics and Probability letters, 81, 188-194, 2011.

[82] Mukherjee, S., Jafari F., Kim J.M., *Optimization of Spearman's Rho*, Revista Colombiana de Estadistica, Vol. 38, Issue 1, pp. 209-218, DOI: http://dx.doi.org/10.15446/rce.v38n1.48811, 2015.

[83] Nelsen, R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer-Verlag: New York, NY, USA, 1998.

[84] Nelsen, R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer: New York, NY, USA, 2006.

[85] Niculescu, M., Vasile, N., *Epistemologie. Perspectivă interdisciplinară*, Ed. Bibliotheca, Târgoviste, 2011.

[86] Ning, C., Xu, D., Wirjanto, T.S., *Is volatility clustering of asset returns asymmetric?,* J. Bank Financ., 52, 62-76, 2015.

[87] Oja, H., *On location, scale, skewness and kurtois of univariate distributions*, Scandinavian Journal of Statistics 8, 154-168, 1981.

[88] Onicescu, O., *Information energy*, Stud. Cerc. Mat. 18, 1419-1420, 1966.

[89] **Panait, I.,** *A weighted entropic copula from preliminary knowledge of dependence,* An. St. Univ. Ovidius Constanta, Vol. 26(1),2018, 223-240.

[90] **Panait (Ileana), I.**, *A general entropic model for weighted cumulative entropy,* (în curs de publicare).

[91] **Panait (Ileana), I.**, *A general residual cumulative weighted entropy. Some theoretical results and applications,* (în curs de publicare).

[92] Park S., Rao M., Shin D.W., *On cumulative residual Kullback-Leibler information*, Statistics and Probability Letters, 82:2025–2032, 2012.

[93] Patton, A.J, *On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation*, J. Financ. Econom., 2, 130-168, 2004.

[94] Patton, A., *Copula-based models for financial time series*, Handbook of Financial Time Series. Springer, Verlag, pp.767–785, 2009.

[95] Petrehus, V., Popescu, S.A., *Probabilităţi şi statistică,* Universitatea Tehnică de Construcţii, Bucureşti, 2005.

[96] Pfanzagl, J., *Asymptotic Expansions for General Statistical Models*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[97] Prakasa Rao, B. L. S., *Asymptotic Theory of Statistical Inference*, John Wiley, pp. 14, 1987.

[98] Preda, V., *The Student distribution and the principle of maximum entropy*, Ann. Inst. Statist. Math. A, 34, 335-338, 1982.

[99] Preda, V., Bălcău, C., *Entropy Optimization with Applications*, Ed. Academiei Române, Bucharest, 2010.

[100] Qu, L., Yin, W., *Copula density estimation by total variation penalized likelihood with linear equality constraints,* Elsevier, 2009.

[101] Rao, M., Chen, Y., Vemuri, B.C., Wang, F., *A new & robust information theoretic measure and its application to image alignment*, Proceedings of the 18th International Conferece on Information Processing in Medical Imaging (IPMI 03). Lecture Notes in Computer Science (vol. 2732), Springer-Verlag, Berlin, 388-400, 2003.

[102] Rao, M., Chen, Y., Vemuri, B.C., Wang, F., *Cumulative residual entropy, a new measure of information*, IEEE Transactions Informations Theory, 50, 685-690, 2004.

[103] Rieke, F., Warland, D., Van Steveninck, R., Bialek, W., *Spikes: Exploring the Neural Code*, The MIT press, 1997.

[104] Rodriguez, J.C., *Measuringfinancial contagion: A copula approach*, J. Empir. Financ, 14, 401-423, 2007.

[105] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, pp. 62, 1987.

[106] Salomon, D., *Data Compression*, Springer, 1998.

[107] Schroeder, M.J., *An alternative to entropy in the measurement of information*, Entropy 6, 388–412, 2004.

[108] Scott, D., *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization*, John Wiley: New York, 1992.

[109] Sekeh, S.Y., Borzadran, G.R.M., Roknabadi, A.H.R. *A note on double truncated (interval) weighted cumulative entropies*, arXiv preprint arXiv:1508.00246, 2015.

[110] Shannon, C.E., *A mathematical theory of communication*, The Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 379–423, 1948.

[111] Sharpe, W. F., *Investments*, Prentice Hall, 1985.

[112] Shih, J.H., Louis, T.A., *Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data*, Biometrics 51, 1384–1399, 1995.

[113] Singh, V.P., *The use of entropy in hydrology and water resources*, Hydrol. Process., 11, 587–626, 1997.

[114] Singh, V.P., *Hydrologic synthesis using entropy theory: Review*, J. Hydrol. Eng., 16, 421–433, 2011.

[115] Singh, V.P., *Entropy Theory and Its Application in Environmental and Water Engineering*, Wiley: New York, NY, USA, 2013.

[116] Singh, V.P., *Introduction to Entropy Theory in Hydrologic Science and Engineering*, McGraw-Hill Education: New York, NY, USA, 2015.

[117] Sklar, A., *Fonctions de repartitions a n dimensions et leurs marges*, l'Institut de statistique de l'Universite de Paris, 8, 229-231, 1959.

[118] Sklar, A., *Random variables, joint distribution functions and copulas*, Kybernetika 9(6), 449-460, 1973.

[119] Suhov, Y., Sekeh., S.Y., *Weighted cumulative entropies: An extension of CRE and CE*, arXiv 1507.07051, 2015.

[120] Trivedi, P.K., Zimmer, D.M., *Copula Modeling: An Introduction for Practitioners*, Now Publishers, Hanover, Mass, 2007.

[121] Usta, I., Kantar, Y.M, *On the performance of the flexible maximum entropy distributions within partially adaptive estimation,* Comput. Stat. Data Anal., 55, 2172–2182, 2011.

[122] Von Neumann, J., *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1955.

[123] Wang, F., Vemuri, B.C., Rao, M., Chen, Y., *Cumulative residual entropy, a new measure of information & its application to image alignment*, In: Proceedings on the Ninth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'03), Vol. 1, p. 548–553, IEEE Computer Society, 2003.

[124] Wang, F., Vemuri, B.C., *Non-rigid multi-modal image registration using cross-cumulative residual entropy*, Intern. J. Computer Vision 74, 201–215, 2007.

[125] Yue, S.,Ouarda, T., Bobée, B., Legendre, P., Bruneau, P., *The gumbel mixed model for flood frequency analysis,* J. Hydrol., 226, 88–100, 1999.

[126] Zhang, L., Singh, V.P, *Bivariate rainfall frequency distributions using archimedean copulas,* J. Hydrol., 332, 93–109, 2007.

[127] Zhang, L., Singh, V.P, *Trivariate flood frequency analysis using the gumbel-hougaard copula*, J. Hydrol. Eng., 12, 431-439, 2007.

[128] Zografos, K., Nadarajah, S., *Survival exponential entropies*, IEEE Trans. Inf. Theory 51, 1239–1246, 2005.