Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
Școala Doctorală de Matematică

Rezumatul tezei de doctorat

GraduĂri bune pe algebre structurale de matrice

Conducător de doctorat:

Prof. Dr. Sorin Dăscălescu

Student: Filoteia Beşleagă

București
2018

Introducere

Graduările după grupuri pe algebre joacă un rol esențial în algebra liniară, teoria reprezentării, teoria inelelor, algebra comutativă, combinatorică, geometria algebrică și teoria Lie. Graduările sunt instrumente care pot fi utile în studiul unor proprietăți specifice ale structurilor algebrice pe care sunt considerate. Există două surse principale de unde provine conceptul de algebră graduată. Prima este studiul polinoamelor; algebra de polinoame într-un număr arbitrar de nedeterminate are o graduare naturală după grupul aditiv al întregilor dată de gradul obișnuit al polinoamelor. A doua este teoria reprezentării grupurilor, unde algebra grupală kG a unui grup G peste un corp comutativ k are o G-graduare naturală.

Dacă A este o algebră peste un corp comutativ k și G este un grup (multiplicativ), o G-graduare pe A este o descompunere $A = \oplus_{g\in G} A_g$ a lui A ca sumă directă de k-subspații, astfel încât $A_g A_h \subset A_{gh}$ pentru orice $g, h \in G$.

Una dintre primele construcții ale unei structuri de algebră graduată care a jucat un rol fundamental în algebra comutativă a fost realizată de Krull în 1938 (a se vedea [35], [12]). A considerat un ideal maximal $\mathfrak{m}$ într-un inel local Noetherian A și un sistem minimal de generatori $\{\alpha_i\}_{1\le i\le r}$ pentru $\mathfrak{m}$. A definit pentru orice element nenul x din A "formele inițiale" ale lui x ca fiind mulțimea tuturor polinoamelor omogene $P(X_1, \ldots, X_r)$ de grad j cu coeficienți în corpul factor $k = A/\mathfrak{m}$ astfel încât $x \equiv P(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \pmod{\mathfrak{m}^{j+1}}$, unde $j = \max\,\{q \in \mathbb{Z} \mid x \in \mathfrak{m}^q\}$. Oricărui ideal $\mathfrak{a}$ din A i-a fost pus în corespondență "Leitdeal"-ul, i.e. idealul graduat al lui $k[X_1, \ldots, X_r]$ generat de "formele inițiale" ale tuturor elementelor din $\mathfrak{a}$; pentru Krull aceste două noțiuni substituie structura de algebră $\mathbb{Z}$-graduată asociată.

Dacă G este un grup și k este un corp comutativ, algebra grupală $A = kG$ are o G-graduare naturală dată de $A_g = kg$ pentru orice $g \in G$. În plus, dacă H este un subgrup normal al lui G, algebra kG are și o graduare naturală după grupul factor G/H; componenta omogenă de grad gH este $\sum_{h\in H} kgh$ pentru orice $g \in G$. Astfel componenta omogenă de grad trivial a acestei graduări este chiar algebra grupală kH a lui H; acest punct de vedere a fost utilizat în conectarea reprezentărilor lui G cu reprezentările lui H. Această G/H-graduare a lui $A = kG$ are proprietatea că $A_{gH}A_{rH} = A_{grH}$ pentru orice $g, r \in G$. Această abordare a fost inițiată de E. Dade în [17], [18], [19], care a studiat algebrele tare graduate, i.e. algebrele G-graduate A pentru care $A_g A_h = A_{gh}$ pentru orice $g, h \in G$, legătura între modulele peste componentele omogene A_e (unde e elementul neutru din G) și modulele (graduate) peste A și ca aplicație a extins teoria Clifford investigând modulele simple peste A_e în relație cu modulele (graduate) simple peste A. Acest fapt se aplică situației clasice, unde reprezentările ireductibile ale lui G sunt legate de reprezentările ireductibile ale subgrupului normal H, având în vedere că algebra kG înzestrată cu G/H-graduarea menționată mai sus este o algebră tare graduată.

Multe concepte și construcții din teoria inelelor au versiuni graduate pentru algebre graduate. De exemplu, un ideal stâng graduat al unei algebre A G-graduate este un ideal stâng I cu proprietatea că pentru orice element $a \in I$, cu descompunerea $a = \sum_{g \in G} a_g$ în structura graduată a lui A, toate componentele omogene a_g se află în I. Atunci A se numește Noetheriană la stânga graduată dacă orice lanț ascendent de ideale stângi graduate în A este staționar. O aplicație relevantă a teoriei graduărilor este de a investiga anumite proprietăți ale inelului subiacent al unei algebre via graduare. Mai precis, se studiază legătura dintre o algebră ce are o anumită proprietate de inel și aceeași algebră ce are versiunea graduată a acelei proprietăți; dacă se întâmplă ca proprietatea să fie echivalentă cu versiunea sa graduată, atunci este de obicei mai facil a verifica dacă versiunea graduată este satisfăcută. De exemplu, s-a demonstrat în [37] că pentru o algebră A graduată după grupul aditiv al întregilor, A este Noetheriană la stânga dacă și numai dacă este Noetheriană la stânga graduată. Mai general, echivalența dintre proprietatea de stânga Noetherienitate și proprietatea de stânga Noetherienitate graduată a fost demonstrată în [14] pentru orice algebră graduată după un grup policiclic-prin-finite.

Teoria inelelor graduate a devenit o direcție de studiu de mare interes în anii 1970. Primele cărți în această direcție [38], [39] au fost scrise de C. Năstăsescu și F. van Oystaeyen. Un mare avans în teorie a fost efectuat în [16], unde o dualitate între acțiuni de grupuri și graduări după grupuri a fost explicată în cazul grupurilor finite; acest fapt a sugerat o abordare edificatoare prin algebre Hopf. Mai precis, o G-graduare pe o k-algebră A este chiar o coacțiune a algebrei Hopf grupale kG pe A (cu alte cuvinte, A este o kG-comodul algebră). Dacă G este finit, această coacțiune coincide cu o acțiune a algebrei Hopf duale $(kG)^*$ pe A. Dacă k are suficiente rădăcini ale unității, atunci algebra Hopf grupală kG este autoduală și astfel o G-graduare, i.e. o coacțiune, este de fapt o acțiune a lui G ca automorfisme de algebre.

Dată o algebră graduată A, se pot considera A-module, dar și A-module graduate, care sunt A-module înzestrate cu o graduare compatibilă cu graduarea de pe A. O teorie a modulelor graduate peste un inel graduat poate părea să nu se diferențieze mult de teoria modulelor obișnuită. Într-adevăr, categoria A-modulelor stângi graduate este o categorie Grothendieck și multe concepte pot fi definite ca în cazul modulelor graduate. Totuși, modulele graduate sunt echipate cu o translație datorită unei posibile partiționări urmate de o rearanjare a partițiilor (a se vedea [28]). Din acest punct de vedere, teoria modulelor graduate are o complexitate specifică. De exemplu, o teorie locală a modulelor graduate este introdusă de Green și Marcos în [27]; este aplicată pentru algebre factor de drumuri. În plus, modulele graduate joacă un rol esențial în studiul aspectului omologic al inelelor (a se vedea [43]).

Este de interes studiul graduărilor după grupuri pe anumite algebre date. Astfel o problemă generală este: dată o algebră A, să se determine toate G-graduările pe A, pentru toate grupurile posibile G. Descrierea graduărilor a fost utilă în rezolvarea anumitor probleme în teoria inelelor. De exemplu, în a sa soluție la problema Specht pentru algebre asociative de caracteristică zero (a se vedea [32] and [49]) Kemer a trebuit să descrie toate graduările pe algebrele de matrice 2×2 după grupul ciclic de ordin doi. În [29], există descrierea

$\mathbb{Z}$-graduărilor pe algebre Lie complexe finit dimensionale. S-a arătat în [47] că toate $\mathbb{Z}$-graduările finite pe o algebră asociativă simplă pot fi obținute din descompunerea Pierce a acestei algebre. În [24], sunt clasificate toate graduările unei algebre Cayley-Dickson. O clasificare $\mathbb{Z}$-graduărilor finite pe algebre Lie simple infinit dimensionale este descrisă în [48].

Graduările pe algebrele de matrice reprezintă un important obiect de studiu printre algebrele graduate în general și au un larg spectru de aplicații. E. Zelmanov a propus următoarea problemă generală (a se vedea [30], [31]): să se determine G-graduările algebrei de matrice $M_n(k)$, unde G este un grup, k este un corp comutativ și n este un număr natural nenul. Este o problemă complexă și s-a lucrat mult în această direcție. Primele rezultate ce privesc graduări pe algebre de matrice au fost obținute de Knus în 1969 (a se vedea [34]). Multe rezultate de până acum au soluționat această problemă în funcție de structura lui G, k și de valoarea lui n; problema generală este încă nerezolvată. Pași spre soluția generală au fost efectuați. De exemplu, în [26] și [27], un caz special de graduări (astfel încât toate unitățile matriceale e_{ij} sunt elemente omogene) a fost considerat; aceste tip de graduări sunt numite graduări bune în [21]. Toate graduările algebrei $M_2(k)$ după C_2 au fost descrise în [21] folosind metode computaționale și dualitatea dintre acțiuni de grupuri și graduări după grupuri. Aceste metode apar în [9] în forma acțiunilor și a coacțiunilor algebrele Hopf (o G-graduare pe o algebră A coincide cu o structură de kG-comodul algebră pe A). Această idee a mai fost utilizată în studiul graduărilor pe algebre de matrice după grupuri ciclice (a se vedea [9]). Toate tipurile de izomorfism de C_2-graduări pe $M_2(k)$ sunt ilustrate în [9] (pentru $\mathrm{char}(k) \neq 2$) și în [7] (pentru $\mathrm{char}(k) = 2$). Dacă k este algebric închis, s-a arătat în [13] (a se vedea și [46]) că orice C_m-graduare pe $M_n(k)$ este izomorfă cu o graduare bună; au fost descrise (în termeni de coomologie) toate graduările după grupuri ciclice pentru un corp comutativ arbitrar k prin teoria coborârii. În plus, dacă G este fără torsiune (a se vedea [21]) sau dacă $G = C_p$ (unde p este prim), k are o rădăcină a unității de ordin p și $p \nmid n$ (a se vedea [9]) din nou orice graduare pe algebra de matrice este izomorfă cu o graduare bună. Se evidențiază importanța graduărilor bune. Studiul graduărilor după grupuri neciclice este mai dificil. În [8] graduările pe $M_2(k)$ peste grupul Klein $C_2 \times C_2$ (pentru un corp comutativ arbitrar k) au fost clasificate; a fost aplicată tehnica și dualitatea ce implică algebre Hopf. Mai mult, în [33] a fost obținută o clasificare a tuturor graduărilor după grupuri pe $M_2(k)$ pentru orice corp comutativ k; în plus, o abordare elementară a fost folosită pentru rezultatele privind C_2-graduările și $C_2 \times C_2$-graduările fără utilizarea niciunei tehnici menționate mai sus și s-a demonstrat și că orice graduare pe $M_2(k)$ este fie izomorfă cu o graduare bună fie se reduce la o graduare după C_2 sau după $C_2 \times C_2$. În cazul în care k este corp comutativ algebric închis, în [1] au fost descrise toate graduările pe $M_n(k)$ după grupuri abeliene; s-a arătat că orice astfel de graduare este izomorfă cu produsul tensorial dintre o graduare bună și o graduare fină (unde toți sumanzii direcți indexați după G au cel mult dimensiune 1). În [2] un rezultat similar a fost demonstrat pentru graduări după grupuri finite arbitrare în cazul în care k este algebric închis de caracteristică zero. Pentru un corp comutativ arbitrar k și un grup arbitrar G, în [10] au fost descrise și clasificate toate G-graduările pe $M_3(k)$ prin utilizare de extinderi Galois; s-a demonstrat că orice astfel de graduare este fie izomorfă cu una bună fie se reduce la o graduare după C_3 sau după $C_3 \times C_3$.

Subalgebrele în algebra totală de matrice sunt de mare însemnătate și vin cu o dificultate sporită în studiul graduărilor asociate. Algebrele de matrice superior triunghiulare pe blocuri (la care ne vom referi ca UT-algebre și pe care le vom considera ca subalgebre în $M_n(k)$) sunt exemple cheie de PI-algebre. Pentru orice grup și orice corp comutativ, o conjectură a apărut în [52], anume că o UT-algebră graduată este izomorfă cu produsul tensorial dintre o altă UT-algebră care are o graduare elementară (i.e. o graduare pentru care există o aplicație $f : \{1, \ldots, n\} \to G$ astfel încât $\deg(e_{ij}) = f(i)^{-1}f(j)$ pentru orice i, j, a se vedea [4]) și o algebră totală de matrice care este corp graduat (i.e. are o unitate și orice element nenul omogen este inversabil); acest lucru a fost demonstrat pentru orice corp comutativ algebric închis de caracteristică zero în [53] (pentru orice grup abelian finit) și în [44] (pentru orice grup abelian). În [3] au fost investigate graduările bune pe UT-algebre; s-a arătat că orice astfel de graduare este izomorfă cu inelul de endomorfisme al unui flag graduat peste un corp comutativ. De asemenea, s-a obținut un rezultat conform căruia orice două graduări bune sunt izomorfe dacă și numai dacă flagurile graduate corespunzătoare sunt izomorfe până la o translație; acest fapt a permis clasificarea (în aceeași lucrare) a tuturor graduărilor bune ca orbitele unei anumite biacțiuni a unui subgrup Young și a grupului G pe mulțimea G^n, unde G is grupul graduării. În [45] au fost determinate condițiile în care două UT-algebre graduate după același grup sunt izomorfe. UT-algebrele sunt un caz particular de algebre de incidență. În [42] graduările după grupuri au fost studiate pe algebra de incidență $I(X, k) = \{f : X \times X \to k \mid f(x, y) = 0 \text{ dacă } x \not\leq y\}$ pentru mulțimi parțial ordonate local finite $(X, \leq)$ (pentru operațiile pe $I(X, k)$ a se vedea [50]). S-a demonstrat că $I(X, k)$ are o graduare pentru care o anumită componentă omogenă (mai precis, cea corespunzătoare elementului neutru al grupului) este centrală dacă și numai dacă X este un antilanț. Dacă X este un antilanț finit cu n elemente, atunci $I(X, k) \simeq k^n$; în acest caz s-a efectuat studiul din [20] unde o descriere a tuturor graduărilor după grupuri pe algebrele diagonale a fost obținută pentru un corp comutativ arbitrar k.

Rezultatele originale ale acestei tezei reprezintă conținutul lucrărilor [5] și [6]. Studiem algebrele structurale de matrice; aceste algebre au fost astfel numite în [54], dar fuseseră mai înainte considerate în [41]. Investigațiile noastre pe algebre structurale de matrice (un caz special de algebre de incidență) au fost realizate în termeni de descriere (o algebră structurală de matrice este izomorfă cu algebra de endomorfisme a unui flag generalizat) în directă legătură cu graduări bune și cu scopul (atins) de determinare a grupului de automorfisme (ca biprodus). Am clasificat graduările bune ce provin din flaguri generalizate graduate și graduările bune pe algebre structurale de matrice asociate relațiilor de ordine parțială. A doua clasificare a dus la calculul numărului de tipuri de izomorfism de graduări bune în anumite cazuri particulare pentru grupuri finite. Algebrele structurale de matrice au fost utile ca exemple și contraexemple în teoria inelelor și în studiul invarianților numerici ai PI-algebrelor. Studiul prezentat în această teză furnizează și un nou tip de flaguri (deja menționat) ceea ce reprezintă de asemenea o contribuție matematică importantă; flagurile în general sunt concepte valoroase pentru geometria algebrică, teoria reprezentării, grupuri algebrice, combinatorică (a se vedea [36]).

În primul capitol, pentru un corp comutativ k, un număr natural nenul n și o relație de preordine ρ pe $\{1, \ldots, n\}$, introducem algebra structurală de matrice $M(\rho, k)$ (ca subalgebră în algebra totală de matrice $M_n(k)$) constituită din toate matricele cu zero pe pozițiile (i, j) cu proprietatea că $(i, j) \notin \rho$. În terminologia din [50], A este algebra de incidență peste k asociată lui ρ. Definim câteva structuri utile. Asociem lui ρ o relație de echivalență $\sim$ și numim $\mathcal{C}$ mulțimea sa de clase de echivalență; punem în legătură aceste clase printr-o relație de ordine parțială $\leq$. Corelăm cu mulțimea parțial ordonată $(\mathcal{C}, \leq)$ un graf orientat Γ; ilustrăm acest obiect combinatorial în mai multe exemple. În plus, arătăm că prin transformări ce sunt generate de anumite permutări putem avea în $M(\rho, k)$ toate blocurile inferioare nule.

Capitolul 2 cuprinde o descriere a automorfismelor algebrelor structurale de matrice și o pregătire pentru clasificarea G-graduărilor bune ce provin din flaguri graduate (G este un grup arbitrar). Arătăm că o algebră structurală de matrice $M(\rho, k)$ este izomorfă cu algebra de endomorfisme a unei anumite structuri algebrice combinatoriale $\mathcal{F}$ pe care o numim ρ-flag. Dacă $\mathcal{F} = (V, (V_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{C}})$ este un ρ-flag, arătăm că $\mathrm{End}(\mathcal{F})$-submodulele lui V sunt în corespondență bijectivă cu antilanțurile lui $\mathcal{C}$. Exemplificăm laticea unor astfel de submodule. De asemenea descriem automorfismelele de latice definite pe $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ ($\mathcal{A}(\mathcal{C})$ este mulțimea antilanțurilor lui $\mathcal{C}$). Găsim că mulțimea izomorfismelor de algebră de la $\mathrm{End}(\mathcal{F})$ la $\mathrm{End}(\mathcal{F}')$ (unde $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}'$ sunt ρ-flaguri) este în corespondență bijectivă cu o mulțime factor ce implică matricele inversabile din $M(\rho, k)$, automorfismele lui $\mathcal{C}$ care conservă cardinalitatea elementelor și funcțiile tranzitive pe ρ. În particular, dacă $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, grupul automorfismelor lui $\mathrm{End}(\mathcal{F})$ este descris ca grupul factor al unui produs semidirect dublu. Ca biprodus, obținem o prezentare descriptivă a grupului de automorfisme a algebrelor structurale de matrice. Acest grup de automorfisme a fost calculat în [15] și arătăm că prezentarea din [15] poate fi dedusă din a noastră.

În al treilea capitol analizăm G-graduările pe algebre structurale de matrice; le clasificăm pe cele care provin din flaguri graduate. Dacă $\mathcal{F}$ este un ρ-flag G-graduat, găsim că algebra sa de endomorfisme $\mathrm{End}(\mathcal{F})$ dobândește o G-graduare; notăm cu $\mathrm{END}(\mathcal{F})$ algebra G-graduată astfel obținută. Această graduare devine o G-graduare pe $M(\rho, k)$ via izomorfismul menționat în paragraful anterior. Graduările produse în acest mod sunt graduări bune pe $M(\rho, k)$. Este o interogație interesantă dacă toate graduările bune pot fi obținute în această manieră. Aceasta este o problemă de interes independent și poate fi formulată în termeni simpli legați de graful Γ asociat lui ρ: dacă G este un grup și pe fiecare săgeată din Γ putem nota un element al lui G ca etichetă, astfel încât pentru orice două drumuri ce pornesc și se termină în aceleași puncte produsul etichetelor săgeților este același pentru ambele drumuri, mulțimea de etichete provine dintr-o mulțime de ponderi pe vârfurile lui Γ, în sensul că o săgeată ce pornește din v_1 și se termină în v_2 are eticheta $g_1 g_2^{-1}$, unde g_1 și g_2 sunt ponderi ale lui v_1 și v_2? Această problemă a fost considerată în [41] în cazul în care G este abelian și s-a arătat că răspunsul este pozitiv dacă și numai dacă grupul de coomologie $H^1(\Delta, G) = 0$, unde Δ este un anumit complex simplicial asociat lui ρ. De asemenea, pentru o relație de preordine dată ρ, răspunsul la întrebarea de mai sus este pozitiv pentru orice grup abelian G dacă și numai dacă grupul de omologie $H_1(\Delta) = 0$. Arătăm că răspunsul este pozitiv pentru orice grup arbitrar G dacă și numai dacă închiderile normale a două subgrupuri $A(\Gamma) \subseteq B(\Gamma)$ ale grupului liber generat de săgețile lui Γ coincid; $A(\Gamma)$ și $B(\Gamma)$ sunt definite în termeni de cicli ai grafului neorientat obținut din Γ. Acest fapt este în paralel cu rezultatul din cazul abelian, unde $H_1(\Delta) = B/A$ pentru subgrupuri similare A și B într-un grup abelian liber asociat lui Γ. De fapt noi folosim versiuni puțin diferite ale lui A și B lucrând cu un graf diferit. Pentru clasificarea G-graduărilor ce provin din flaguri graduate, considerăm două ρ-flaguri G-graduate $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}'$ și analizăm izomorfismele dintre algebrele graduate $\mathrm{END}(\mathcal{F})$ și $\mathrm{END}(\mathcal{F}')$. Folosind structura deja cunoscută a izomorfismelor dintre $\mathrm{End}(\mathcal{F})$ și $\mathrm{End}(\mathcal{F}')$ și adăugând informația suplimentară despre graduări, obținem că $\mathrm{END}(\mathcal{F}) \simeq \mathrm{END}(\mathcal{F}')$ dacă și numai dacă toate componentele conexe din $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}'$ sunt izomorfe în perechi până la o permutare, câteva translații graduate și un automorfism pe $\mathcal{C}$. Folosind acest rezultat, demonstrăm că tipurile de izomorfism de algebre graduate de forma $\mathrm{END}(\mathcal{F})$ sunt clasificate de orbitele acțiunii unui anumit grup, care este un produs semidirect dublu al unui subgrup Young al lui S_n, un anumit subgrup de automorfisme pe $\mathcal{C}$ și G^q, unde q este numărul de componente conexe ale lui $\mathcal{C}$, pe mulțimea G^n.

În ultimul capitol considerăm algebrele structurale de matrice $M(\rho, k)$ în cazul în care ρ este o relație de ordine parțială. Descriem într-un mod explicit (și ilustrăm în câteva exemple) automorfismele lui $M(\rho, k)$, urmând abordarea din capitolul 2. Descrierea explicită este folosită pentru a arăta că tipurile de izomorfism de G-graduări bune pe $M(\rho, k)$ sunt în corespondență bijectivă cu orbitele unei anumite acțiuni ale grupului de automorfisme ale mulțimii parțial ordonate $(\{1, \ldots, n\}, \rho)$ pe mulțimea funcțiilor tranzitive definite pe ρ cu valori în G. O versiune alternativă este dată în termeni de elementele grafului asociat lui ρ. Mai mult, calculăm efectiv numărul de tipuri de izomorfisme de graduări bune pentru anumite relații de ordine parțială.

Flagurile graduate au permis descrierea tuturor graduărilor bune pe UT-algebre. Însă, pentru algebrele structurale de matrice situația este diferită, i.e. nu orice graduare bună provine dintr-un flag generalizat graduat. Aceasta rămâne o problemă pentru viitoare cercetări.

1 Preliminarii

Fie k un corp comutativ și $n \in \mathbb{N}^*$. Fie ρ o relație de preordine pe $\{1, \dots, n\}$.

Numim **algebră structurală de matrice asociată lui ρ și k** o subalgebră în $M_n(k)$ definită astfel:

$$M(\rho, k) = \{(a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(k) \mid a_{ij} = 0 \text{ dacă } (i, j) \notin \rho\}.$$

Definim o relație de echivalență pe $\{1, \dots, n\}$:

$$i \sim j \Leftrightarrow i\rho j \text{ și } j\rho i.$$

Fie $\mathcal{C}$ mulțimea claselor de echivalență. Pe $\mathcal{C}$ definim o relație de ordine parțială:

$$\hat{i} \le \hat{j} \Leftrightarrow i\rho j.$$

Structura mulțimii parțial ordonate $(\mathcal{C}, \le)$ poate fi ilustrată via un graf orientat Γ asociat în care:
- vârfurile sunt elementele lui $\mathcal{C}$
- dacă $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, atunci se construiește o săgeată a de la α la β (scriem că $s(a) = \alpha$ și că $t(a) = \beta$) dacă și numai dacă
$\alpha < \beta$
și
nu există $\gamma \in \mathcal{C}$ pentru care $\alpha < \gamma < \beta$.

Fie $\sigma \in S_n$. Definim o bijecție

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} &\to \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \\ (i, j) &\mapsto (\sigma(i), \sigma(j)). \end{aligned}$$

Dacă ρ este o relație de preordine, atunci și $\varphi_\sigma(\rho)$ este o relație de preordine; notăm $\rho_\sigma = \varphi_\sigma(\rho)$. Astfel,

$$\begin{aligned} M(\rho, k) &\simeq M(\rho_\sigma, k) \\ A = (a_{ij})_{i,j} &\mapsto A_\sigma = (a_{\sigma(i)\sigma(j)})_{i,j}. \end{aligned}$$

Propoziţie 1.1. *Fie $M(\rho, k)$ o algebră strucurală de matrice. Atunci există $\sigma \in S_n$ pentru care $M(\rho_\sigma, k)$ este o algebră de matrice pe blocuri cu proprietatea că toate blocurile de sub diagonala principală sunt nule.*

2 Automorfismele algebrelor structurale de matrice

• Algebre structurale de matrice ca algebre de endomorfisme

Un **ρ-flag** este un spațiu vectorial n-dimensional V împreună cu o familie $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}}$ de subspații pentru care există o bază B în V și o partiție $B = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{C}} B_\alpha$ cu proprietatea că $|B_\alpha| = |\alpha|$ și $\bigcup_{\beta\leq\alpha} B_\beta$ este o bază în V_α pentru orice $\alpha \in \mathcal{C}$.

Dacă $\mathcal{F} = (V, (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$ și $\mathcal{F}' = (V', (V'_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$ sunt ρ-flaguri, atunci un **morfism de ρ-flaguri** de la $\mathcal{F}$ la $\mathcal{F}'$ este o aplicație liniară $f : V \to V'$ pentru care $f(V_\alpha) \subset V'_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathcal{C}$.

Propoziţie 2.1. *Fie $\mathcal{F} = (V, (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$ un ρ-flag. Atunci algebra* $\mathrm{End}(\mathcal{F})$ *de endomorfisme ale lui $\mathcal{F}$ (împreună cu operația de compunere ca multiplicare) este izomorfă cu $M(\rho, k)$.*

Observăm că dacă există $B = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ o bază pe V și $B_\alpha = \{v_i | i \in \alpha\}$ pentru orice $\alpha \in \mathcal{C}$ ca în definiția ρ-flagului, atunci

$$E_{ij}(v_t) = \delta_{jt}v_i \text{ pentru orice } i\rho j,\ t$$
$$E_{ij}E_{pq} = \delta_{jp}E_{iq} \text{ pentru orice } i, j, p, q.$$

Astfel

$$\mathrm{End}(\mathcal{F}) \simeq M(\rho, k)$$
$$E_{ij} \leftrightarrow e_{ij}$$

pentru orice $i\rho j$.

• Laticea $\mathrm{End}(\mathcal{F})$-submodulelor lui V

Fie $\mathcal{F} = (V, (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$ un ρ-flag. Considerăm acțiunea lui $\mathrm{End}(\mathcal{F})$ pe V restricția $\mathrm{End}(V)$-acțiunii obișnuite pe V.

Dacă $\mathcal{D}$ este o submulțime în $\mathcal{C}$, notăm

$$V_{\mathcal{D}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} V_\alpha.$$

Prin convenție $V_\varnothing = 0$.

Propoziţie 2.2. $\mathrm{End}(\mathcal{F})$*-submodulele lui V sunt subspațiile de forma $V_{\mathcal{D}}$, unde $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$.*

Dacă $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, atunci $\mathcal{D}_{max}$ este mulțimea elementelor maximale din $\mathcal{D}$. $\mathrm{End}(\mathcal{F})$-submodulele lui V sunt $V_{\mathcal{D}}$ cu $\mathcal{D}$ antilanț în $\mathcal{C}$. Notăm cu $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ mulțimea antilanțurilor din $\mathcal{C}$.

Laticea End($\mathcal{F}$)-submodulelor lui V este izomorfă cu laticea $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ unde operațiile de infimum și supremum sunt date de

$$\mathcal{D} \wedge \mathcal{E} = \{\alpha \in \mathcal{C} \mid \text{există } \beta_1 \in \mathcal{D}, \beta_2 \in \mathcal{E} \text{ astfel încât } \alpha \leq \beta_1 \text{ și } \alpha \leq \beta_2\}_{max},$$

$$\mathcal{D} \vee \mathcal{E} = (\mathcal{D} \cup \mathcal{E})_{max}.$$

Relația de ordine parțială pe $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ este

$$\mathcal{D} \leq \mathcal{E} \iff V_{\mathcal{D}} \subset V_{\mathcal{E}} \iff \text{ pentru orice } \alpha \in \mathcal{D} \text{ există } \beta \in \mathcal{E} \text{ astfel încât } \alpha \leq \beta.$$

Propoziţie 2.3. *Dacă g este un automorfism al mulțimii parțial ordonate $(\mathcal{C}, \leq)$, atunci aplicația $f_g : \mathcal{A}(\mathcal{C}) \to \mathcal{A}(\mathcal{C})$, $f_g(\mathcal{D}) = g(\mathcal{D}) = \{g(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{D}\}$ este un automorfism al laticei $\mathcal{A}(\mathcal{C})$. În plus, pentru orice automorfism de latice f al lui $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ există un automorfism g al mulțimii parțial ordonate $(\mathcal{C}, \leq)$ astfel încât $f = f_g$.*

• Izomorfisme între algebrele de endomorfisme de flaguri

Fie $\mathcal{F} = (V, V_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{C}}$ un ρ-flag.

Fie $\mathrm{Aut}_0(\mathcal{C}, \leq) = \{g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C}, \leq) \mid |\alpha| = |g(\alpha)| \text{ pentru orice } \alpha \in \mathcal{C}\}$. Este subgrup în $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}, \leq)$.

Pentru orice $g \in \mathrm{Aut}_0(\mathcal{C})$ definim o bijecție $\tilde{g} : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$:
dacă $\alpha = \{i_1, \ldots, i_r\}$ cu $i_1 < \ldots < i_r$ și $g(\alpha) = \{j_1, \ldots, j_r\}$ cu $j_1 < \ldots < j_r$, atunci

$$\tilde{g}(i_1) = j_1, \ldots, \tilde{g}(i_r) = j_r.$$

Fie $\mathcal{T}(\rho, k^*) = \{(a_{ij})_{i\rho j} \subset k^* \mid a_{ij}a_{jr} = a_{ir} \text{ pentru orice } i, j, r \text{ cu } i\rho j, j\rho r\}$ (i.e. mulțimea funcțiilor tranzitive definite pe ρ cu valori în k^*).
$\mathcal{T}(\rho, k^*)$ este grup împreună cu multiplicarea pe poziții.

Fie $\mathcal{F}' = (V', V'_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{C}}$ un alt ρ-flag.

Definim

$$F : U(M(\rho, k)) \times \mathrm{Aut}_0(\mathcal{C}) \times \mathcal{T}(\rho, k^*) \to \mathrm{Iso}_{alg}(\mathrm{End}(\mathcal{F}), \mathrm{End}(\mathcal{F}'))$$

$$F(A, g, (a_{ij})_{i\rho j}) = \varphi$$

pentru orice $A = (\lambda_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in U(M(\rho, k))$, $g \in \mathrm{Aut}_0(\mathcal{C})$, $(a_{ij})_{i\rho j} \in \mathcal{T}(\rho, k^*)$, unde

$$\varphi(E_{ij}) = a_{ij} \sum_{\substack{s\rho\tilde{g}(i) \\ \tilde{g}(j)\rho t}} \lambda_{s\tilde{g}(i)} \overline{\lambda}_{\tilde{g}(j)t} E'_{st}$$

pentru orice $i\rho j$
($(E'_{ij})_{i\rho j}$ este baza pe $\mathrm{End}(\mathcal{F}')$ și $A^{-1} = (\overline{\lambda}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$).

Propoziţie 2.4. *F este surjectiv.*

Schiță de demonstrație:
Fie $\varphi : \mathrm{End}(\mathcal{F}) \to \mathrm{End}(\mathcal{F}')$ un izomorfism de algebre. Avem că:

- mulțimea $\mathrm{End}(\mathcal{F})$-submodulelor lui V este în corespondență bijectivă cu $\mathcal{A}(\mathcal{C})$;

- izomorfismul de algebre φ induce un izomorfism liniar $\gamma : V \to V'$ care este un φ'-izomorfism pentru o anumită deformare a lui φ;

- noul izomorfism de algebre φ' este obținut din φ folosind o funcție tranzitivă definită pe ρ cu valori în k^*;

- cum φ' este un izomorfism de algebre, γ induce un izomorfism între laticea $\mathrm{End}(\mathcal{F})$-submodulelor lui V și laticea $\mathrm{End}(\mathcal{F}')$-submodulelor lui V', iar acest izomorfism de latice se reduce la un automorfism al laticei $\mathcal{A}(\mathcal{C})$;

- un astfel de automorfism este complet determinat de un automorfism g al mulțimii parțial ordonate $\mathcal{C}$;

- φ poate fi recuperat din g, constantele de deformare care produc pe φ' din φ și o matrice a lui γ asociată unei perechi de baze.

Pentru orice $A = (\lambda_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in U(M(\rho, k))$, $g \in \mathrm{Aut}_0(\mathcal{C})$ definim

$$A^g = (\lambda_{i\tilde{g}(j)})_{1\leq i,j\leq n} \text{ și } {}^gA = (\lambda_{\tilde{g}(i)j})_{1\leq i,j\leq n}.$$

Observăm că ${}^g(A^h) = ({}^gA)^h$ pentru orice A, g, h.

Considerăm relația $\approx$ pe $U(M(\rho, k)) \times \mathrm{Aut}_0(\mathcal{C}) \times \mathcal{T}(\rho, k^*)$:

$$(A, g, (a_{ij})_{i\rho j}) \approx (B, h, (b_{ij})_{i\rho j}) \text{ dacă și numai dacă}$$

$$\begin{cases} g = h \\ \text{există } d_1,\ ...,\ d_n \in k^* \text{ astfel încât } a_{ij}b_{ij}^{-1} = d_i d_j^{-1} \text{ pentru orice } i\rho j \\ B^g = A^g \,\mathrm{diag}(d_1, \ldots,\ d_n). \end{cases}$$

$\approx$ este o relație de echivalență.

Avem că $F(A, g, (a_{ij})_{i\rho j}) = F(B, h, (b_{ij})_{i\rho j})$ dacă și numai dacă $(A, g, (a_{ij})_{i\rho j}) \approx (B, h, (b_{ij})_{i\rho j})$.

Teoremă 2.5. *F induce o bijecție*

$$\overline{F} : \frac{U(M(\rho, k)) \times \mathrm{Aut}_0(\mathcal{C}) \times \mathcal{T}(\rho, k^*)}{\approx} \longrightarrow \mathrm{Iso}_{alg}(\mathrm{End}(\mathcal{F}), \mathrm{End}(\mathcal{F}')).$$

Grupul $\mathrm{Aut}_0(\mathcal{C})$ acționează la dreapta pe $\mathcal{T}(\rho, k^*)$ prin

$$(a_{ij})_{i\rho j} \cdot g = (a_{\tilde{g}(i)\tilde{g}(j)})_{i\rho j}.$$

Astfel putem construi un produs semidirect drept $\mathrm{Aut}_0(\mathcal{C}) \ltimes \mathcal{T}(\rho, k^*)$, unde multiplicarea este dată de

$$(g \ltimes (a_{ij})_{i\rho j})(h \ltimes (b_{ij})_{i\rho j}) = gh \ltimes ((a_{\tilde{h}(i)\tilde{h}(j)} b_{ij})_{i\rho j}.$$

Grupul $\mathcal{T}(\rho, k^*)$ acționează la stânga pe grupul $U(M(\rho, k))$:

$$\text{dacă } (a_{ij})_{i\rho j} \in \mathcal{T}(\rho, k^*) \text{ și } A = (\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in U(M(\rho, k)),$$
$$\text{atunci } (a_{ij})_{i\rho j} \cdot A \text{ este matricea } (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \text{ unde}$$

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij}\alpha_{ij}, & \text{dacă} \quad (i,j) \in \rho \\ 0, & \text{dacă} \quad (i,j) \notin \rho \end{cases}.$$

Grupul $\mathrm{Aut}_0(\mathcal{C})$ acționează la stânga pe $U(M(\rho, k))$ prin

$$g \cdot A = {}^{g^{-1}}A^{g^{-1}}.$$

Obținem că $\mathrm{Aut}_0(\mathcal{C}) \ltimes \mathcal{T}(\rho, k^*)$ acționează la stânga pe $U(M(\rho, k))$ prin

$$(g \ltimes (a_{ij})_{i\rho j}) \cdot A = {}^{g^{-1}}((a_{ij})_{i\rho j} \cdot A)^{g^{-1}},$$

și putem forma produsul semidirect stâng

$$U(M(\rho, k)) \rtimes (\mathrm{Aut}_0(\mathcal{C}) \ltimes \mathcal{T}(\rho, k^*)).$$

Multiplicarea pe acest grup este dată de

$$(A \rtimes (g \ltimes (a_{ij})_{i\rho j})) \cdot (B \rtimes (h \ltimes (b_{ij})_{i\rho j})) =$$

$$= (A\ {}^{g^{-1}}((a_{ij})_{i\rho j} \cdot B)^{g^{-1}}) \rtimes (gh \ltimes (a_{\tilde{h}(i)\tilde{h}(j)}b_{ij})_{i\rho j}).$$

Teoremă 2.6. *Avem izomorfismul de grupuri*

$$\frac{U(M(\rho, k)) \rtimes (\mathrm{Aut}_0(\mathcal{C}) \ltimes \mathcal{T}(\rho, k^*))}{D} \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(\mathcal{F})),$$

unde $D = \{diag(d_1, \ldots, d_n) \rtimes (Id \ltimes (d_i^{-1}d_j)_{i\rho j}) \mid d_1, \ldots, d_n \in k^*\}$.

Grupul de automorfisme al unei algebre structurale de matrice a mai fost calculat în [15]. Am arătat că din descrierea noastră rezultă descrierea realizată de Coelho.

3 Gradu ări bune pe algebre structurale de matrice

Dacă G este un grup (multiplicativ) și A este o k-algebră, o G-**graduare** pe A este o descompunere

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g$$

(o sumă directă de spații liniare) astfel încât $A_gA_h \subseteq A_{gh}$ pentru orice $g, h \in G$.

Fie $A \subseteq M_n(k)$ o subalgebră. O G-graduare **bună** pe A este o G-graduare unde toate matricele

$$e_{ij} = (\delta_{(i,j),(p,q)})_{p,q} \in A$$

sunt elemente omogene.

Un ρ-flag **G-graduat** este un ρ-flag $(V, (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$ pentru care V este un spațiu vectorial G-graduat și baza B (din definiția ρ-flagului) este formată din elemente omogene.

Dacă $\mathcal{F} = (V, (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$ și $\mathcal{F}' = (V', (V'_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$ sunt ρ-flaguri G-graduate, atunci un **morfism de flaguri graduate** de la $\mathcal{F}$ la $\mathcal{F}'$ este un morfism $f : V \to V'$ de ρ-flaguri care este și morfism de spații vectoriale graduate.

Dacă $\mathcal{F} = (V, (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$ este un ρ-flag G-graduat și $\sigma \in G$, definim

$$\mathrm{End}(\mathcal{F})_\sigma = \{f \in \mathrm{End}(\mathcal{F}) \mid f(V_g) \subseteq V_{\sigma g} \text{ pentru orice } g \in G\}.$$

Propoziţie 3.1.

$$\mathrm{End}(\mathcal{F}) = \bigoplus_{\sigma\in G} \mathrm{End}(\mathcal{F})_\sigma$$

și această descompunere descrie o G-graduare pe algebra $\mathrm{End}(\mathcal{F})$*.*

Considerăm

$$\mathrm{END}(\mathcal{F}) = \mathrm{End}(\mathcal{F}) \ + \text{ graduarea din propoziție.}$$

Izomorfismul

$$\mathrm{End}(\mathcal{F}) \simeq M(\rho, k)$$

$$E_{ij} \leftrightarrow e_{ij}$$

este un izomorfism de algebre graduate. Astfel

$$\mathrm{END}(\mathcal{F}) \simeq M(\rho, k)$$

și via acest izomorfism, $M(\rho, k)$ devine algebră G-graduată.

Mai mult,

orice graduare pe $M(\rho, k)$ ce provine dintr-un ρ-flag graduat este o graduare bună.

Dacă $M(\rho, k)$ este o algebră superior triunghiulară pe blocuri, s-a arătat în [3] că orice graduare bună pe $M(\rho, k)$ este de tip $\mathrm{END}(\mathcal{F})$.

Acest lucru nu se întâmplă pentru orice algebră structurală de matrice, i.e. nu orice graduare bună pe o algebră structurală de matrice este de tip $\mathrm{END}(\mathcal{F})$.

Notăm

Γ_0 = mulțimea vârfurilor lui Γ,

Γ_1 = mulțimea săgeților lui Γ,

Γ^u = graful neorientat obținut din Γ prin omiterea direcțiilor săgeților,

$\tilde{\Gamma}$ = graful orientat obținut din Γ prin dublarea săgeților

$$\text{dacă } \alpha \xrightarrow[a]{} \beta \text{ în } \Gamma, \text{ atunci } \alpha \underset{a}{\overset{\tilde{a}}{\rightleftarrows}} \beta \text{ în } \tilde{\Gamma}$$

$\mathcal{T}(\Gamma, G)$ = mulțimea funcțiilor $v : \Gamma_1 \to G$ cu proprietatea că $v(a_1)\dots v(a_r) = v(b_1)\dots v(b_p)$ pentru orice drumuri $a_1 \dots a_r$ și $b_1 \dots b_p$ în Γ cu $s(a_1) = s(b_1)$ și $t(a_r) = t(b_p)$.

Dacă $v \in \mathcal{T}(\Gamma, G)$, considerăm $\tilde{v} : \Gamma_1 \cup \{\tilde{a} \mid a \in \Gamma_1\} \to G$

$$\tilde{v}|_{\Gamma_1} = v \text{ și } \tilde{v}(\tilde{a}) = v(a)^{-1} \text{ pentru orice } a \in \Gamma_1.$$

Definim

$F(\Gamma)$ = grupul liber generat de Γ_1,

$A(\Gamma)$ = subgrupul din $F(\Gamma)$ generat de elementele de forma $a_1 \dots a_r b_p^{-1} \dots b_1^{-1}$, unde $a_1 \dots a_r$ și $b_1 \dots b_p$ sunt două drumuri în Γ pentru care $s(a_1) = s(b_1)$ și $t(a_r) = t(b_p)$,

$B(\Gamma)$ = subgrupul din $F(\Gamma)$ generat de elementele de forma $a_1 a_2^{\varepsilon_2} \dots a_m^{\varepsilon_m}$, unde $a_1, a_2, \dots, a_m$ sunt săgeți care formează în această ordine un ciclu în Γ^u și $\varepsilon_i = 1$ dacă a_i are aceeași direcție cu a_1 și $\varepsilon_i = -1$ în caz contrar.

Reamintim că: dacă X este un grup și $Y \subseteq X$ este un subgrup,

$$Y^N = < xyx^{-1} \mid x \in X \text{ și } y \in Y > .$$

Y^N este închiderea normală a lui Y, i.e. cel mai mic subgrup normal al lui X care îl conține pe Y.

Propoziţie 3.2. *Fie G un grup. Următoarele afirmații sunt echivalente:*
(1) *Orice G-graduare bună pe $M(\rho, k)$ este de tip $END(\mathcal{F})$.*
(2) *Pentru orice $v \in \mathcal{T}(\Gamma, G)$ există o funcție $f : \Gamma_0 \to G$ astfel încât $v(a) = f(s(a))f(t(a))^{-1}$ pentru orice $a \in \Gamma_1$.*
(3) *Pentru orice $v \in \mathcal{T}(\Gamma, G)$ și pentru orice ciclu $z_1 ... z_m$ în $\tilde{\Gamma}$, cu $z_1, ..., z_m \in \Gamma_1 \cup \{\tilde{a} \mid a \in \Gamma_1\}$ (acesta corespunde unui ciclu în graful neorientat Γ^u), avem că $\tilde{v}(z_1)\dots\tilde{v}(z_m) = 1$.*
(4) *$A(\Gamma)^N = B(\Gamma)^N$.*
(5) *Orice generator b al lui $B(\Gamma)$ poate fi scris în forma $b = g_1 x_1 g_1^{-1} \dots g_m x_m g_m^{-1}$ unde $m \in \mathbb{N}^*$, $g_1, \dots, g_m \in F(\Gamma)$ și $x_1, \dots, x_m$ sunt generatori din construcția lui $A(\Gamma)$.*

• Izomorfisme între algebre graduate de endomorfisme de flaguri

Dacă V și W sunt spații vectoriale G-graduate și $\sigma \in G$, spunem că o aplicație liniară $f : V \to W$ este un **morfism de grad σ la dreapta** dacă $f(V_g) \subseteq W_{g\sigma}$ pentru orice $g \in G$. Acest lucru înseamnă că f este un morfism de spații vectoriale graduate atunci când este privit ca $f : V \to W(\sigma)$; dacă $W = \bigoplus_{g \in G} W_g$, atunci $W(\sigma) = \bigoplus_{g \in G} W_{g\sigma}$ pentru orice $\sigma \in G$.

Dacă $\mathcal{F} = (V, (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$ este un ρ-flag G-graduat și $\sigma \in G$, atunci **suspensia la dreapta a lui** $\mathcal{F}$ este $\mathcal{F}(\sigma) = (V(\sigma), (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$.

Fie $\mathcal{F} = (V, (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$ un ρ-flag G-graduat, cu o bază omogenă $B = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{C}} B_\alpha$ pe V care conferă structura de flag.

Fie $\mathcal{C} = \mathcal{C}^1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}^q$ o descompunere a lui $\mathcal{C}$ în componente conexe disjuncte; acestea corespund componentelor conexe ale grafului neorientat Γ^u. Pentru fiecare $1 \leq t \leq q$, fie ρ_t relația de preordine pe mulțimea $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{C}^t} \alpha$, prin restricția lui ρ.

Dacă $V^t = \sum_{\alpha\in\mathcal{C}^t} V_\alpha$, atunci $\mathcal{F}^t = (V^t, (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}^t})$ este un ρ_t-flag G-graduat de bază $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{C}^t} B_\alpha$.

Evident, $V = \bigoplus_{1\leq t\leq q} V^t$. Într-o manieră formală putem scrie

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}^q$$

unde $\mathcal{F}$ este un ρ-flag G-graduat și $\mathcal{F}^t$ este un ρ_t-flag G-graduat pentru fiecare $1 \leq t \leq q$.

Fie ρ și μ două relații de preordine izomorfe (i.e. mulțimile preordonate pe care ρ și μ sunt definite sunt izomorfe). Fie $\mathcal{C}$ și $\mathcal{D}$ mulțimile parțial ordonate asociate relațiilor ρ și μ și fie $g : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un izomorfism de mulțimi parțial ordonate.

Spunem că un ρ-flag $\mathcal{F} = (V, (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}}))$ este g**-izomorf** cu un μ-flag $\mathcal{G} = (W, (W_\beta)_{\beta\in\mathcal{D}}))$ dacă există un izomorfism liniar $u : V \to W$ pentru care $u(V_\alpha) = W_{g(\alpha)}$ oricare ar fi $\alpha \in \mathcal{C}$.

Dacă $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ sunt flaguri G-graduate, spunem că sunt g**-izomorfe ca flaguri graduate** dacă există un astfel de u care să fie morfism de spații vectoriale graduate.

În plus, considerăm un alt ρ-flag G-graduat $\mathcal{F}' = (V', (V'_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$. Avem $V' = \bigoplus_{1\leq t\leq q} V'^t$ și $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'^1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}'^q$, unde $\mathcal{F}'^t$ este un ρ_t-flag G-graduat pentru fiecare $1 \leq t \leq q$.

Teoremă 3.3. *Fie $\mathcal{F} = (V, (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$ și $\mathcal{F}' = (V', (V'_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}})$ ρ-flaguri G-graduate. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(1) $\mathrm{END}(\mathcal{F})$ *și* $\mathrm{END}(\mathcal{F}')$ *sunt izomorfe ca algebre G-graduate.*

(2) *Există $g \in \mathrm{Aut}_0(\mathcal{C})$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_q \in G$ și un g-izomorfism $\gamma : V \to V'$ între ρ-flagurile (negraduate) $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}'$, astfel încât $\gamma_{|V^t}^{|V'^{\overline{g}(t)}} : V^t \to V'^{\overline{g}(t)}$ este un izomorfism liniar de grad σ_t la dreapta pentru orice $1 \leq t \leq q$, unde $\overline{g} \in S_q$ este permutarea indusă de g, i.e. $g(\mathcal{C}^t) = \mathcal{C}^{\overline{g}(t)}$.*

(3) *Există o permutare $\tau \in S_q$, un izomorfism $g_t : \mathcal{C}^t \to \mathcal{C}^{\tau(t)}$ pentru orice $1 \leq t \leq q$ și $\sigma_1, \ldots, \sigma_q \in G$, astfel încât $\mathcal{F}^t$ este g_t-izomorf cu $\mathcal{F}'^{\tau(t)}(\sigma_t)$ pentru orice $1 \leq t \leq q$.*

• **Clasificarea graduărilor bune care provin din flaguri graduate**

Considerăm trei acțiuni de grup pe mulțimea G^n:

$\mathrm{Aut}_0(\mathcal{C})$ acționează la dreapta pe G^n prin

$$(h_i)_{1\le i\le n} \leftarrow g = (h_{\tilde{g}(i)})_{1\le i\le n}$$

pentru orice $(h_i)_{1\le i\le n} \in G^n$ și $g \in \mathrm{Aut}_0(\mathcal{C})$.

G^q acționează la dreapta pe G^n prin

$$(h_i)_{1\le i\le n} \leftarrow (\sigma_t)_{1\le t\le q} = (h'_i)_{1\le i\le n}$$

unde pentru fiecare i definim $h'_i = h_i\sigma_{p(i)}$, unde $p : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,q\}$, $p(i) = j$ astfel încât $\hat{i} \in \mathcal{C}^j$.

Pentru fiecare $\alpha \in \mathcal{C}$ fie $S(\alpha)$ grupul simetriilor lui α (privit ca submulțime în $\{1,\ldots,n\}$).
Considerăm grupul $\prod_{\alpha\in\mathcal{C}} S(\alpha)$, care este subgrup Young în S_n (izomorf cu $\prod_{\alpha\in\mathcal{C}} S_{|\alpha|}$).
Atunci $\prod_{\alpha\in\mathcal{C}} S(\alpha)$ acționează la dreapta pe G^n prin

$$(h_i)_{1\le i\le n} \leftarrow (\psi_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}} = (h'_i)_{1\le i\le n}$$

cu h'_i definit prin $h'_i = h_{\psi_\alpha(i)}$, unde $\alpha = \hat{i}$, pentru orice i.

Teoremă 3.4. *Tipurile de izomorfism de G-graduări de tip* $\mathrm{END}(\mathcal{F})$*, unde $\mathcal{F}$ este un ρ-flag G-graduat, sunt clasificate de orbitele acțiunii la dreapta a grupului $\prod_{\alpha\in\mathcal{C}} S(\alpha) \rtimes (\mathrm{Aut}_0(\mathcal{C}) \ltimes G^q)$ pe mulțimea G^n.*

4 Clasificarea graduărilor bune pe $M(\rho, k)$ în cazul în care ρ este o relație de ordine parțială

Fie ρ o relație de **ordine parțială**. În acest caz, $\hat{i} = \{i\}$, pentru orice i, motiv pentru care identificăm $\hat{i}$ cu i. În plus, $\mathrm{Aut}_0(\mathcal{C}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$.

• **Automorfismele algebrei structurale de matrice**

Definim $\overline{\rho}$ o relație tranzitivă pe $\{1,\ldots,n\}$: $i\overline{\rho}j$ dacă $i\rho j$ și $i \ne j$. Dacă $i\overline{\rho}j$, lungimea $\ell([i,j])$ intervalului $[i,j]$ este definită prin

$$\ell([i,j]) = \max\{p \mid \text{există } i = r_1\overline{\rho}r_2\overline{\rho}\ldots\overline{\rho}r_p = j\} - 1.$$

Propoziţie 4.1. *Fie $L = (\lambda_{ij})_{i\rho j} \in M(\rho, k)$ și presupunem că L este inversabilă. Atunci $\lambda_{ii} \neq 0$ pentru orice i, $L^{-1} \in M(\rho, k)$ și $L^{-1} = (\overline{\lambda}_{ij})_{i\rho j}$, unde $\overline{\lambda}_{ii} = \lambda_{ii}^{-1}$ pentru orice i și*

$$\overline{\lambda}_{ij} = \sum_{p=2}^{\ell([i,j])+1} \sum_{i=r_1\overline{\rho}r_2\overline{\rho}\ldots\overline{\rho}r_p=j} (-1)^{p-1}\lambda_{r_1r_1}^{-1}\ldots\lambda_{r_pr_p}^{-1}\lambda_{r_1r_2}\ldots\lambda_{r_{p-1}r_p}$$

pentru orice i, j cu $i\overline{\rho}j$.

Orice automorfism de algebre Φ al lui $M(\rho, k)$ este de forma

$$\Phi(E_{ij}) = a_{ij} \sum_{s\rho\varphi(i),\varphi(j)\rho t} \lambda_{s\varphi(i)}\overline{\lambda}_{\varphi(j)t}E_{st} \tag{1}$$

pentru orice $i\rho j$, unde $L = (\lambda_{ij})_{i\rho j} \in U(M(\rho, k))$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ și $(a_{ij})_{i\rho j} \in \mathcal{T}(\rho, k^*)$; aici $(\overline{\lambda}_{ij})_{i\rho j} = L^{-1}$, inversa lui L. Folosind propoziția 4.1, relația (1) poate fi scrisă mai detaliat în termeni de L.

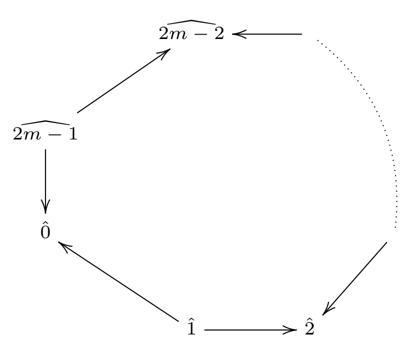
• Numărul de tipuri de izomorfism de gradări bune pentru un exemplu particular

Fie $\mathcal{T}(\rho, G)$ = mulțimea funcțiilor tranzitive definite pe ρ cu valori în G.
Dacă G este un grup, atunci $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ acționează la dreapta pe $\mathcal{T}(\rho, G)$ prin

$$(u_{ij})_{i\rho j} \cdot \varphi = (u_{\varphi(i)\varphi(j)})_{i\rho j}.$$

Propoziţie 4.2.
Fie G un grup. Atunci tipurile de izomorfisme de G-gradări bune pe $M(\rho, k)$ sunt în bijecție cu orbitele acțiunii la dreapta a grupului $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ *pe* $\mathcal{T}(\Gamma, G)$.

Exemplu
Fie $m \geq 2$ un număr natural. Din motive computaționale elementele mulțimii parțial ordonate sunt clasele de întregi modulo 2m. Considerăm ρ relația de ordine parțială pe mulțimea $\mathbb{Z}_{2m}$, astfel încât graful asociat Γ este



Avem că pentru orice număr par i ambele săgeți adiacente se termină în $\hat{i}$, iar pentru orice număr impar i ambele săgeți adiacente pornesc din $\hat{i}$.

Fie $r, s : \mathbb{Z}_{2m} \to \mathbb{Z}_{2m}$ definite prin

$$r(\hat{i}) = \widehat{i+2} \text{ și } s(\hat{i}) = -\hat{i}$$

pentru orice $\hat{i} \in \mathbb{Z}_{2m}$.

Avem că $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ este subgrupul grupului simetriilor $S(\mathbb{Z}_{2m})$ al lui $\mathbb{Z}_{2m}$ generat de r și s.

Cum $s^2 = 1, r^m = 1$ și $sr = r^{m-1}s$, avem că:

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{C}) = < r, s > = \begin{cases} D_m, \text{ grupul diedral de ordin } 2m, & \text{dacă } m \geq 3 \\ \text{grupul Klein }, & \text{dacă } m = 2 \end{cases}.$$

Pentru că nu există în Γ două drumuri distincte care să pornească din același vârf și să se termine în același vârf,

$$\mathcal{T}(\Gamma, G) = \{v : \Gamma_1 \to G\}.$$

Astfel G-graduările bune pe $M(\rho, k)$ sunt în bijecție cu G^{2m}. Cu alte cuvinte, identificăm

$$v \in \mathcal{T}(\Gamma, G) \longleftrightarrow (g_{\hat{0}}, \ldots, g_{\widehat{2m-1}}) \in G^{2m}$$

unde $g_{\hat{0}}, \ldots, g_{\widehat{2m-1}}$ sunt valorile lui v pe săgețile lui Γ, pornind cu cel care unește vârfurile $\hat{1}$ și $\hat{0}$ și continuând în sens trigonometric.

Acțiunea la dreapta a grupului $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ pe $\mathcal{T}(\Gamma, G) \simeq G^{2m}$ este indusă via bijecție astfel:

$$\begin{aligned} (g_{\hat{0}}, g_{\hat{1}}, \ldots, g_{\widehat{2m-1}}) \cdot s &= (g_{\widehat{2m-1}}, g_{\widehat{2m-2}} \ldots, g_{\hat{0}}) \\ (g_{\hat{0}}, g_{\hat{1}}, \ldots, g_{\widehat{2m-1}}) \cdot r &= (g_{\hat{2}}, g_{\hat{3}}, \ldots, g_{\widehat{2m-2}}, g_{\widehat{2m-1}}, g_{\hat{0}}, g_{\hat{1}}). \end{aligned}$$

Presupunem că G este finit.

Lemă 4.3. *(Burnside)*
Fie G un grup finit care acționează pe o mulțime X. Numărul de orbite ale acțiunii este

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Folosind propoziția 4.2 și lema lui Burnside, numărul de tipuri de izomorfisme de G-graduări bune pe $M(\rho, k)$ (notat $N(\rho, G)$) este

$$\begin{aligned} N(\rho, G) &= \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\mathcal{C})|} \sum_{\theta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})} |\mathrm{Fix}(\theta)| \\ &= \frac{1}{2m}(|G|^{2m} + m|G|^m + \sum_{1 \leq i \leq m-1} |G|^{2(i,m)}). \end{aligned}$$

O altă formulare este

$$N(\rho, G) = \frac{1}{2m}(m|G|^m + \sum_{d|m} \varphi(\frac{m}{d})|G|^{2d}).$$

Bibliografie

[1] Yu. A. Bahturin, S. K. Sehgal, M. V. Zaicev, Group gradings on associative algebras, J. Algebra **241** (2001), 677–698.

[2] Yu. A. Bahturin, M. V. Zaicev, Group gradings on matrix algebras, Canad. Math. Bull. **45** (2002), 499–508.

[3] M. Bărăscu, S. Dăscălescu, Good gradings on upper block triangular matrix algebras, Comm. Algebra **41** (2013), 4290-4298.

[4] L. Bemm, E. Z. Fornaroli, E. A. Santulo Jr., A cohomological point of view on gradings on algebras with multiplicative basis, Journal of Pure and Applied Algebra (2018), DOI: 10.1016/j.jpaa.2018.04.019.

[5] F. Beşleagă, S. Dăscălescu, Structural matrix algebras, generalized flags and gradings, arxiv: RA/1802.03427.

[6] F. Beşleagă, S. Dăscălescu, L. Van Wyk, Classifying good gradings on structural matrix algebras, Linear and Multilinear Algebra (2018), DOI: 10.1080/03081087.2018.1476447.

[7] C. Boboc, Superalgebra structures on $M_2(k)$ in characteristic 2, Comm. Algebra **30** (2002), 255-260.

[8] C. Boboc, Gradings of $M_2(k)$ by the Klein group, Comm. Algebra **31** (2003), 2311-2326.

[9] C. Boboc, S. Dăscălescu, Gradings of matrix algebras by cyclic groups, Comm. Algebra **29** (2001), 5013-5021.

[10] C. Boboc, S. Dăscălescu, Group gradings on $M_3(k)$, Comm. Algebra **35** (2007), 2654-2670.

[11] A. Borovik, Mathematics under the microscope, American Mathematical Society Publication, Providence, 2010.

[12] N. Bourbaki, Elements of the history of mathematics, (1994) Springer Verlag.

[13] S. Caenepeel, S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, On Gradings of Matrix Algebras and Descent Theory, Comm. Algebra **30** (2002), 5901–5920.

[14] W. Chin, D. Quinn, Rings graded by polycyclic-by-finite groups, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 235-241.

[15] S. P. Coelho, The automorphism group of a structural matrix algebra, Linear Alg. Appl. **195** (1993), 35-58.

[16] M. Cohen, S. Montgomery, Group-graded rings, smash products and group actions, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), 237-258.

[17] E. C. Dade, Group-graded rings and modules, Math. Z. **174** (1980), 241-262.

[18] E. C. Dade, Clifford theory for group-graded rings, J. Reine Angew. Math. **369** (1986), 40-86.

[19] E. C. Dade, Clifford theory for group-graded rings II, J. Reine Angew. Math. **387** (1988), 148-181.

[20] S. Dăscălescu, Group gradings on diagonal algebras, Arch. Math. **91** (2008), 212-217.

[21] S. Dăscălescu, B. Ion, C. Năstăsescu and J. Rios Montes, Group gradings on full matrix rings, J. Algebra **220** (1999), 709-728.

[22] S. Dăscălescu, L. van Wyk, Do isomorphic structural matrix rings have isomorphic graphs?, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 1385-1391.

[23] O. M. Di Vincenzo, P. Koshlukov, A. Valenti, Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities, J. Algebra **275** (2004), 550-566.

[24] A. Elduque, Gradings on octonions, J. Algebra **207** (1998), 342-354.

[25] S. Foldes, J. Szigeti, L. van Wyk, Invertibility and Dedekind finiteness in structural matrix rings, Linear Multilinear Algebra **59** (2011), 221-227.

[26] E. L. Green, Graphs with relations, coverings and group-graded algebras, Thins. Amer. Math. Soc. **279** (1983), 297-310.

[27] E. L. Green, E. M. Marcos, Graded quotients of path algebras: A local theory, Journal of Pure and Applied Algebra **93** (1994), 195-226.

[28] R. Hazrat, Graded Rings and Graded Grothendieck Groups, University of Western Sydney Australia, 2015.

[29] I. L. Kantor, Some generalizations of Jordan algebras, Trudy Sem. Vect. Tenzorn. Anal. **16** (1972), 407-499.

[30] A. V. Kelarev, Applications of epigroups to graded ring theory, Semigroup Forum **50** (1995), 327-350.

[31] A. V. Kelarev, Directed graphs and Lie superalgebras of matrices. J. Algebra **285** (2005) 1-10.

[32] A. Kemer, Solution of the problem as to whether associative algebras have a finite basis of identities, Dokl. Akad. Nauk SSSR **298** (1988), 273-277; translation in Soviet Math. Dokl. **37** (1988), 60-64.

[33] R. Khazal, C. Boboc, S. Dăscălescu, Group gradings of $M_2(k)$, Bull. Austral. Math. Soc. **68** (2003), 285-293.

[34] M. A. Knus, Algebras graded by a group. Category Theory, Homology Theory Appl., Proc. Conf. Seattle, Res. Center Baltelle Mem. Inst. **2** (1969), 117-133.

[35] W. Krull, Dimensionstheorie in Stellenringe, J. de Grelle, **v. CLXXIX** (1938), pp. 204-226.

[36] V. Lakshmibai, J. Brown, Flag varieties. An interplay of geometry, combinatorics and representation theory, Hindustan Book Agency, 2009.

[37] C. Năstăsescu, Anneaux et modules gradues, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **21** (1976), 21-41.

[38] C. Năstăsescu, F. van Oystaeyen, Graded and filtered rings and modules, Lecture Notes in Mathematics **758** (1979), Springer verlag, Berlin.

[39] C. Năstăsescu, F. van Oystaeyen, Graded ring theory, North Holland, Mathematical Library **28** (1982).

[40] C. Năstăsescu, F. van Oystaeyen, Methods of graded rings, Lecture Notes in Math., vol. 1836 (2004), Springer Verlag.

[41] A. Nowicki, Derivations of special subrings of matrix rings and regular graphs, Tsukuba J. Math. **7** (1983), 281-297.

[42] M. M. Parmenter, E. Spiegel, Central group gradings of incidence algebras, Algebra Colloquium **11** (2004), 421-426.

[43] Pratibha, R. K. Mishra, R. Mohan, A report on graded rings and graded modules, Global Journal of Pure and Applied Mathematics **9** (2017), 6827-6853.

[44] A. Ramos, D. Diniz, Graded identities and isomorphisms on algebras of upper block-triangular matrices, arXiv:1803.06949v1.

[45] A. Ramos, C. Fidelis, D. Diniz, Graded isomorphisms on upper block triangular matrix algebras, Linear Algebra and its Applications **543** (2018), 92-105.

[46] S. K. Sehgal, M. V. Zaicev, Finite gradings on simple artinian rings, Vestn. Mosk. Univ., Matem., Mechan. **3** (2001), 21-24.

[47] O. N. Smirnov, Simple associative algebras with finite $\mathbb{Z}$-grading, J. Algebra **196** (1997), 171-184.

[48] O. N. Smirnov, Finite $\mathbb{Z}$-grading on Lie algebras and symplectic involution, J. Algebra **218** (1999), 246-275.

[49] W. Specht, Gesetze in Ringen, I. Math. Z. **52** (1950), 557-589.

[50] E. Spiegel, C. J. O'Donnell, Incidence algebras, Pure and Appl. Math. **206** (1997), Marcel Dekker, New York.

[51] J. Szigeti, L. van Wyk, Subrings which are closed with respect to taking the inverse, J. Algebra **318** (2007), 1068-1076.

[52] A. Valenti, M. V. Zaicev, Group gradings on upper triangular matrices. Arch. Math. **89** (2007), 33-40.

[53] A. Valenti, M. Zaicev, Abelian gradings on upper block triangular matrices, Canad. Math. Bull. **55** (2012), 208-213.

[54] L. Van Wyk, Maximal left ideals in structural matrix rings, Comm. Algebra **16** (1988), 399-419.

[55] L. Van Wyk, Special radicals in structural matrix rings, Comm. Algebra **16** (1988), 421-435.