

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

**Contribuții în modelarea matematică a procesului de
laminare a benzilor metalice la rece**

– REZUMAT –

Conducător științific: Prof. Dr. Sanda CLEJA-ȚIGOIU

Doctorand: Cosmin Dănuț BARBU

București
2018

Cuprins

Notații	v
Introducere	1
1 Problema laminării simetrice a benzilor	4
1.1 Scurtă descriere a procesului	4
1.1.1 Geometria procesului de laminare	4
1.1.2 Ipotezele de lucru	5
1.2 Formularea matematică a problemei	5
1.3 Problema laminării benzilor în coordonate polare	6
1.4 Concluzii	7
2 Metoda de rezolvare și soluția problemei	8
2.1 Adimensionalizarea sistemului de ecuații	8
2.2 Metoda dezvoltării în serie după un parametru „mic“	8
2.2.1 Aproximația de ordinul zero	9
2.2.2 Aproximația de ordinul întâi	12
2.3 Problema laminării reformulată prin metoda variabilelor complexe conjugate (z, \bar{z})	16
2.4 Exemple numerice	17
2.5 Concluzii	19
3 Aspecte privind geometria domeniului de deformare	20
3.1 Ecuațiile curbelor asociate suprafețelor de discontinuitate \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2	20
3.2 Exemple numerice	20
3.3 Cazuri „limită“ în problema laminării benzilor	21
3.4 Concluzii	22
4 Influența inerției în problema laminării benzilor	23
4.1 Ecuațiile de mișcare și condițiile la limită	23
4.2 Aproximația inerțială în raport cu parametrul Re	24
4.3 Sistemul ecuațiilor de mișcare în coordonate complexe	27

Cuprins	iv
4.4 Exemple numerice	27
4.5 Concluzii	27
5 Concluzii și perspective	28
Bibliografie	30

Notății

Bg	numărul lui Bingham
Re	numărul lui Reynolds
Eu	numărul lui Euler
\mathcal{P}_3	domeniul de deformare vâscoplastică a benzii laminate
$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$	domenii rigide ale benzii laminate
$\partial \mathcal{P}_3 = P_1 P_2 \cup P_1' P_2' \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$	frontiera domeniului \mathcal{P}_3
$P_1 P_2, P_1' P_2'$	suprafețele de contact dintre role și material (arce de curbă în reprezentarea plană)
$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$	suprafețele (curbe în reprezentarea plană) de discontinuitate mărginind lateral domeniul \mathcal{P}_3
\mathcal{S}	suprafață (curbă în reprezentarea plană) netedă și simetrică inclusă în domeniul \mathcal{P}_3
\mathbf{v}	viteza unei particule în \mathcal{P}_3
$[\mathbf{v}] = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-$	saltul vitezei \mathbf{v} la traversarea unei suprafețe de discontinuitate
\mathbf{a}	acelerația unei particule în \mathcal{P}_3
$\mathbb{1}$	tensorul unitate
$\mathbf{d} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$	tensorul vitezelor de deformare
$\mathbb{II}_{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} [\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} - (\text{tr} \mathbf{d})^2]$	cel de-al doilea invariant al tensorului viteză de deformare
$\mathbb{I}_{\mathbf{d}} = \text{tr} \mathbf{d}$	primul invariant al tensorului viteză de deformare
\mathfrak{t}	tensorul de tensiune al lui Cauchy
$\mathfrak{t}\mathbf{n}$	vectorul tensiune al lui Cauchy
\mathbf{n}	versorul normalei la curbă \mathcal{S}
$\boldsymbol{\tau}$	versorul tangentei la curbă \mathcal{S}
\mathbf{b}	densitatea forțelor masice
\mathbf{T}, \mathbf{N}	rezultantale tensiunilor tangențiale și normale pe $P_1 P_2$
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$	versorii bazei locale în coordonate polare (r, θ)
$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$	versorii sistemului de coordonate carteziene (x_1, x_2)
$\mathbf{R}_j = X_j \mathbf{i}_1 + Y_j \mathbf{i}_2$	rezultanta tensiunilor pe suprafețele de discontinuitate \mathcal{S}_j , $j = 1, 2$
$\mathbf{R} = X \mathbf{i}_1 + Y \mathbf{i}_2$	rezultanta tensiunilor pe $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_3$
Q	fluxul vitezei prin $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_3$
v_n	componenta normală a vitezei
ds	elementul de arc de curbă
ψ	funcția de curent a lui Stokes
$\psi_0^o, \psi_1^o, \psi_2^o$	aproximările funcției de curent a lui Stokes
p	funcția de presiune
p_0^o, p_1^o, p_2^o	aproximările funcției de presiune
$r = r_j(\theta), \theta \in [-\theta_0, \theta_0]$	ecuațiile curbelor asociate suprafețelor de discontinuitate \mathcal{S}_j , $j = 1, 2$
$r = r(\theta), \theta \in [-\theta_0, \theta_0]$	ecuația curbei (suprafeței) netede și simetrice $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_3$

v_r, v_θ	componentele vitezei în coordonate polare
$d_{rr}, d_{r\theta}, d_{\theta\theta}$	componentele tensorului vitezelor de deformare în coordonate polare
$t_{rr}, t_{r\theta}, t_{\theta\theta}$	componentele tensorului tensiune al lui Cauchy în coordonate polare
v_r^v, v_θ^v	componentele vitezei în aproximația de ordinul zero în Bg
$d_{rr}^v, d_{r\theta}^v, d_{\theta\theta}^v$	componentele tensorului vitezelor de deformare în aproximația de ordinul zero în Bg
$t_{rr}^v, t_{r\theta}^v, t_{\theta\theta}^v$	componentele tensorului tensiune al lui Cauchy în aproximația de ordinul zero în Bg
v_r^p, v_θ^p	componentele vitezei în aproximația de ordinul întâi în Bg
$d_{rr}^p, d_{r\theta}^p, d_{\theta\theta}^p$	componentele tensorului vitezelor de deformare în aproximația de ordinul întâi în Bg
$t_{rr}^p, t_{r\theta}^p, t_{\theta\theta}^p$	componentele tensorului tensiune al lui Cauchy în aproximația de ordinul întâi în Bg
v_r^i, v_θ^i	componentele vitezei în aproximația în Re
$d_{rr}^i, d_{r\theta}^i, d_{\theta\theta}^i$	componentele tensorului vitezelor de deformare în aproximația în Re
$t_{rr}^i, t_{r\theta}^i, t_{\theta\theta}^i$	componentele tensorului tensiune al lui Cauchy în aproximația în Re
z, \bar{z}	variabile complexe conjugate
$v_j, j = 1, 2$	componentele vitezei în coordonate carteziane
$d_{ij}, i, j = 1, 2$	componentele tensorului vitezelor de deformare în coordonate carteziane
$t_{ij}, i, j = 1, 2$	componentele tensorului tensiune al lui Cauchy în coordonate carteziane
X_1	valoarea contraforței pe \mathcal{S}_1
X_1^v, X_1^p, X_1^i	valoarea contraforței în aproximația Bg^0, Bg^1, Re
X_2	valoarea forței frontale pe \mathcal{S}_2
X_2^v, X_2^p, X_2^i	valoarea forței frontale în aproximația Bg^0, Bg^1, Re
T_1, N_1	componentele rezultatelor tensiunilor tangențiale și normale pe NP_1
$T_1^v, T_1^p, T_1^i,$	componentele rezultatelor tensiunilor tangențiale pe NP_1 în aproximația Bg^0, Bg^1, Re
$N_1^v, N_1^p, N_1^i,$	componentele rezultatelor tensiunilor normale pe NP_1 în aproximația Bg^0, Bg^1, Re
T_2, N_2	componentele rezultatelor tensiunilor tangențiale și normale pe P_2N
$T_2^v, T_2^p, T_2^i,$	componentele rezultatelor tensiunilor tangențiale pe P_2N în aproximația Bg^0, Bg^1, Re
$N_2^v, N_2^p, N_2^i,$	componentele rezultatelor tensiunilor normale pe P_2N în aproximația Bg^0, Bg^1, Re
$f_0(\theta), f_1(\theta)$	funcții din aproximarea $\psi_0^o(r^o, \theta)$
a_0, b_0, a_1, b_1	constante în funcțiile $f_0(\theta), f_1(\theta)$
f	constantă în funcția de presiune $p_0^o(r^o, \theta)$
$F_2(\theta), F_3(\theta), F_4(\theta), F_5(\theta)$	funcții din aproximarea $\psi_1^o(r^o, \theta)$
$A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5, B_5$	constante în funcțiile $F_2(\theta), F_3(\theta), F_4(\theta), F_5(\theta)$
F	valoarea în θ_0 a funcției $F(\theta)$ din $p_1^o(r^o, \theta)$

$A(r, \theta), B(\theta)$	funcții care intervin în expresia celui de-al doilea invariant al tensorului viteză de deformare
$\alpha(\theta), \beta(\theta), \gamma(\theta)$	notații pentru funcții care intervin în expresiile lui $A(r, \theta)$ și $B(\theta)$
$A_1(\theta), B_1(\theta), C_1(\theta)$	notații pentru funcții care intervin în aproximarea $\frac{1}{\sqrt{\mathbf{II}_d}}$
p, q, t, s	constante care intervin în funcțiile $A_1(\theta), B_1(\theta)$ și $C_1(\theta)$
$G_0(\theta), G_1(\theta), G_2(\theta)$	funcții din aproximarea $\psi_2^o(r^o, \theta)$
$C_0, D_0, C_1, D_1, C_2, D_2$	constante în funcțiile $G_0(\theta), G_1(\theta), G_2(\theta)$
G	constantă în expresia funcției de presiune $p_2^o(r^o, \theta)$
R_1, R_2	semigrosimea benzii la intrarea, respectiv la ieșirea din \mathcal{P}_3
V_1, V_2	vitezele benzii în domeniile rigide \mathcal{P}_1 , respectiv \mathcal{P}_2
$r\%$	reducția relativă a grosimii benzii laminate
$2\theta_0$	unghiul de apucare dintre rolă și bandă
R	raza rolei
$\omega = \boldsymbol{\omega} $	modulul vitezei unghiulare a rolei
$r_j = \frac{R_j}{\sin \theta_0}, j = 1, 2$	valoarea lui r în punctul P_1 , respectiv în P_2
r_N	valoarea lui r în punctul neutral N
μ	coeficientul de frecare al lui Coulomb
ρ	densitatea materialului
k	limita de plasticitate la forfecare pură
η	coeficientul de vâscozitate dinamică

Introducere

Laminarea este cea mai răspândită tehnică utilizată în industria de prelucrare a metalelor. Aproximativ trei sferturi din producția mondială de oțel este obținută prin laminare, restul fiind prelucrat prin forjare, extrudare și tragere. Conceptul esențial privind desfășurarea procesului de laminare este neschimbat de secole, obiectivul fiind același, adică obținerea unor produse finite sub formă de profile, table și benzi de diferite grosimi și având un finisaj superior.

O bandă metalică având grosimea $2R_1$ intră între role cu viteza V_1 . Ea traversează spațiul dintre role și iese cu grosimea redusă $2R_2$ și viteza V_2 . Întrucât volumul de metal rămâne neschimbat, are loc relația $2R_1V_1b = 2R_2V_2b$, unde b este lățimea benzii. De aici rezultă că viteza la intrare V_1 este mai mică decât viteza la ieșire V_2 . Prin urmare, viteza benzii trebuie să crească continuu de la intrare spre ieșire. Într-un singur punct pe arcul de contact dintre rolă și bandă, viteza materialului egalează viteza periferică a rolei. Acest punct se numește *punct neutral* sau *punct „de nealunecare“*.

Un element important în procesul de laminare este dat de distribuția tensiunii normale pe rolă (numită în literatura tehnică presiunea pe rolă). Datele experimentale obținute de Siebel și Lueg [18] au pus în evidență faptul că presiunea pe metal nu este uniformă, ea variind de la o valoare minimă corespunzătoare punctului de intrare spre o valoare maximă în vecinătatea punctului neutral, după care descrește mai repede până la ieșirea materialului dintre cele două role.

Modelele matematice care investighează problema prelucrării metalelor prin laminare au o importanță deosebită în practică. Rezultatele analitice și numerice ale acestora permit o estimare a comportamentului benzii în domeniul de deformare din punct de vedere al vitezelor de deformare și al tensiunilor, precum și o evaluare a influenței parametrilor de operare asupra întregului proces al laminării. Variabilele principale care controlează procesul de laminare (Avitzur [1], Lenard [13]) sunt: (1) diametrul rolei, (2) rezistența la deformare a metalului, (3) frecarea dintre rolă și metal, și (4) prezența tensiunii și contratensiunii de tragere. Potrivit studiului efectuat, mai adăugăm: (5) grosimea benzii la intrare, (6) reducția grosimii și (7) viteza de lucru. Aceste ultime elemente sunt luate în considerație în teză.

În literatura de specialitate (Avitzur [1], Camenschi și Șandru [8], Cristescu [11]) există mai multe moduri de abordare. Pe de o parte se folosesc metodele globale în care soluția problemei se determină pornind de la prescrierea unui câmp de viteze cinematic admisibil. Amintim aici, metoda bazată pe aplicarea teoremei asupra puterii totale (Cristescu și Suliciu [10]), metoda de analiză limită „upper-bound“ (Avitzur [1]) și metode variaționale (Cleja-Tigoiu și Cristescu [9]). Pe de altă parte, într-o serie de lucrări (Camenschi și colab. [5,6], Camenschi și Șandru [8]) privind diverse probleme de prelucrare a metalelor s-a utilizat teoria dezvoltărilor asimptotice care a permis obținerea unei soluții locale.

Metoda dezvoltărilor în serie de puteri în raport cu parametrii adimensionali subunitari, numărul lui Bingham Bg și numărul lui Reynolds Re , a fost inițiată de Camenschi, Șandru și Cristescu (vezi [5,6], [15–17]) și a fost aplicată cu succes în rezolvarea unor probleme de prelucrare a metalelor prin deformare vâscoplastică. Originalitatea folosirii în dezvoltările asimptotice a

acestor doi parametri adimensionali este că ei reprezintă o combinație a caracteristicilor mecanice și cinematice a materialului supus deformării, cum ar fi vâscozitatea, limita de plasticitate la forfecare pură sau viteza de lucru. Astfel, având la bază principiile mecanicii mediilor continue deformabile (Camenschi [7]) și metoda matematică a dezvoltărilor asimptotice (Hinch [12], Van Dyke [20]), modelul analitic elaborat este consistent și rațional.

Această teză de doctorat este o contribuție la studiul modelării matematice a benzilor metalice care se deformează vâscoplastic prin laminare, banda metalică fiind modelată printr-o lege constitutivă de tip Bingham. Soluții analitice locale sunt obținute prin aplicarea metodei dezvoltărilor asimptotice după unul sau doi parametri adimensionali subunitari.

Rezultatele originale ale tezei sunt incluse în trei articole ale autorului. Primul articol „*A rational analytical model of flat rolling problem*” (Barbu și Șandru [2]) a fost publicat într-o revistă internațională, iar al doilea articol „*Mathematical approach of the flat rolling problem and new aspects concerning the geometry of the deformation zone*” (Barbu și Șandru [3]) a fost acceptat pentru publicare în revista Academiei Române, seria Matematică. Cea de-a treia lucrare „*High-speed viscoplastic flow through inclined planes with applications to flat rolling and strip drawing*” (Barbu și Șandru [4]) conține rezultate originale și a fost prezentată în cadrul unei manifestări științifice din domeniul Matematicii aplicate.

Teza de doctorat, intitulată „*Contribuții în modelarea matematică a procesului de laminare a benzilor metalice la rece*”, începe cu o scurtă introducere, apoi se continuă cu cinci capitole și patru anexe. Teza se încheie cu o listă bibliografică detaliată care cuprinde atât referințe fundamentale, cât și referințe de dată recentă din literatura de specialitate.

Capitolul 1 conține o scurtă descriere a procesului de laminare a benzilor. Sunt evidențiate elementele geometrice ale procesului și sunt enumerate ipotezele de lucru privind desfășurarea procesului de deformare și cinematica mișcării. Se presupune că proprietățile mecanice ale materialului sunt descrise cu ajutorul unui model Bingham rigid-vâscoplastic. Folosind principiile mecanicii mediilor continue deformabile, în domeniul de deformare vâscoplastică \mathcal{P}_3 este formulată problema matematică cu date la limită ce permite determinarea unei soluții locale în problema laminării simetrice a benzilor. Este introdusă funcția de curent a lui Stokes $\psi(r, \theta)$ dedusă din ecuația de continuitate.

Capitolul 2 are la bază rezultatele publicate de Barbu și Șandru [2]. Se adimensionalizează ecuațiile modelului prin schimbări de variabile și funcții, punându-se astfel în evidență parametrii adimensionali Bg (numărul lui Bingham) și Re (numărul lui Reynolds). Presupunând că $Bg < 1$ și $Re \ll 1$, se dezvoltă atât funcția lui Stokes $\psi(r, \theta)$, cât și funcția de presiune $p(r, \theta)$ în serie de puteri după parametrul adimensional Bg . Egalând în sistemul ecuațiilor de echilibru (2.5) termenii având același grad în raport cu parametrul Bg , este construită o soluția locală a problemei matematice în aproximația până la termenii de $\mathcal{O}(Bg^2)$. Prin introducerea variabilelor complexe conjugate (z, \bar{z}) sunt reformulate ecuațiile de echilibru ale modelului. Avantajul folosirii aparatului matematic al variabilelor complexe este că acesta permite folosirea metodei transformărilor conforme în problema plană a laminării benzilor. Exemplele numerice prezentate în acest capitol pun în evidență sensibilitatea modelului la variația parametrilor geometrico-mecanici implicați în desfășurarea procesului de laminare. Rezultatele grafice sunt validate din punct de vedere calitativ de datele experimentale obținute de Siebel și Lueg [18], precum și de simulările numerice prezentate de Lenard [13].

În Capitolul 3 este investigată geometria domeniului de deformare \mathcal{P}_3 . Aceste rezultate originale se regăsesc în articolele publicate de Barbu și Sandru [3, 4]. Spre deosebire de modelele clasice ale laminării plane prezente în literatură (Orowan [14]), în modelul dezvoltat în această teză se consideră că forma suprafețelor de discontinuitate care delimitează lateral domeniul \mathcal{P}_3 , nu este a priori cunoscută. Ecuațiile curbelor asociate suprafețelor \mathcal{S}_j , $j = \overline{1, 2}$ sunt determinate sub forma (3.1). De asemenea, sunt analizate două cazuri „limită“ ale problemei laminării benzilor. Se remarcă faptul că geometria domeniului de deformare este variabilă, depinzând de valorile considerate în simulări pentru coeficientul de frecare μ și viteza de lucru V_2 .

În Capitolul 4 sunt prezentate câteva rezultate noi, încă nepublicate, privind influența inerției în problema laminării benzilor. Presupunând că $Bg < 1$ și $Re < 1$, dezvoltările asimptotice ale funcțiilor $\psi(r, \theta)$ și $p(r, \theta)$ după acești doi parametri adimensionali sunt de forma (4.1). Prin folosirea în model a ecuațiilor de mișcare (4.2) în locul ecuațiilor de echilibru (2.5), sunt extinse rezultatele din Capitolul 2. Folosind metoda variabilelor complex conjugate (z, \bar{z}), sistemul ecuațiilor de mișcare este rescris sub forma (4.26). Exemplele numerice din acest capitol ilustrează faptul că influența inerției în procesul de laminare este semnificativă atunci când valorile raportului adimensional Re/Bg sunt mai mari, ceea ce înseamnă viteze de lucru de zeci de m/s .

În Capitolul 5 se face o scurtă trecere în revistă a principalelor contribuții prezentate în această teză de doctorat. Sunt enumerate câteva concluzii finale și sunt identificate direcții viitoare de cercetare în acest vast domeniu.

Teza conține patru anexe. În Anexa 1 este prezentat modelul rigid-vâscoplastic al lui Bingham. Anexa 2 este dedicată prezentării unei soluții generale a ecuației biarmonice în coordonate polare. În Anexa 3 sunt date formulele exacte de calcul pentru forța și momentul rezultat care acționează asupra rolei, iar în Anexa 4 este prezentat un rezultat care permite calculul volumului de material care traversează suprafețele de discontinuitate care delimitează domeniul de deformare \mathcal{P}_3 .

Capitolul 1

Problema laminării simetrice a benzilor

În acest capitol este prezentată o scurtă descriere a procesului tehnologic de prelucrare a metalelor prin laminare, după care sunt enumerate ipotezele de lucru considerate în rezolvarea problemei.

În baza principiilor mecanicii mediilor continue deformabile este formulată problema matematică a laminării simetrice folosindu-se ecuațiile de mișcare, ecuația de continuitate și ecuația constitutivă de tip Bingham. De asemenea sunt precizate condițiile cinematice și la limită care sunt utilizate pentru determinarea unei soluții locale în problema laminării benzilor metalice.

1.1 Scurtă descriere a procesului

1.1.1 Geometria procesului de laminare

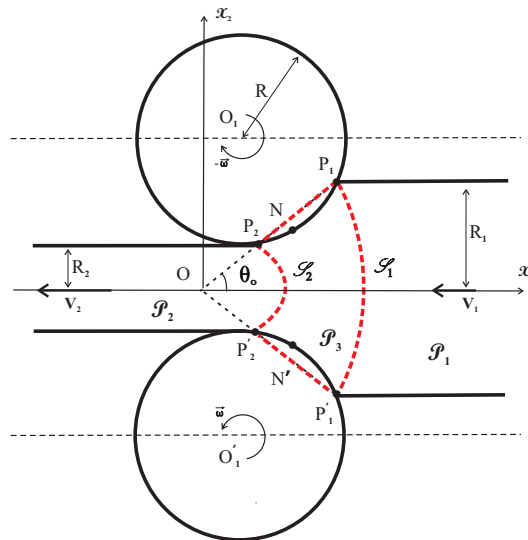


Figura 1.1: Geometria procesului de laminare și zona de deformare (în reprezentare plană)

În Figura 1.1 sunt redate elementele geometrice ale modelului de laminare. Dispozitivul de laminare este compus din două role de rază R , dispuse simetric față de axa Ox_1 și care se rotesc în sens opus. Prin laminare banda metalică își micșorează grosimea de la $2R_1$ la $2R_2$ (unde $R_2 < R_1$).

Banda metalică care se prelucurează prin procesul de laminare se compune din trei domenii $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$.

- \mathcal{P}_1 și \mathcal{P}_2 sunt domenii în care materialul se deplasează cu viteze constante V_1 , respectiv V_2 .
- \mathcal{P}_3 este domeniul de deformare, fiind delimitat arcele de contact P_1P_2 , $P_1'P_2'$ și suprafețele \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 .

1.1.2 Ipotezele de lucru

În procesul de laminare a benzilor metalice se consideră următoarele ipoteze de lucru:

► 1. **Ipoteze privind procesul de deformare și cinematica mișcării:**

- Deformarea este plană, extensia în lățime a materialului fiind neglijabilă;
- Materialul supus deformării este considerat incompresibil;
- Mișcarea este staționară la orice moment de timp ($\partial \mathbf{v} / \partial t \equiv \mathbf{0}$);
- Forțele masice se neglijează ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$);
- În domeniul \mathcal{P}_3 materialul se deformează vâscoplastic prin procesul de laminare, fiind descris de ecuația constitutivă de tip Bingham;
- În domeniile \mathcal{P}_1 și \mathcal{P}_2 materialul se mișcă ca un rigid cu viteze constante ($V_2 > V_1$);
- \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 sunt suprafețe de discontinuitate ale vitezei a căror formă nu este apriori cunoscută.

► 2. **Ipoteze tehnice:**

- Rolele sunt presupuse rigide și identice ca rază, având aceleași condiții pe suprafață, putere aplicată și viteze de operare ω . Astfel, curgerea materialului este simetrică în raport cu Ox_1 ;
- Rolele au raze mari în raport cu semigrosimea benzii care se laminează ($R > R_1 > R_2$);
- Coeficientul de frecare μ dintre role și bandă este presupus constant pe toată suprafața de contact;
- Banda se mișcă mai încet decât rola la intrare și mai rapid decât rola la ieșire;
- Pe arcul de contact există un punct neutral N în care viteza rolei este egală cu cea a materialului care se deformează;
- Rezultanta forțelor din domeniul rigid \mathcal{P}_1 care acționează asupra zonei de deformare \mathcal{P}_3 pe suprafața de discontinuitate \mathcal{S}_1 este cunoscută. În mod analog, se cunoaște valoarea rezultantă a forțelor din \mathcal{P}_2 care acționează pe \mathcal{S}_2 .

Să observăm următoarele:

- Forța de frecare care acționează pe segmentul de contact între N și P_1 (la intrare) favorizează avansarea materialului în zona de deformare, în timp ce pe porțiunea cuprinsă între P_2 și N (spre ieșire) încetinește procesul de laminare a benzii.
- Poziția punctului neutral N nu este cunoscută, ea fiind dependentă de valorile parametrilor geometrici și mecanici care influențează procesul de laminare (vezi Lenard [13]).

1.2 Formularea matematică a problemei

Problema 1 În domeniul \mathcal{P}_3 reprezentat în Figura 1.1, să se determine câmpul de viteze \mathbf{v} , câmpul de tensiuni \mathfrak{t} și poziția punctului neutral N , astfel încât să fie satisfăcute ecuațiile:

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathfrak{t}^T, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.2)$$

$$\mathfrak{t} = -p \mathbb{1} + \left(2\eta + \frac{k}{\sqrt{\mathbb{II}_{\mathfrak{d}}}} \right) \mathfrak{d}, \text{ pentru } \mathbb{II}_{\mathfrak{d}} \neq 0, \quad (1.3)$$

și îndeplinite următoarele condiții pe frontieră $\partial \mathcal{P}_3$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{pe } P_1 P_2, P'_1 P'_2, \quad (1.4)$$

$$|\mathbf{T}| = \mu |\mathbf{N}| \quad \text{pe } P_1 P_2, P'_1 P'_2, \quad (1.5)$$

$$\rho v_n [\mathbf{v}] - [\mathfrak{t}] \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \mathcal{S}_j, j = \overline{1,2}, \quad (1.6)$$

în următoarele ipoteze de lucru:

- $\exists N \in [P_1 P_2]$ astfel încât $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\omega R$ în punctul N ;
- Valorile rezultatelor $\mathbf{R}_j = \int_{\mathcal{S}_j} \mathfrak{t} \mathbf{n} ds$, unde $j = \overline{1,2}$, sunt precizate;
- $V_1 R_1 = V_2 R_2$ (legea globală de conservare a masei).

Observație: Rezultatele forțelor care acționează pe suprafețele de discontinuitate \mathcal{S}_1 la intrare și \mathcal{S}_2 la ieșire sunt exprimate prin relațiile

$$\mathbf{R}_j = X_j \mathbf{i}_1 + Y_j \mathbf{i}_2, \quad j = \overline{1,2} \quad (1.7)$$

Definiția 1.1 X_1 se numește contraforță și reprezintă rezultanta forțelor din domeniul rigid \mathcal{P}_1 care acționează asupra materialului supus deformării în \mathcal{P}_3 pe suprafața de discontinuitate \mathcal{S}_1 .

X_2 se numește forță frontală și reprezintă rezultanta forțelor din domeniul rigid \mathcal{P}_2 care acționează asupra materialului supus deformării în \mathcal{P}_3 pe suprafața de discontinuitate \mathcal{S}_2 .

1.3 Problema laminării benzilor în coordonate polare

Observația 1.1 Deoarece rolele au dimensiuni mari în raport cu semigrosimea benzii laminate ($R > R_1 > R_2$), arcele de contact $\widehat{P_1 P_2}$ și $\widehat{P'_1 P'_2}$ sunt approximate cu două segmente de dreaptă $P_1 P_2$ și $P'_1 P'_2$.

Având în vedere simetria configurației, este utilă folosirea sistemului de coordonate polare (r, θ) pentru determinarea unei soluții locale în problema plană a laminării benzilor. Problema 1 se reformulează în sistemul de coordonate polare (r, θ) sub următoarea formă:

Problema 2 În domeniul \mathcal{P}_3 reprezentat în Figura 1.1, să se determine câmpul de viteze v_r, v_θ , câmpul de tensiuni $t_{rr}, t_{\theta\theta}, t_{r\theta}$ și poziția punctului neutral r_N astfel încât, să fie satisfăcute ecuațiile:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (t_{rr} - t_{\theta\theta}), \quad (1.8)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} t_{r\theta}, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v_r = 0, \quad (1.10)$$

$$t_{rr} = -p + \left(2\eta + \frac{k}{\sqrt{\mathbf{\Pi}_{\text{cl}}}}\right) d_{rr}, \quad t_{\theta\theta} = -p + \left(2\eta + \frac{k}{\sqrt{\mathbf{\Pi}_{\text{cl}}}}\right) d_{\theta\theta}, \quad (1.11)$$

$$t_{r\theta} = \left(2\eta + \frac{k}{\sqrt{\mathbf{\Pi}_{\text{cl}}}}\right) d_{r\theta} \quad (1.12)$$

și îndeplinite următoarele condiții pe frontiera $\partial \mathcal{P}_3$:

$$v_\theta(r, \theta) \Big|_{\theta = \pm \theta_0} = 0 \quad \text{pe } P_1 P_2, P'_1 P'_2 \quad (1.13)$$

$$T_1 = \mu N_1 \quad \text{pe } N P_1, \quad (1.14)$$

$$T_2 = -\mu N_2 \quad \text{pe } P_2 N, \quad (1.15)$$

$$\rho v_n[\mathbf{v}] - [\mathbf{t}] \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \mathcal{S}_j, j = \overline{1, 2}, \quad (1.16)$$

în următoarele ipoteze de lucru:

- $\exists N \in [P_1 P_2]$ astfel încât

$$v_r(r_N, \theta_0) = -\omega R, \quad (1.17)$$

- Valorile contraforței X_1 , respectiv ale forței frontale X_2 (din Definiția 1.1) sunt precizate. În particular avem

$$X_1 = 0 \quad \text{și} \quad X_2 = 0, \quad (1.18)$$

- Debitul prin suprafețele $\mathcal{S}_j, j = \overline{1, 2}$, este constant

$$\psi(r, \theta) \Big|_{\substack{\theta = \theta_0 \\ r = r_1, r_2}} = -R_2 V_2 = -R_1 V_1. \quad (1.19)$$

unde $\psi(r, \theta)$ este funcția lui Stokes.

Observația 1.2 Ecuația de continuitate (1.10) permite introducerea funcției de curent a lui Stokes $\psi(r, \theta)$ ce intervine în condiția (1.19) prin relațiile

$$v_r(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial \theta}, \quad v_\theta(r, \theta) = -\frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial r}. \quad (1.20)$$

1.4 Concluzii

- Ecuațiile (1.8)–(1.12) descriu întregul proces de deformare vâscoplastică care are loc în domeniul $\mathcal{P}_3 = \left\{ (r, \theta) / r \in (r_2(\theta), r_1(\theta)), \theta \in (-\theta_0, \theta_0) \right\}$, unde $r = r_1(\theta)$ și $r = r_2(\theta)$ sunt ecuațiile curbelor asociate celor două suprafețe de discontinuitate \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 ;

- Prin intermediul relației (1.20), sistemul de ecuații ale modelului (1.8)–(1.12) având nouă funcții necunoscute se reduce la determinarea a numai două funcții necunoscute. Acestea sunt funcția de curent a lui Stokes $\psi(r, \theta)$ și funcția de presiune $p(r, \theta)$.

Capitolul 2

Metoda de rezolvare și soluția problemei

Acest capitol are la bază rezultatele publicate în articolul „*A rational analytical model of flat rolling problem*” publicat de Barbu și Șandru [2]. Ecuațiile modelului sunt adimensionalizate prin schimbări de variabile și de funcții, punându-se în evidență doi parametri adimensionali numărul lui Bingham (Bg) și numărul lui Reynolds (Re).

Presupunând că $Bg < 1$ și $Re \ll 1$, se aplică metoda perturbațiilor dezvoltând funcția lui Stokes $\psi(r, \theta)$ și funcția de presiune $p(r, \theta)$ în serie de puteri după parametrul adimensional Bg până la ordinul întâi. Aceste dezvoltări asimptotice se introduc în ecuațiile sistemului și se egalează termenii având același grad în raport cu parametrul Bg . Astfel, se obțin două sisteme de ecuații cu derivate parțiale corespunzătoare celor două aproximații în Bg . Este construită o soluție locală a problemei matematice în aproximația până la termenii de $\mathcal{O}(Bg^2)$.

2.1 Adimensionalizarea sistemului de ecuații

Fie constantele reale, dimensionale, pozitive și nenule R_2 și V_2 reprezentând o lungime, respectiv o viteză caracteristică mișcării materialului. Folosind notația cu indice superior „ o ” se introduc variabilele adimensionale după cum urmează

$$\begin{aligned} r &= R_2 r^o, & v_r &= V_2 v_r^o, & v_\theta &= V_2 v_\theta^o, \\ p &= \frac{\eta V_2}{R_2} p^o, & \mathfrak{t} &= \frac{\eta V_2}{R_2} \mathfrak{t}^o, & \mathfrak{d} &= \frac{V_2}{R_2} \mathfrak{d}^o. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Introducând relațiile de adimensionalizare (2.1) în sistemul de ecuații (1.8)–(1.12) ale modelului, se obțin cei doi parametri adimensionali *numărul lui Bingham*, respectiv *numărul lui Reynolds*:

$$Bg = \frac{kR_2}{\eta V_2}, \quad Re = \frac{\rho V_2 R_2}{\eta}, \quad (2.2)$$

care caracterizează procesul deformării vâscoplastice din \mathcal{P}_3 .

2.2 Metoda dezvoltării în serie după un parametru „mic”

În problema laminării benzilor metalice se presupune că procesul de deformare în \mathcal{P}_3 este „lent” ($Re \ll 1$), iar numărul lui Bingham satisface condiția

$$Bg < 1. \quad (2.3)$$

Admitem că funcția de curent a lui Stokes $\psi^o(r^o, \theta)$ și funcția de presiune $p^o(r^o, \theta)$ se dezvoltă în serii de puteri după numărul lui Bingham, astfel încât avem reprezentările

$$\begin{aligned}\psi^o(r^o, \theta) &= \psi_0^o(r^o, \theta) + Bg \psi_1^o(r^o, \theta) + \mathcal{O}(Bg^2), \\ p^o(r^o, \theta) &= p_0^o(r^o, \theta) + Bg p_1^o(r^o, \theta) + \mathcal{O}(Bg^2).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Observația 2.1 În ipoteza că $Re \ll 1$, sistemul ecuațiilor de echilibru (1.8)–(1.9) satisfăcut în \mathcal{P}_3 se deduce de forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_{rr}^o}{\partial r^o} + \frac{1}{r^o} \frac{\partial t_{r\theta}^o}{\partial \theta} + \frac{1}{r^o} (t_{rr}^o - t_{\theta\theta}^o) &= 0, \\ \frac{\partial t_{r\theta}^o}{\partial r^o} + \frac{1}{r^o} \frac{\partial t_{\theta\theta}^o}{\partial \theta} + \frac{2}{r^o} t_{r\theta}^o &= 0.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Teorema 2.1 Notăm cu $\mathbf{R} = X\mathbf{i}_1 + Y\mathbf{i}_2$ rezultanta tensiunilor pe curba $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_3$, unde \mathcal{S} este o curbă netedă, simetrică în raport cu axa Ox_1 și dată de ecuația $r = r(\theta)$, $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$. Atunci

a) Componenta rezultantei \mathbf{R} pe direcția \mathbf{i}_1 se determină rezolvând următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X(r, \theta)}{\partial r} &= t_{\theta\theta} \sin \theta - t_{r\theta} \cos \theta, \\ \frac{\partial X(r, \theta)}{\partial \theta} &= r(t_{rr} \cos \theta - t_{r\theta} \sin \theta).\end{aligned}\quad (2.6)$$

b) Componenta rezultantei \mathbf{R} pe direcția \mathbf{i}_2 este nulă.

Corolarul 2.2 Valoarea contraforței X_1 care acționează pe suprafața de discontinuitate \mathcal{S}_1 se calculează folosind formula

$$X_1 = 2[X(r_1(\theta_0), \theta_0) - X(r_1(0), 0)], \quad (2.7)$$

unde $r = r_1(\theta)$ este ecuația curbei asociate suprafeței de discontinuitate \mathcal{S}_1 .

Valoarea forței frontale X_2 care acționează pe suprafața de discontinuitate \mathcal{S}_2 se determină din relația

$$X_2 = -2[X(r_2(\theta_0), \theta_0) - X(r_2(0), 0)], \quad (2.8)$$

unde $r = r_2(\theta)$ este ecuația curbei asociate suprafeței de discontinuitate \mathcal{S}_2 .

2.2.1 Aproximația de ordinul zero

Funcțiile necunoscute sunt $\psi_0^o(r^o, \theta)$ și $p_0^o(r^o, \theta)$. Se consideră că aproximația de ordin zero exprimă efectele vâscozității în timpul procesului de deformare care are loc în domeniul \mathcal{P}_3 . Se folosește notația cu indicele superior „ v ”.

Ipoteză: Se presupune că funcția de curent $\psi_0^o(r^o, \theta)$ este de forma

$$\psi_0^o(r^o, \theta) = f_0(\theta) + \frac{r}{R_2} f_1(\theta), \quad (2.9)$$

unde $f_0(\theta)$, $f_1(\theta)$ sunt două funcții necunoscute ale căror expresii vor fi determinate din ecuațiile de echilibru și din condițiile la limită.

Propoziția 2.4 Considerând funcția de curent $\psi_0^o(r^o, \theta)$ având reprezentarea de forma (2.9), sistemul ecuațiilor de echilibru (2.5) corespunzător aproximației de ordinul zero în Bg este

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p_0^o(r^o, \theta)}{\partial r} + \frac{R_2^2}{r^3} f_0'''(\theta) + \frac{R_2}{r^2} (f_1'''(\theta) + f_1'(\theta)) &= 0, \\ -\frac{\partial p_0^o(r^o, \theta)}{\partial \theta} + \frac{2R_2^2}{r^2} f_0''(\theta) + \frac{R_2}{r} (f_1''(\theta) + f_1(\theta)) &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

unde $p_0^o(r^o, \theta)$, $f_0(\theta)$ și $f_1(\theta)$ sunt funcții necunoscute.

Propoziția 2.5 Expresiile funcțiilor necunoscute $f_0(\theta)$, $f_1(\theta)$ și $p_0^o(r^o, \theta)$ din sistemul ecuațiilor de echilibru (2.10) sunt

$$f_0(\theta) = a_0 \theta + \frac{b_0}{2} \sin 2\theta, \quad f_1(\theta) = a_1 \sin \theta + b_1 \theta \cos \theta, \quad (2.11)$$

$$p_0^o(r^o, \theta) = -\frac{R_2^2}{2r^2} f_0'''(\theta) - \frac{R_2}{r} (f_1'''(\theta) + f_1'(\theta)) + f, \quad (2.12)$$

unde a_0 , b_0 , a_1 , b_1 și f sunt constante necunoscute.

Propoziția 2.6 Expresiile componentelor tensorului de tensiune al lui Cauchy din aproximația de ordinul zero în Bg sunt de forma

$$\begin{aligned} \frac{t_{rr}^v(r, \theta)}{k} &= \frac{1}{Bg} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{r} \right)^2 (f_0'''(\theta) - 4f_0'(\theta)) + \frac{R_2}{r} (f_1'''(\theta) + f_1'(\theta)) - f \right], \\ \frac{t_{\theta\theta}^v(r, \theta)}{k} &= \frac{1}{Bg} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{r} \right)^2 (f_0'''(\theta) + 4f_0'(\theta)) + \frac{R_2}{r} (f_1'''(\theta) + f_1'(\theta)) - f \right], \\ \frac{t_{r\theta}^v(r, \theta)}{k} &= \frac{1}{Bg} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^2 f_0''(\theta) + \frac{R_2}{r} (f_1''(\theta) + f_1(\theta)) \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Propoziția 2.7 În aproximația de ordinul zero în Bg, expresiile rezultatelor tensiunilor tangențiale care acționează pe segmentul de contact $P_1 P_2$ sunt de forma

$$\begin{aligned} \frac{T_1^v}{k R_2} &= \frac{1}{Bg} \left[-f_0''(\theta_0) R_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_N} \right) + (f_1''(\theta_0) + f_1(\theta_0)) \ln \frac{r_1}{r_N} \right], \\ \frac{T_2^v}{k R_2} &= \frac{1}{Bg} \left[-f_0''(\theta_0) R_2 \left(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_2} \right) + (f_1''(\theta_0) + f_1(\theta_0)) \ln \frac{r_N}{r_2} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Rezultatele tensiunilor normale se calculează folosind relațiile

$$\begin{aligned} \frac{N_1^v}{k R_2} &= \frac{1}{Bg} \left[-\frac{1}{2} (f_0'''(\theta_0) + 4f_0'(\theta_0)) R_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_N} \right) + (f_1'''(\theta_0) + f_1'(\theta_0)) \ln \frac{r_1}{r_N} - f \frac{r_1 - r_N}{R_2} \right], \\ \frac{N_2^v}{k R_2} &= \frac{1}{Bg} \left[-\frac{1}{2} (f_0'''(\theta_0) + 4f_0'(\theta_0)) R_2 \left(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_2} \right) + (f_1'''(\theta_0) + f_1'(\theta_0)) \ln \frac{r_N}{r_2} - f \frac{r_N - r_2}{R_2} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Propoziția 2.8 Expresia rezultantei tensiunilor care acționează pe o curbă netedă și simetrică $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_3$ de ecuație $r = r(\theta)$, $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$, se calculează folosind relația

$$\begin{aligned} \frac{X^v(r, \theta)}{k R_2} = \frac{1}{2Bg} \left[-\frac{R_2}{r} \left(f_0'''(\theta) + 4f_0'(\theta) \right) \sin \theta + 2 \left(\frac{R_2}{r} f_0''(\theta) + f_1''(\theta) + f_1(\theta) \right) \cos \theta \right. \\ \left. - 2f \frac{r}{R_2} \sin \theta \right] + \text{const.} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Propoziția 2.9 Expresia contraforței X_1^v care acționează pe suprafața de discontinuitate \mathcal{S}_1 este data prin relația

$$X_1^v = 2 \left[X^v(r_1(\theta_0), \theta_0) - X^v(r_1(0), 0) \right]. \quad (2.17)$$

Expresia forței frontale X_2^v care acționează pe suprafața de discontinuitate \mathcal{S}_2 se determină folosind relația

$$X_2^v = -2 \left[X^v(r_2(\theta_0), \theta_0) - X^v(r_2(0), 0) \right], \quad (2.18)$$

unde $r_1 = R_1/\sin \theta_0$, $r_2 = R_2/\sin \theta_0$.

Propoziția 2.10 În problema laminării benzilor simetrice, constantele necunoscute corespunzătoare aproximației de ordinul zero în Bg sunt:

- a_0, b_0, a_1, b_1, f – care intervin prin expresiile funcțiilor $\psi_0^o(r^o, \theta)$ și $p_0^o(r^o, \theta)$;
- r_N – poziția punctului neutral;
- ω – modulul vitezei unghiulare a rolei.

Condițiile cinematice și la limită satisfăcute pe $\partial \mathcal{P}_3$ conduc la un sistem algebric neliniar de șapte ecuații de forma

$$f_1(\theta_0) = 0, \quad (2.19)$$

$$f_0(\theta_0) + 1 = 0, \quad (2.20)$$

$$T_1^v - \mu N_1^v = 0, \quad (2.21)$$

$$T_2^v + \mu N_2^v = 0, \quad (2.22)$$

$$X_1^v = 0, \quad (2.23)$$

$$X_2^v = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{R_2}{r_N} f_0'(\theta_0) + f_1'(\theta_0) = -\frac{\omega R}{V_2}, \quad (2.25)$$

unde $f_0(\theta)$, $f_1(\theta)$ sunt date prin (2.11), T_1^v , T_2^v , N_1^v , N_2^v sunt exprimate prin relațiile (2.14)–(2.15), X_1^v și X_2^v se calculează cu formulele (2.17)–(2.18).

Teorema 2.11 Condiția globală de echilibru al tuturor forțelor rezultante care acționează pe $\partial \mathcal{P}_3$ în proiecție pe axa Ox_1 este satisfăcută

$$2(T_1^v + T_2^v) \cos \theta_0 - 2(N_1^v + N_2^v) \sin \theta_0 + X_1^v + X_2^v = 0. \quad (2.26)$$

2.2.2 Aproximația de ordinul întâi

Funcțiile necunoscute sunt $\psi_1^o(r^o, \theta)$ și $p_1^o(r^o, \theta)$. Se considera că această aproximație oferă răspunsul plastic al materialului supus solicitărilor de deformare care au loc în \mathcal{P}_3 și se folosește notația cu indice superior „p”.

Ipoteză: Se presupune că funcția de curent $\psi_1^o(r^o, \theta)$ este de forma

$$\psi_1^o(r^o, \theta) = \sum_{n=2}^5 \left(\frac{r}{R_2}\right)^n F_n(\theta), \quad (2.27)$$

unde $F_2(\theta)$, $F_3(\theta)$, $F_4(\theta)$ și $F_5(\theta)$ sunt funcții necunoscute ale căror expresii vor fi determinate din ecuațiile de echilibru și folosind condițiile la limită ale problemei.

Propoziția 2.13 Considerând reprezentarea funcției de curent $\psi_1^o(r^o, \theta)$ de forma (2.27), sistemul ecuațiilor de echilibru (2.5) corespunzător aproximației de ordinul întâi în Bg este

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1^o}{\partial r}(r^o, \theta) &= \sum_{n=2}^5 \frac{r^{n-3}}{R_2^{n-2}} [F_n'''(\theta) + n^2 F_n'(\theta)] - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B(\theta)}{\sqrt{A^2(r, \theta) + B^2(\theta)}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A(r, \theta)}{\sqrt{A^2(r, \theta) + B^2(\theta)}} \right) - \frac{2}{r} \frac{B(\theta)}{\sqrt{A^2(r, \theta) + B^2(\theta)}}, \\ \frac{\partial p_1^o}{\partial \theta}(r^o, \theta) &= - \sum_{n=2}^5 (n-2) \left(\frac{r}{R_2}\right)^{n-2} [F_n''(\theta) + n^2 F_n(\theta)] + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A(r, \theta)}{\sqrt{A^2(r, \theta) + B^2(\theta)}} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{B(\theta)}{\sqrt{A^2(r, \theta) + B^2(\theta)}} \right) + 2 \frac{A(r, \theta)}{\sqrt{A^2(r, \theta) + B^2(\theta)}}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

unde $A(r, \theta) \stackrel{not.}{=} f_0''(\theta) + \frac{r}{R_2} [f_1''(\theta) + f_1(\theta)]$ și $B(\theta) \stackrel{not.}{=} 2f_0''(\theta)$.

Observația 2.2 Se introduc notațiile

$$\begin{aligned} \alpha(\theta) &= -2b_0 \sin 2\theta \simeq -4b_0\theta + \mathcal{O}(\theta^3), \quad \beta(\theta) = -2b_1 \sin \theta \simeq -2b_1\theta + \mathcal{O}(\theta^3), \\ \gamma(\theta) &= 2(a_0 + b_0 \cos 2\theta) \simeq 2(a_0 + b_0) - 4b_0\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^3). \end{aligned} \quad (2.29)$$

și se deduce aproximarea

$$\frac{1}{\sqrt{A(r, \theta)^2 + B(r, \theta)^2}} \simeq A_1(\theta) + B_1(\theta) \frac{r}{R_2} + C_1(\theta) \left(\frac{r}{R_2}\right)^2, \quad (2.30)$$

unde

$$\begin{aligned} A_1(\theta) &= \frac{1}{2|a_0 + b_0|} + \frac{a_0 b_0}{|a_0 + b_0|^3} \theta^2 \stackrel{not.}{=} p + q \theta^2, \\ B_1(\theta) &= -\frac{b_0 b_1}{|a_0 + b_0|^3} \theta^2 \stackrel{not.}{=} t \theta^2, \quad C_1(\theta) = -\frac{b_1^2}{4|a_0 + b_0|^3} \theta^2 \stackrel{not.}{=} s \theta^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Propoziția 2.14 Funcțiile necunoscute $F_n(\theta)$, unde $n = \overline{2, 5}$, din expresia (2.27) a funcției lui Stokes $\psi_1^o(r^o, \theta)$ sunt soluții ale următoarelor ecuații diferențiale

$$F_2^{IV}(\theta) + 4F_2''(\theta) = 2\frac{d}{d\theta}[\gamma(\theta)A_1(\theta)] - \frac{d^2}{d\theta^2}[\alpha(\theta)A_1(\theta)], \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} F_3^{IV}(\theta) + 10F_3''(\theta) + 9F_3(\theta) &= 4\frac{d}{d\theta}[\gamma(\theta)B_1(\theta)] - \frac{d^2}{d\theta^2}[\alpha(\theta)B_1(\theta) + \beta(\theta)A_1(\theta)] \\ &+ 3[\alpha(\theta)B_1(\theta) + \beta(\theta)A_1(\theta)], \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} F_4^{IV}(\theta) + 20F_4''(\theta) + 64F_4(\theta) &= 8[\alpha(\theta)C_1(\theta) + \beta(\theta)B_1(\theta)] + 6\frac{d}{d\theta}[\gamma(\theta)C_1(\theta)] \\ &- \frac{d^2}{d\theta^2}[\alpha(\theta)C_1(\theta) + \beta(\theta)B_1(\theta)], \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$F_5^{IV}(\theta) + 34F_5''(\theta) + 225F_5(\theta) = 15\beta(\theta)C_1(\theta) - \frac{d^2}{d\theta^2}[\beta(\theta)C_1(\theta)], \quad (2.35)$$

unde funcțiile $\alpha(\theta)$, $\beta(\theta)$, $\gamma(\theta)$, $A_1(\theta)$, $B_1(\theta)$, $C_1(\theta)$ sunt exprimate prin relațiile (2.29) și (2.31).

Propoziția 2.16 Expresia funcției de presiune $p_1^o(r^o, \theta)$ corespunzătoare aproximației de ordinul întâi în Bg este dată prin relația

$$\begin{aligned} p_1^o(r^o, \theta) &= [F_2'''(\theta) + 4F_2'(\theta)] \ln \frac{r}{R_2} + \sum_{n=3}^5 \frac{1}{n-2} [F_n'''(\theta) + n^2 F_n'(\theta)] \left(\frac{r}{R_2}\right)^{n-2} \\ &+ \left\{ \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta)B_1(\theta) + \beta(\theta)A_1(\theta)] - 3\gamma(\theta)B_1(\theta) \right\} \frac{r}{R_2} \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} [\beta(\theta)C_1(\theta) + \alpha(\theta)C_1(\theta)] - 2\gamma(\theta)C_1(\theta) \right\} \left(\frac{r}{R_2}\right)^2 + \frac{1}{3} \frac{d}{d\theta} [\beta(\theta)C_1(\theta)] \left(\frac{r}{R_2}\right)^3 \\ &+ \left\{ \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta)A_1(\theta)] - 2\gamma(\theta)A_1(\theta) \right\} \ln \frac{r}{R_2} - \gamma(\theta)A_1(\theta) + F(\theta), \end{aligned} \quad (2.36)$$

unde $F(\theta)$ satisface ecuația diferențială $F'(\theta) = 2\left[\alpha(\theta)A_1(\theta) + \frac{d}{d\theta}[\gamma(\theta)A_1(\theta)]\right]$.

Propoziția 2.17 Componentele tensorului de tensiune al lui Cauchy din aproximația de ordinul întâi în Bg sunt exprimate prin relațiile

$$\begin{aligned} \frac{t_{rr}^p(r, \theta)}{k} &= 2F_2'(\theta) - [F_2'''(\theta) + 4F_2'(\theta)] \ln \frac{r}{R_2} - \sum_{n=3}^5 \frac{1}{n-2} [F_n'''(\theta) - (n^2 - 6n + 4)F_n'(\theta)] \left(\frac{r}{R_2}\right)^{n-2} \\ &- \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta)A_1(\theta)] \ln \frac{r}{R_2} - \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta)B_1(\theta) + \beta(\theta)A_1(\theta)] \frac{r}{R_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta) C_1(\theta) + \beta(\theta) B_1(\theta)] \left(\frac{r}{R_2}\right)^2 - \frac{1}{3} \frac{d}{d\theta} [\beta(\theta) C_1(\theta)] \left(\frac{r}{R_2}\right)^3 \\
& + 2\gamma(\theta) A_1(\theta) \ln \frac{r}{R_2} + 2\gamma(\theta) B_1(\theta) \frac{r}{R_2} + \gamma(\theta) C_1(\theta) \left(\frac{r}{R_2}\right)^2 - F(\theta), \tag{2.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{t_{\theta\theta}^p(r, \theta)}{k} &= -2F_2'(\theta) - [F_2'''(\theta) + 4F_2'(\theta)] \ln \frac{r}{R_2} - \sum_{n=3}^5 \frac{1}{n-2} [F_n'''(\theta) + (3n^2 - 6n + 4)F_n'(\theta)] \left(\frac{r}{R_2}\right)^{n-2} \\
& - \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta) A_1(\theta)] \ln \frac{r}{R_2} - \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta) B_1(\theta) + \beta(\theta) A_1(\theta)] \frac{r}{R_2} \\
& - \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta) C_1(\theta) + \beta(\theta) B_1(\theta)] \left(\frac{r}{R_2}\right)^2 - \frac{1}{3} \frac{d}{d\theta} [\beta(\theta) C_1(\theta)] \left(\frac{r}{R_2}\right)^3 \\
& + 2\gamma(\theta) A_1(\theta) \left(\ln \frac{r}{R_2} + 1\right) + 4\gamma(\theta) B_1(\theta) \frac{r}{R_2} + 3\gamma(\theta) C_1(\theta) \left(\frac{r}{R_2}\right)^2 - F(\theta), \tag{2.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{t_{r\theta}^p(r, \theta)}{k} &= \sum_{n=2}^5 [F_n''(\theta) - n(n-2)F_n(\theta)] \left(\frac{r}{R_2}\right)^{n-2} + \alpha(\theta) A_1(\theta) + [\alpha(\theta) B_1(\theta) + \beta(\theta) A_1(\theta)] \frac{r}{R_2} \\
& + [\alpha(\theta) C_1(\theta) + \beta(\theta) B_1(\theta)] \left(\frac{r}{R_2}\right)^2 + \beta(\theta) C_1(\theta) \left(\frac{r}{R_2}\right)^3. \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Propoziția 2.18 În aproximația de ordinul întâi în Bg, expresiile rezultatelor tensiunilor tangențiale care acționează pe segmentul de contact $P_1 P_2$ sunt date prin relațiile

$$\begin{aligned}
\frac{T_1^p}{kR_2} &= \sum_{n=2}^5 [F_n''(\theta_0) - n(n-2)F_n(\theta_0)] \frac{r_1^{n-1} - r_N^{n-1}}{(n-1)R_2^{n-1}} + \alpha(\theta_0) A_1(\theta_0) \frac{r_1 - r_N}{R_2} \\
& + [\alpha(\theta_0) B_1(\theta_0) + \beta(\theta_0) A_1(\theta_0)] \frac{r_1^2 - r_N^2}{2R_2^2} \\
& + [\alpha(\theta_0) C_1(\theta_0) + \beta(\theta_0) B_1(\theta_0)] \frac{r_1^3 - r_N^3}{3R_2^3} + \beta(\theta_0) C_1(\theta_0) \frac{r_1^4 - r_N^4}{4R_2^4}, \tag{2.40}
\end{aligned}$$

$\frac{T_2^p}{kR_2}$ se deduce similar.

Rezultatele tensiunilor normale se calculează folosind formulele

$$\begin{aligned}
\frac{N_1^p}{kR_2} &= -2F_2'(\theta_0) \frac{r_1 - r_N}{R_2} - [F_2'''(\theta_0) + 4F_2'(\theta_0)] \left[\frac{r_1}{R_2} \left(\ln \frac{r_1}{R_2} - 1 \right) - \frac{r_N}{R_2} \left(\ln \frac{r_N}{R_2} - 1 \right) \right] \\
& - \sum_{n=3}^5 \frac{r_1^{n-1} - r_N^{n-1}}{(n-1)(n-2)R_2^{n-1}} [F_n'''(\theta_0) + (3n^2 - 6n + 4)F_n'(\theta_0)] \\
& - \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta) A_1(\theta)] \Big|_{\theta=\theta_0} \left[\frac{r_1}{R_2} \left(\ln \frac{r_1}{R_2} - 1 \right) - \frac{r_N}{R_2} \left(\ln \frac{r_N}{R_2} - 1 \right) \right] - \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta) B_1(\theta) + \beta(\theta) A_1(\theta)] \Big|_{\theta=\theta_0} \frac{r_1^2 - r_N^2}{2R_2^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6} \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta) C_1(\theta) + \beta(\theta) B_1(\theta)] \Big|_{\theta=\theta_0} \frac{r_1^3 - r_N^3}{R_2^3} - \frac{1}{12} \frac{d}{d\theta} [\beta(\theta) C_1(\theta)] \Big|_{\theta=\theta_0} \frac{r_1^4 - r_N^4}{R_2^4} \\
& + 2\gamma(\theta_0) A_1(\theta_0) \left(\frac{r_1}{R_2} \ln \frac{r_1}{R_2} - \frac{r_N}{R_2} \ln \frac{r_N}{R_2} \right) + 2\gamma(\theta_0) B_1(\theta_0) \frac{r_1^2 - r_N^2}{R_2^2} + \gamma(\theta_0) C_1(\theta_0) \frac{r_1^3 - r_N^3}{R_2^3} - F \frac{r_1 - r_N}{R_2},
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$\frac{N_2^p}{kR_2}$ se deduce similar. În (2.36) s-a notat $F = F(\theta_0)$.

Propoziția 2.19 În aproximația de ordinul întâi în Bg, expresia rezultantei tensiunilor care acționează pe o curbă netedă și simetrică $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_3$ se calculează folosind formula

$$\begin{aligned}
\frac{X^p(r, \theta)}{kR_2} &= \sin \theta \left\{ -2F_2'(\theta) \frac{r}{R_2} - \frac{r}{R_2} \left(\ln \frac{r}{R_2} - 1 \right) [F_2'''(\theta) + 4F_2'(\theta)] \right. \\
& - \sum_{n=3}^5 \frac{r^{n-1}}{(n-1)(n-2)R_2^{n-1}} [F_n'''(\theta) + (3n^2 - 6n + 4)F_n'(\theta)] \\
& - \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta) A_1(\theta)] \frac{r}{R_2} \left(\ln \frac{r}{R_2} - 1 \right) - \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta) B_1(\theta) + \beta(\theta) A_1(\theta)] \frac{r^2}{2R_2^2} \\
& - \frac{1}{6} \frac{d}{d\theta} [\alpha(\theta) C_1(\theta) + \beta(\theta) B_1(\theta)] \frac{r^3}{R_2^3} - \frac{1}{12} \frac{d}{d\theta} [\beta(\theta) C_1(\theta)] \frac{r^4}{R_2^4} + 2\gamma(\theta) A_1(\theta) \frac{r}{R_2} \ln \frac{r}{R_2} \\
& \left. + 2\gamma(\theta) B_1(\theta) \frac{r^2}{R_2^2} + \gamma(\theta) C_1(\theta) \frac{r^3}{R_2^3} - F(\theta) \frac{r}{R_2} \right\} \\
& - \cos \theta \left\{ F_2''(\theta) \frac{r}{R_2} + \sum_{n=3}^5 \frac{r^{n-1}}{(n-1)R_2^{n-1}} [F_n''(\theta) - n(n-2)F_n(\theta)] + \alpha(\theta) A_1(\theta) \frac{r}{R_2} \right. \\
& \left. + [\alpha(\theta) B_1(\theta) + \beta(\theta) A_1(\theta)] \frac{r^2}{2R_2^2} + [\alpha(\theta) C_1(\theta) + \beta(\theta) B_1(\theta)] \frac{r^3}{3R_2^3} + \beta(\theta) C_1(\theta) \frac{r^4}{4R_2^4} \right\} + \phi(\theta),
\end{aligned} \tag{2.42}$$

unde $\phi(\theta) \equiv \text{const.}$

Propoziția 2.20 În aproximația de ordinul întâi în Bg, expresia contraforței X_1^p care acționează pe suprafața de discontinuitate \mathcal{S}_1 este data prin relația

$$X_1^p = 2[X^p(r_1(\theta_0), \theta_0) - X^p(r_1(0), 0)]. \tag{2.43}$$

Expresia forței frontale X_2^p care acționează pe suprafața de discontinuitate \mathcal{S}_2 se determină folosind relația

$$X_2^p = -2[X^p(r_2(\theta_0), \theta_0) - X^p(r_2(0), 0)], \tag{2.44}$$

unde $r_1 = \frac{R_1}{\sin \theta_0}$, $r_2 = \frac{R_2}{\sin \theta_0}$.

Propoziția 2.21 *Constantele necunoscute din problema laminării benzilor simetrice corespunzătoare aproximației de ordinul întâi în Bg sunt:*

- $A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5, B_5, F$ care intervin prin expresiile funcțiilor $\psi_1^o(r^o, \theta)$ și $p_1^o(r^o, \theta)$.

Condițiile cinematice și la limită satisfăcute pe $\partial \mathcal{P}_3$ conduc la un sistem algebric liniar de nouă ecuații de forma

$$F_n(\theta_0) = 0 \quad n = \overline{2, 5}, \quad (2.45)$$

$$T_1^p - \mu N_1^p = 0, \quad (2.46)$$

$$T_2^p + \mu N_2^p = 0, \quad (2.47)$$

$$X_1^p = 0, \quad (2.48)$$

$$X_2^p = 0, \quad (2.49)$$

$$\sum_{n=2}^5 F_n'(\theta_0) \left(\frac{r_N}{R_2} \right)^{n-1} = 0, \quad (2.50)$$

unde funcțiile $F_n(\theta)$, $n = \overline{2, 5}$, se determină din (2.32)–(2.35), T_1^p , T_2^p , N_1^p , N_2^p se calculează folosind (2.40)–(2.41), X_1^p și X_2^p este data de relațiile (2.43) și (2.44), iar r_N a fost determinat din aproximația de ordinul zero în Bg.

Teorema 2.22 *Condiția globală de echilibru al tuturor forțelor rezultante care acționează pe $\partial \mathcal{P}_3$ în proiecție pe axa Ox_1 este satisfăcută*

$$2(T_1^p + T_2^p) \cos \theta_0 - 2(N_1^p + N_2^p) \sin \theta_0 + X_1^p + X_2^p = 0. \quad (2.51)$$

Propoziția 2.23 *Dacă în condiția globală de echilibru (2.51) se consideră că $X_1 + X_2 = 0$, se deduce că $\mu > \operatorname{tg} \theta_0$.*

Observația 2.3 *Lenard [13, Cap.4] a prezentat o condiție minimală pentru ca procesul de laminare să poată avea loc, conform căreia trebuie ca $\mu \geq \operatorname{tg} 2\theta_0$. Relația $\mu > \operatorname{tg} \theta_0$ extinde condiția empirică precizată în lucrarea menționată mai sus.*

2.3 Problema laminării reformulată prin metoda variabilelor complexe conjugate (z, \bar{z})

Introducând variabilele complexe conjugate z și \bar{z} , sunt deduse ecuațiile de echilibru care modelează primele două aproximații în Bg și sunt deduse ecuațiile biarmonice ale funcțiilor lui Stokes $\psi_0^o(x_1, x_2)$ și $\psi_1^o(x_1, x_2)$.

Ipoteză: Funcția de curent $\psi(z, \bar{z})$ și funcția de presiune $p(z, \bar{z})$ se dezvoltă în serii de puteri după numărul lui Bingham, astfel încât avem reprezentările

$$\begin{aligned} \psi(z, \bar{z}) &= R_2 V_2 [\psi_0^o(z^o, \bar{z}^o) + Bg \psi_1^o(z^o, \bar{z}^o) + \mathcal{O}(Bg^2)], \\ p(z, \bar{z}) &= \frac{\eta V_2}{R_2} [p_0^o(z^o, \bar{z}^o) + Bg p_1^o(z^o, \bar{z}^o) + \mathcal{O}(Bg^2)]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Propoziția 2.28 Sistemul ecuațiilor de echilibru corespunzător primelor două aproximații în Bg este de forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(p_0^o + iR_2^2 \Delta \psi_0^o) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(p_1^o + iR_2^2 \Delta \psi_1^o) &= -i \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\frac{\partial^2 \psi_0^o}{\partial \bar{z}^2}}{\left| \frac{\partial^2 \psi_0^o}{\partial \bar{z}^2} \right|} \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Propoziția 2.29 Funcțiile lui Stokes ψ_0^o și ψ_1^o sunt soluții ale ecuațiilor biarmonice de forma

$$\Delta \Delta \psi_0^o(x_1, x_2) = 0, \quad (2.54)$$

$$\Delta \Delta \psi_1^o(x_1, x_2) = -\frac{2}{R_2^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\frac{\partial^2 \psi_0^o}{\partial \bar{z}^2}}{\left| \frac{\partial^2 \psi_0^o}{\partial \bar{z}^2} \right|} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \left(\frac{\frac{\partial^2 \psi_0^o}{\partial \bar{z}^2}}{\left| \frac{\partial^2 \psi_0^o}{\partial \bar{z}^2} \right|} \right) \right]. \quad (2.55)$$

Observația 2.6 Utilizarea funcțiilor complexe în probleme plane, deschide posibilitatea folosirii metodei transformărilor conforme în rezolvarea problemelor de prelucrare a metalelor.

2.4 Exemple numerice

În problema laminării simetrice a benzilor metalice se studiază modul în care parametrii mecanici și geometrici influențează distribuția tensiunii normale și tangențiale pe suprafața de contact $P_1 P_2$. Depășirea presiunii specifice de lucru poate determina deformări degradate.

Banda metalică supusă laminării are semigrosimea la intrare $R_1 = 1.5\text{mm}$. Valorile parametrilor geometrici și mecanici diferă de la caz la caz. Simulările s-au realizat folosind o serie de programe dezvoltate în limbajul MATLAB.

Cazul a: Influența parametrilor geometrici

• **Influența razei rolei** în procesul de laminare este ilustrată considerând valori diferite ale lui θ_0 pentru o reducere de 5% a benzii în care $\mu = 0.12$, $Bg = 0.7$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$.

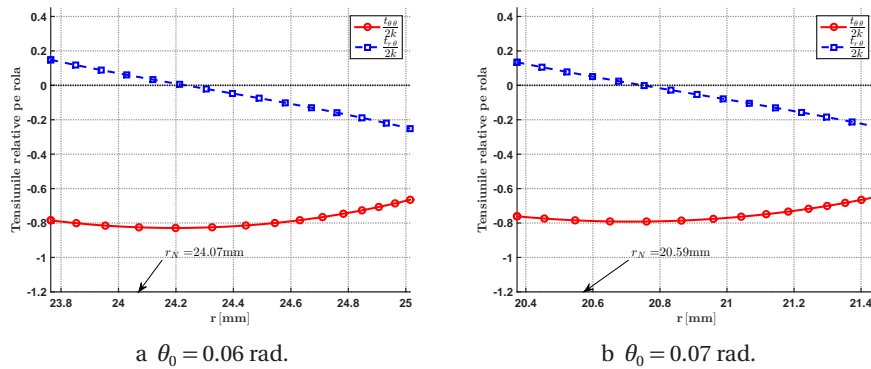


Figura 2.1: Distribuția tensiunilor pe suprafața de contact (5% - reducere)

În Figurile 2.1a și 2.1b, se observă că tensiunea relativă normală $t_{\theta\theta}(r, \theta_0)$ este o curbă nedată. Valoarea maximă a $|t_{\theta\theta}(r, \theta_0)|$ este situată în vecinătatea punctului neutral r_N . Tensiunea tangențială $t_{r\theta}(r, \theta_0)$ trece de la valori negative la valori pozitive în zona punctului neutral.

• **Influența reducerii grosimii** $r\%$ a benzii laminate este studiată prin considerarea unor cazuri de reducere în care $\theta_0 = 0.1$ rad., $\mu = 0.12$, $Bg = 0.7$, $X_1 = X_2 = 0$.

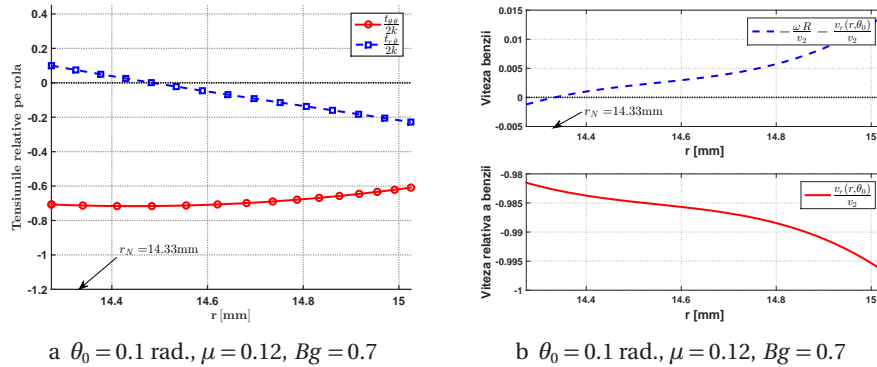


Figura 2.2: (a) Distribuția tensiunilor și (b) a vitezelor pe suprafața de contact (5% - reducere)

Odată cu creșterea reducerii, cresc și valorile absolute ale tensiunii normale $t_{\theta\theta}(r, \theta_0)$ calculate pe suprafața de contact. În Figura 2.2b se observă că viteza benzii care se laminează crește gradual pe suprafața $P_1 P_2$ de la intrare spre ieșire. Viteza relativă a benzii descrește de la intrare spre punctul de ieșire, anulându-se în punctul neutral.

b) Influența parametrilor mecanici: coeficientul de frecare μ , viteza de lucru V_2 și forța frontală X_2

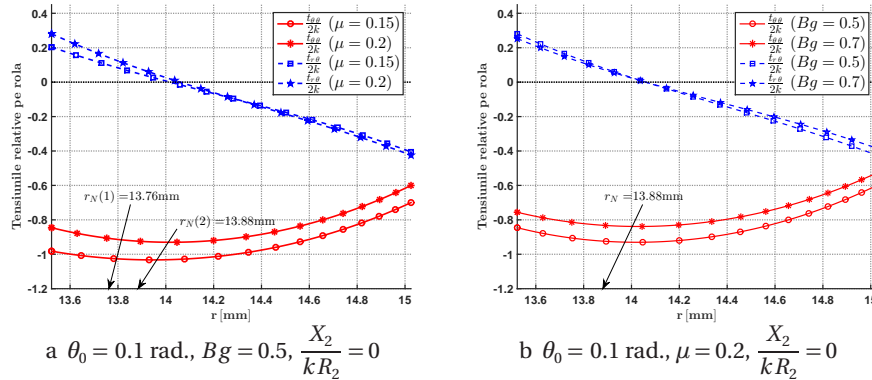


Figura 2.4: Distribuția tensiunilor pe suprafața de contact când (a) μ variază, (b) Bg variază

Se consideră o reducere a benzii de 10% pentru un unghi de apucare $\theta_0 = 0.1$ radiani și $X_1 = 0$. În Figurile 2.4 (a, b, c) este ilustrată variația distribuției tensiunilor pe arcul de contact $P_1 P_2$. Sunt puse în evidență diferențele între valorile de tensiune care se obțin prin variația pe rând a coeficientului de frecare μ (vezi Figura 2.4a), a vitezei de lucru V_2 la ieșire (vezi Figura 2.4b) și a acțiunii forței frontale X_2 (vezi Figura 2.4c).

Observația 2.9 În exemplele numerice de mai sus, s-au folosit valori ale coeficientului de frecare μ cuprinse între valorile numerice ale lui $\operatorname{tg} \theta_0$ și $\operatorname{tg} 2\theta_0$. Astfel, observația 2.3 privind extinderea

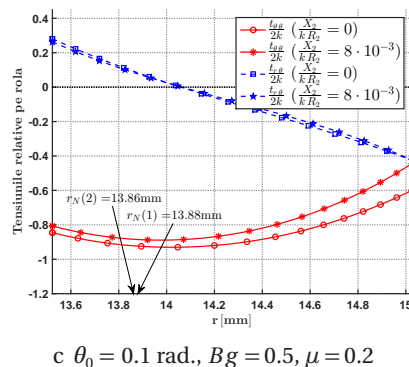


Figura 2.4: Distribuția tensiunilor pe suprafața de contact când (c) $\frac{X_2}{kR_2}$ variază

condiției ingineresti pentru valori ale coeficientului de frecare $\mu > \text{tg}\theta_0$ este pusă în evidență și folosind date numerice.

2.5 Concluzii

- Modelul analitic prezentat în acest capitol permite determinarea câmpurilor locale de tensiune, viteză și al vitezele de deformare care iau naștere în timpul desfășurării procesului de laminare a benzilor metalice;

- Dezvoltările asimptotice (2.4) pentru funcția lui Stokes $\psi(r^o, \theta)$ și funcția de presiune $p(r^o, \theta)$ s-au introdus în ecuațiile de echilibru (2.5). S-au obținut două sisteme de ecuații care corespund primelor două aproximații în Bg ;

- **Aproximația de ordinul zero în Bg :**

- Funcția lui Stokes s-a presupus de forma $\psi^o(r^o, \theta) = f_0(\theta) + \frac{r}{R_2} f_1(\theta)$, unde expresiile funcțiilor $f_0(\theta)$ și $f_1(\theta)$ sunt necunoscute;

- S-au dedus componentele t_{rr}^v , $t_{\theta\theta}^v$ și $t_{r\theta}^v$ ale tensorului de tensiune al lui Cauchy exprimate prin relațiile (2.13);

- În Propozitia 2.10, folosind condițiile cinematice și la limită satisfăcute pe $\partial\mathcal{P}_3$, s-au dedus ecuațiile (2.19)–(2.25) care formează un sistem algebric neliniar de șapte ecuații cu șapte necunoscute a_0 , b_0 , a_1 , b_1 , f , r_N și ω ;

- **Aproximația de ordinul întâi în Bg :**

- Funcția lui Stokes s-a presupus de forma $\psi_1^o(r^o, \theta) = \sum_{n=2}^5 \left(\frac{r}{R_2}\right)^n F_n(\theta)$, unde expresiile funcțiilor $F_n(\theta)$, $n = \overline{2, 5}$, sunt necunoscute;

- Componentele t_{rr}^p , $t_{\theta\theta}^p$ și $t_{r\theta}^p$ ale tensorului de tensiune al lui Cauchy au fost rescrise sub forma (2.37)–(2.39);

- În Propozitia 2.21, în baza condițiilor cinematice și la limită satisfăcute pe $\partial\mathcal{P}_3$, s-au dedus ecuațiile (2.45)–(2.50) care formează un sistem algebric liniar de nouă ecuații cu nouă necunoscute A_2 , B_2 , A_3 , B_3 , A_4 , B_4 , A_5 , B_5 , F .

- S-au introdus variabilele complexe conjugate (z, \bar{z}) și s-a rescris sistemul ecuațiilor de echilibru, unde funcțiile necunoscute sunt $p = p(z, \bar{z})$ și $\psi = \psi(z, \bar{z})$;

- Din graficele realizate se remarcă faptul că distribuția tensiunii relative normale $t_{\theta\theta}(r, \theta_0)/(2k)$ pe suprafața de contact P_1P_2 este o curbă netedă care are o valoare maximă în vecinătatea punctului neutral N . Tensiunea relativă tangențială $t_{r\theta}(r, \theta_0)/(2k)$ trece de la valori negative la valori pozitive în zona punctului neutral.

Capitolul 3

Aspecte privind geometria domeniului de deformare

Rezultatele prezentate în acest capitol au la bază articolele „*Mathematical approach of the flat rolling problem and new aspects concerning the geometry of the deformation zone*“ (Barbu și Șandru [3]) și „*High-speed viscoplastic flow through inclined planes with applications to flat rolling and strip drawing*“ (Barbu și Șandru [4]).

Aplicând principiul de bilanț al masei pe o suprafață de discontinuitate, sunt deduse ecuațiile curbelor asociate suprafețelor \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 . Astfel, este reprezentată geometria domeniului de deformare \mathcal{P}_3 în diferite condiții de laminare. În paragraful al treilea al acestui capitol sunt investigate două cazuri „limită“ ale problemei laminării benzilor.

3.1 Ecuațiile curbelor asociate suprafețelor de discontinuitate \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2

Propoziția 3.2 *Ecuațiile în coordonate polare ale curbelor asociate suprafețelor de discontinuitate \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 sunt exprimate prin relațiile*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1: \quad r_1(\theta)V_1 \sin \theta + \psi(r_1(\theta), \theta) &= 0, \\ \mathcal{S}_2: \quad r_2(\theta)V_2 \sin \theta + \psi(r_2(\theta), \theta) &= 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

unde $\psi(r, \theta)$ este funcția lui Stokes, iar V_1 și V_2 reprezintă viteza benzii la intrare, respectiv la ieșirea din zona de deformare \mathcal{P}_3 .

3.2 Exemple numerice

Banda metalică supusă acțiunii de laminare are semigrosimea la intrare $R_1 = 1.5\text{mm}$. Sunt prezentate două situații în care reducția relativă a benzii este de 10%, respectiv 20%.

a) Geometria domeniului de deformare vâscoplastică în cazul reducției de 10%

Se consideră raza rolei $R = 25\text{mm}$.

În Figurile 3.1a și 3.1b se observă că \mathcal{S}_1 este o curbă convexă, a cărei curbura depinde de valorile considerate pentru μ și V_2 . Suprafața de discontinuitate \mathcal{S}_2 (la ieșire) își schimbă convexitatea în funcție de cazul considerat. De exemplu, pentru $\mu = 0.06$ \mathcal{S}_2 este convexă, în timp ce pentru $\mu = 0.1$ \mathcal{S}_2 este concavă (vezi Figura 3.1a).

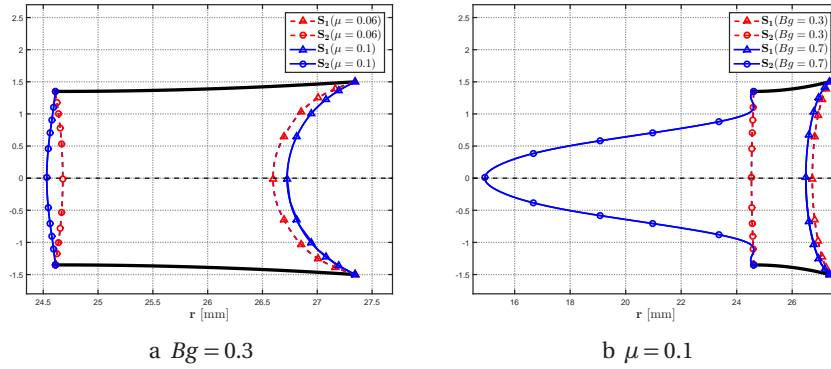


Figura 3.1: Zona de deformare pentru 10% reducere când (a) μ variază și V_2 este fix; (b) V_2 variază și μ este fix.

a) Geometria domeniului de deformare vâscoplastică în cazul reducerii de 20%

Se consideră raza rolei $R = 16\text{mm}$.

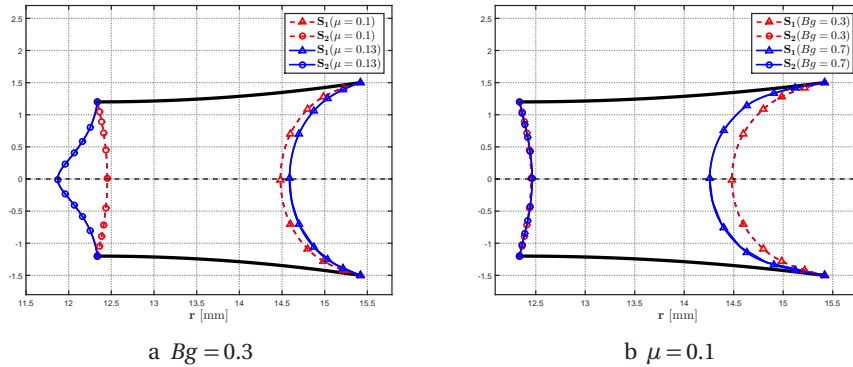


Figura 3.2: Zona de deformare pentru 20% reducere când (a) μ variază și V_2 este fix; (b) V_2 variază și μ este fix.

În Figurile 3.2a și 3.2b \mathcal{S}_1 este o curbă convexă, având curbura influențată de valoarea coeficientului de frecare μ sau a vitezei de lucru V_2 . În Figura 3.2a se remarcă faptul că \mathcal{S}_2 este concavă pentru $\mu = 0.1$, respectiv concav-convexă în situația $\mu = 0.13$. În Figura 3.2b se observă că în ambele situații considerate pentru valori diferite ale lui V_2 , \mathcal{S}_2 rămâne o curbă concavă.

3.3 Cazuri „limită“ în problema laminării benzilor

Există două situații „limită“ în care N poate coincide fie cu punctul de intrare P_1 , fie cu cel de la ieșire P_2 . Primul caz ($r_N = r_1$) corespunde **problemei de prelucrare a benzilor prin tragere**, în timp ce situația a doua ($r_N = r_2$) o vom numi **problema laminării „fără“ punct neutral**.

Observația 3.1 În ambele situații, $r_N = r_1$ sau $r_N = r_2$, soluția locală a problemei se obține considerând funcția lui Stokes corespunzătoare primelor două aproximații în Bg , de forma

$$\begin{aligned} \psi_0^o(\theta) &= f_0(\theta), \\ \psi_1^o(r^o, \theta) &= F_2(\theta) \left(\frac{r}{R_2} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

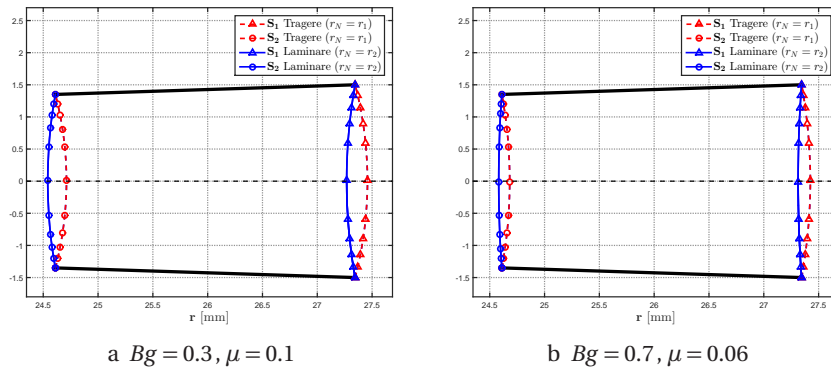


Figura 3.5: Comparatie între geometria domeniului de deformare în problema tragerii și a laminării benzilor „fără” punct neutral

În Figurile 3.5a și 3.5b este ilustrat domeniul de deformare \mathcal{P}_3 pentru valori diferite ale coeficientului de frecare μ și ale vitezei de lucru V_2 . Se observă că în cazul problemei tragerii benzilor, suprafețele de discontinuitate \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 sunt ambele concave în raport cu axa Ox_1 . În situația laminării benzilor „fără” punct neutral, atât \mathcal{S}_1 , cât și \mathcal{S}_2 au o formă convexă.

3.4 Concluzii

- Rezultatele teoretice din acest capitol permit determinarea ecuațiilor curbelor asociate suprafețelor de discontinuitate \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 care mărginesc lateral, la intrare și la ieșire, domeniul de deformare vâscoelastică \mathcal{P}_3 ;
- În Propoziția 3.2 au fost deduse ecuațiile curbelor asociate suprafețelor \mathcal{S}_j , $j = \overline{1,2}$, aplicând principiul de bilanț al masei și folosind rezultatele privind fluxul vitezei printr-o suprafață (curbă) $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_3$;
- Exemplele numerice prezentate în paragraful 3.2 pun în evidență faptul că geometria domeniului de deformare \mathcal{P}_3 este variabilă, fiind influențată semnificativ de valorile coeficientului de frecare μ și ale vitezei de lucru la ieșire V_2 .
- Cazurile „limită” în problema laminării benzilor ilustrate în Figura 3.5, indică faptul că metodele globale în care soluția problemei se determină pornind de la prescrierea unui câmp de viteze cinematic admisibil sunt aplicabile în problema tragerii benzilor, dar sunt inadecvate în rezolvarea problemei laminării benzilor.

Capitolul 4

Influența inerției în problema laminării benzilor

În ipoteza că $Bg < 1$ și $Re < 1$, adimitem că funcția de curent a lui Stokes $\psi(r, \theta)$ și funcția de presiune $p(r, \theta)$ se dezvoltă în serie de puteri după Bg și Re , astfel încât avem relațiile:

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta) &= R_2 V_2 \left[\psi_0^o(r^o, \theta) + Bg \psi_1^o(r^o, \theta) + Re \psi_2^o(r^o, \theta) + \mathcal{O}(Bg^2, Re^2, Bg Re,) \right], \\ p(r, \theta) &= \frac{\eta V_2}{R_2} \left[p_0^o(r^o, \theta) + Bg p_1^o(r^o, \theta) + Re p_2^o(r^o, \theta) + \mathcal{O}(Bg^2, Re^2, Bg Re,) \right],\end{aligned}\quad (4.1)$$

unde $Bg = \frac{k R_2}{\eta V_2}$ și $Re = \frac{\rho V_2 R_2}{\eta}$.

4.1 Ecuțiile de mișcare și condițiile la limită

Problema 3 În domeniul de deformare \mathcal{P}_3 reprezentat în Figura 1.1, să se determine câmpul de viteze \mathbf{v} , câmpul de tensiuni \mathfrak{t} și poziția punctului neutral N , astfel încât să fie satisfăcute ecuațiile:

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathfrak{t}^T, \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (4.3)$$

$$\mathfrak{t} = -p \mathbb{1} + \left(2\eta + \frac{k}{\sqrt{\mathbf{II}_{\mathfrak{d}}}} \right) \mathfrak{d}, \text{ pentru } \mathbf{II}_{\mathfrak{d}} \neq 0, \quad (4.4)$$

și îndeplinite următoarele condiții pe frontiera $\partial \mathcal{P}_3$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{pe } P_1 P_2, P'_1 P'_2, \quad (4.5)$$

$$|\mathbf{T}| = \mu |\mathbf{N}| \quad \text{pe } P_1 P_2, P'_1 P'_2, \quad (4.6)$$

$$\rho v_n[\mathbf{v}] - [\mathfrak{t}] \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \mathcal{S}_j, j = \overline{1, 2}, \quad (4.7)$$

în următoarele ipoteze de lucru

- $\exists N \in [P_1 P_2]$ astfel încât $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\omega R$ în punctul N ;
- Valorile rezultatelor $\mathbf{R}_j = \int_{\mathcal{S}_j} (\mathfrak{t} \mathbf{n} - \rho v_n[\mathbf{v}]) ds$, unde $j = \overline{1, 2}$, sunt precizate;
- $V_1 R_1 = V_2 R_2$ (legea globală de conservare a masei).

4.2 Aproximația inerțială în raport cu parametrul Re

Ipoteză: Se presupune că în aproximația în raport cu parametrul Re , funcția de curent a lui Stokes $\psi_2^o(r^o, \theta)$ este de forma

$$\psi_2^o(r^o, \theta) = \sum_{n=0}^2 \left(\frac{r}{R_2} \right)^n G_n(\theta), \quad (4.8)$$

unde $G_0(\theta)$, $G_1(\theta)$ și $G_2(\theta)$ sunt funcții necunoscute ale căror expresii vor fi determinate din ecuațiile de mișcare și condițiile la limită ale problemei.

În descrierea procesului de deformare din \mathcal{D}_3 , se folosește notația cu indice superior „ i ” pentru componentele vitezei și ale tensorilor care exprimă influența inerției în procesul de laminare a benzilor.

Propoziția 4.2 Considerând reprezentarea funcției de curent $\psi_2^o(r^o, \theta)$ de forma (4.8), sistemul ecuațiilor de mișcare corespunzător aproximației în Re este reformulat după cum urmează

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p_2^o}{\partial r} + \sum_{n=0}^2 \frac{r^{n-3}}{R_2^{n-2}} [G_n'''(\theta) + n^2 G_n'(\theta)] &= -\frac{R_2^2}{r^3} f_0'(\theta)^2 - \frac{R_2}{r^2} [f_0'(\theta) f_1'(\theta) + f_1(\theta) f_0''(\theta)] \\ &\quad - \frac{1}{r} f_1(\theta) [f_1(\theta) + f_1''(\theta)], \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial p_2^o}{\partial \theta} + \sum_{n=0}^2 (n-2) \left(\frac{r}{R_2} \right)^{n-2} [G_n''(\theta) + n^2 G_n(\theta)] = \frac{R_2}{r} f_0'(\theta) f_1(\theta).$$

Propoziția 4.3 Expresiile funcțiilor necunoscute $G_0(\theta)$, $G_1(\theta)$ și $G_2(\theta)$ care sunt introduse prin funcția de curent $\psi_2^o(r^o, \theta)$, sunt soluții ale următoarelor ecuații diferențiale

$$G_0^{IV}(\theta) + 4G_0''(\theta) = -2f_0'(\theta)f_0''(\theta), \quad (4.10)$$

$$G_1^{IV}(\theta) + 2G_0''(\theta) + G_1(\theta) = -2f_1'(\theta)f_0''(\theta) - f_0'(\theta)f_1''(\theta) - f_1(\theta)[f_0'(\theta) + f_0'''(\theta)], \quad (4.11)$$

$$G_2^{IV}(\theta) + 4G_2''(\theta) = -f_1'(\theta)f_1''(\theta) - f_1(\theta)[2f_1'(\theta) + f_1'''(\theta)]. \quad (4.12)$$

Propoziția 4.5 Expresia funcției de presiune $p_2^o(r^o, \theta)$ din aproximația în Re este dată de relația

$$\begin{aligned} p_2^o(r^o, \theta) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{r} \right)^2 [G_0'''(\theta) + f_0'(\theta)^2] - \frac{R_2}{r} [G_1'''(\theta) + G_1'(\theta) + f_0'(\theta)f_1'(\theta) + f_1(\theta)f_0''(\theta)] \\ &\quad + \ln \frac{r}{R_2} [G_2'''(\theta) + 4G_2'(\theta) + f_1(\theta)^2 + f_1(\theta)f_1''(\theta)] + G, \end{aligned} \quad (4.13)$$

unde G este o constantă și $G_n(\theta)$, $n = \overline{0, 2}$, sunt funcțiile din expresia (4.8) pentru $\psi_2^o(r^o, \theta)$.

Propoziția 4.6 *Expresiile componentele tensorului de tensiune al lui Cauchy din aproximația inerțială în Re sunt de forma*

$$\begin{aligned} \frac{t_{rr}^i(r, \theta)}{k} = \frac{Re}{Bg} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{r} \right)^2 \left[G_0'''(\theta) - 4G_0'(\theta) + f_0'(\theta)^2 \right] + \frac{R_2}{r} \left[G_1'''(\theta) + G_1'(\theta) + f_0'(\theta)f_1'(\theta) + f_1(\theta)f_0''(\theta) \right] \right. \\ \left. - \ln \frac{r}{R_2} \left[G_2'''(\theta) + 4G_2'(\theta) + f_1(\theta)^2 + f_1(\theta)f_1''(\theta) \right] + 2G_2'(\theta) - G \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{t_{\theta\theta}^i(r, \theta)}{k} = \frac{Re}{Bg} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{r} \right)^2 \left[G_0'''(\theta) + 4G_0'(\theta) + f_0'(\theta)^2 \right] + \frac{R_2}{r} \left[G_1'''(\theta) + G_1'(\theta) + f_0'(\theta)f_1'(\theta) + f_1(\theta)f_0''(\theta) \right] \right. \\ \left. - \ln \frac{r}{R_2} \left[G_2'''(\theta) + 4G_2'(\theta) + f_1(\theta)^2 + f_1(\theta)f_1''(\theta) \right] - 2G_2'(\theta) - G \right\}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\frac{t_{r\theta}^i(r, \theta)}{k} = \frac{Re}{Bg} \left\{ \left(\frac{R_2}{r} \right)^2 G_0''(\theta) + \frac{R_2}{r} \left[G_1''(\theta) + G_1(\theta) \right] + G_2''(\theta) \right\}. \quad (4.16)$$

Observația 4.1 *În expresiile componentelor tensorului lui Cauchy (4.14)–(4.16) se remarcă prezența raportului adimensional $\frac{Re}{Bg} = \frac{\rho V_2^2}{k}$. În literatura de specialitate, raportul $\frac{Bg}{Re}$ $\stackrel{not.}{=}$ Eu se numește numărul adimensional al lui Euler.*

Propoziția 4.7 *În aproximația în raport cu parametrul Re, expresiile rezultatelor tensiunilor tangențiale care acționează pe suprafața de contact P_1P_2 se determină folosind relațiile*

$$\frac{T_1^i}{kR_2} = \frac{Re}{Bg} \left\{ - \left(\frac{R_2}{r_1} - \frac{R_2}{r_N} \right) G_0''(\theta) + \ln \frac{r_1}{r_N} \left[G_1''(\theta) + G_1(\theta) \right] + G_2''(\theta) \frac{r_1 - r_N}{R_2} \right\}. \quad (4.17)$$

$\frac{T_2^i}{kR_2}$ se determină similar.

Rezultatele tensiunilor normale se exprimă prin

$$\begin{aligned} \frac{N_1^i}{kR_2} = \frac{Re}{Bg} \left\{ - \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{r_1} - \frac{R_2}{r_N} \right) \left[G_0'''(\theta) + 4G_0'(\theta) + f_0'(\theta)^2 \right] \right. \\ \left. + \ln \frac{r_1}{r_N} \left[G_1'''(\theta) + G_1'(\theta) + f_0'(\theta)f_1'(\theta) + f_1(\theta)f_0''(\theta) \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{r_1}{R_2} \left(\ln \frac{r_1}{R_2} - 1 \right) - \frac{r_N}{R_2} \left(\ln \frac{r_N}{R_2} - 1 \right) \right] \left[G_2'''(\theta) + 4G_2'(\theta) + f_1(\theta)^2 + f_1(\theta)f_1''(\theta) \right] \right. \\ \left. - \frac{r_1 - r_N}{R_2} \left[2G_2'(\theta) + G \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

$\frac{N_2^i}{kR_2}$ se determină similar.

Propoziția 4.10 În aproximația în raport cu parametrul Re , expresia contraforței X_1^i care acționează pe suprafața de discontinuitate \mathcal{S}_1 este dată de relația

$$\begin{aligned} \frac{X_1^i}{2kR_2} = & \frac{Re}{Bg} \left\{ \left[\frac{R_2}{r_1} G_0''(\theta_0) - \frac{r_1}{R_2} (G_2''(\theta_0) + f_1(\theta_0)f_1'(\theta_0)) \right] \cos \theta_0 \right. \\ & - \left[\frac{R_2}{2r_1} (G_0'''(\theta_0) + 4G_0'(\theta_0) + f_0'(\theta_0)^2) + \frac{r_1}{R_2} \ln \frac{r_1}{R_2} (G_2'''(\theta_0) + 4G_2'(\theta_0) + f_1(\theta_0)^2 + f_1(\theta_0)f_1''(\theta_0)) \right. \\ & \left. \left. - \frac{r_1}{R_2} (G_2'''(\theta_0) + 2G_2'(\theta_0) + f_1(\theta_0)f_1''(\theta_0) - G) \right] \sin \theta_0 - f_1(\theta_0) \frac{V_1}{V_2} \frac{r_1}{R_2} + \varphi_1(\theta_0) \right\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

unde $\varphi_1(\theta) = [G_1''(\theta_0) + G_1(\theta_0) + f_0'(\theta)f_1(\theta)] \cos \theta - f_0(\theta) \frac{V_1}{V_2} - 2\chi(\theta)$ și $\chi(\theta) = \int f_0'(\theta)f_1'(\theta) \cos \theta d\theta$.

Propoziția 4.11 În aproximația în raport cu parametrul Re , expresia forței frontale X_2^i care acționează pe suprafața de discontinuitate \mathcal{S}_2 se determină prin relația

$$\begin{aligned} \frac{X_2^i}{2kR_2} = & -\frac{Re}{Bg} \left\{ \left[\frac{R_2}{r_2} G_0''(\theta_0) - \frac{r_2}{R_2} (G_2''(\theta_0) + f_1(\theta_0)f_1'(\theta_0)) \right] \cos \theta_0 \right. \\ & - \left[\frac{R_2}{2r_2} (G_0'''(\theta_0) + 4G_0'(\theta_0) + f_0'(\theta_0)^2) + \frac{r_2}{R_2} \ln \frac{r_2}{R_2} (G_2'''(\theta_0) + 4G_2'(\theta_0) + f_1(\theta_0)^2 + f_1(\theta_0)f_1''(\theta_0)) \right. \\ & \left. \left. - \frac{r_2}{R_2} (G_2'''(\theta_0) + 2G_2'(\theta_0) + f_1(\theta_0)f_1''(\theta_0) - G) \right] \sin \theta_0 - f_1(\theta_0) \frac{r_2}{R_2} + \varphi_2(\theta_0) \right\}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

unde $\varphi_2(\theta) = [G_1''(\theta_0) + G_1(\theta_0) + f_0'(\theta)f_1(\theta)] \cos \theta - f_0(\theta) - 2\chi(\theta)$ și $\chi(\theta) = \int f_0'(\theta)f_1'(\theta) \cos \theta d\theta$.

Propoziția 4.12 În problema laminării benzilor simetrice, constantele necunoscute corespunzătoare aproximației în Re sunt:

- $C_0, D_0, C_1, D_1, C_2, D_2$ și G , care intervin prin expresiile funcțiilor $\psi_2^o(r^o, \theta)$ și $p_2^o(r^o, \theta)$.

Condițiile cinematice și la limită satisfăcute pe $\partial \mathcal{P}_3$ conduc la un sistem algebric liniar de șapte ecuații, de forma

$$G_n(\theta_0) = 0 \quad n = \overline{0, 2}, \quad (4.21)$$

$$T_1^i - \mu N_1^i = 0, \quad (4.22)$$

$$T_2^i + \mu N_2^i = 0, \quad (4.23)$$

$$X_1^i = 0, \quad (4.24)$$

$$X_2^i = 0, \quad (4.25)$$

unde funcțiile $G_n(\theta)$, $n = \overline{0, 2}$, se determină prin (4.10)–(4.12), rezultantele tangențiale și normale $T_1^i, T_2^i, N_1^i, N_2^i$ se calculează folosind (4.17)–(4.18), X_1^i și X_2^i sunt date prin (4.19) și (4.20).

4.3 Sistemul ecuațiilor de mișcare în coordonate complexe

Propoziția 4.15 Sistemul ecuațiilor de mișcare corespunzător aproximației de ordinul întâi în Re , se exprimă prin relația

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(p_2^o + iR_2^2 \Delta \psi_2^o) = -2R_2^2 \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \psi_0^o}{\partial z} \frac{\partial \psi_0^o}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi_0^o}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right]. \quad (4.26)$$

Observație: Din sistemul de ecuații (4.26) rezultă ecuația biarmonică de forma

$$\Delta \Delta \psi_2^o = -4i \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \psi_0^o}{\partial \bar{z}} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \left(\frac{\partial \psi_0^o}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (4.27)$$

4.4 Exemple numerice

Pentru $R_1 = 1.5\text{mm}$, $R = 16\text{mm}$, $\mu = 0.13$ și V_2 astfel încât avem $Bg = 0.3$, sunt ilustrate grafice comparative ale distribuției tensiunilor tangențiale și normale pe suprafața de contact, atunci când se consideră sau nu se consideră efectele datorate vitezei de lucru.

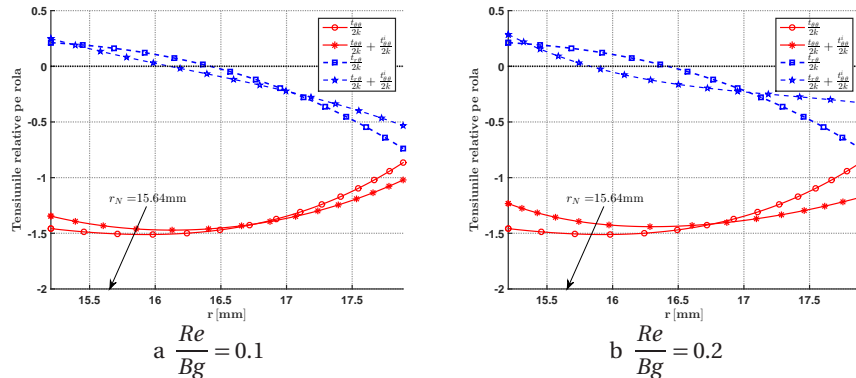


Figura 4.3: Distribuția tensiunilor pe suprafața de contact (15% - reducție)

În Figura 4.3, reducția relativă a benzii este de 15%. Se observă că pentru $Re/Bg = 0.2$, influența vitezei de lucru V_2 devine mai pronunțată.

4.5 Concluzii

- Presupunând că $Bg < 1$ și $Re < 1$, s-a introdus metoda dezvoltărilor asimptotice (4.1) în serie de puteri după Bg și Re pentru funcțiile necunoscute $\psi(r^o, \theta)$ și $p(r^o, \theta)$;
- Funcția lui Stokes s-a considerat de forma $\psi_2^o(r^o, \theta) = \sum_{n=0}^2 \left(\frac{r}{R_2} \right)^n G_n(\theta)$, unde expresiile funcțiilor $G_0(\theta)$, $G_1(\theta)$ și $G_2(\theta)$ sunt necunoscute;
- Din condițiile cinematice și la limită satisfăcute pe $\partial \mathcal{P}_3$ s-au dedus ecuațiile (4.21)–(4.25) care formează un sistem de șapte ecuații cu șapte necunoscute C_0 , D_0 , C_1 , D_1 , C_2 , D_2 și G ;
- Sunt studiate efectele inerțiale din problema laminării benzilor considerând valori numerice diferite ale raportului adimensional Re/Bg . Cu cât valoarea acestui raport crește, cu atât influența inerției este mai pronunțată, fapt remarcat și de alți autori (Tiros și Iddan [19]).

Capitolul 5

Concluzii și perspective

Folosind principiile mecanicii mediilor continue deformabile, în această teză a fost elaborat un model matematic care permite o analiză completă a întregului proces de prelucrare a benzilor metalice supuse acțiunii de deformare prin laminare.

Concluziile principale ale modelului sunt următoarele:

- În studiul deformării unui material vâscoplastic modelat printr-o lege constitutivă de tip Bingham s-a obținut o soluție locală în problema laminării benzilor prin aplicarea metodei dezvoltării asimptotice (metoda perturbațiilor) după unul sau doi parametri adimensionali subunitari: Bg – numărul lui Bingham și Re – numărul lui Reynolds;
- S-a determinat poziția punctului neutral N care se obține rezolvând sistemul de ecuații în care s-au utilizat condițiile cinematice și la frontieră aplicate pe $\partial \mathcal{P}_3$;
- S-au dedus ecuațiile curbelor asociate suprafețelor de discontinuitate \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 , a căror formă nu este apriori impusă;
- S-au analizat două cazuri limită ale problemei laminării în care punctul neutral se situează la unul din cele două capete ale suprafeței de contact dintre rolă și material;
- S-a stabilit influența termenului inerțial pornind de la presupunerea că ambii parametri adimensionali sunt subunitari ($Bg < 1$ și $Re < 1$);
- S-au prezentat două variante de abordare matematică a problemei: fie pornind de la ecuațiile guvernante formulate în coordonate polare (r, θ) , fie utilizând variabilele complexe conjugate (z, \bar{z}) care permit folosirea metodei transformărilor conforme în problema plană a laminării benzilor;
- S-au obținut formulele precise de calcul pentru forța și momentul rezultat care acționează asupra rolei;
- S-a verificat condiția de echilibru global al forțelor care acționează asupra lui $\partial \mathcal{P}_3$ și astfel s-a demonstrat corectitudinea formulelor de calcul obținute pe parcursul tezei. Totodată, s-a dedus o limitare inferioară a coeficientului de frecare ($\mu \geq \operatorname{tg} \theta_0$) care extinde condiția empirică din literatura inginerescă $\mu \geq \operatorname{tg} 2\theta_0$.

Calcululele numerice prezentate în această teză permit reprezentări grafice din care decurg următoarele concluzii:

- Curba de variație a tensiunii relative normale $t_{\theta\theta}(r, \theta_0)/(2k)$ pe suprafața de contact dintre rolă și material are o distribuție netedă;
- Se observă că presiunea relativă a materialului pe rolă prezintă un maxim în vecinătatea punctului neutral. În unele modele (Orowan [14]) obținute pe baza unor scheme simplificatoare ingineresti, curba de variație a presiunii materialului pe rolă prezintă un punct unghiular, fapt neconform cu datele obținute experimental (Siebel și Lueg [18]). În plus, în aceste modele poziția punctului neutral este prescrisă și suprafețele de discontinuitate sunt considerate fixe, fiind approximate cu cercuri sau plane perpendiculare pe direcția de laminare;

- Se analizează influența parametrilor geometrici (θ_0 – semiunghiul de apucare, $r\%$ – reducția relativă a benzii) și a celor mecanici (μ – coeficientul de frecare, V_2 – viteza de lucru, X_2 – forța frontală) în problema laminării simetrice a benzilor metalice;
- Se constată totodată sensibilitatea procesului de laminare la variațiile parametrilor geometrico – mecanici, ceea ce impune o atentă selectare a acestora. Modelul încetează să furnizeze rezultate realiste îndată ce se impun valori inadecvate parametrilor geometrico-mecanici, fie prin inexistența punctului neutral pe arcul de contact, fie prin apariția unor tensiuni normale de întindere pe arcul de contact;
- Prin trasarea suprafețelor de discontinuitate \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 se remarcă faptul că geometria domeniului de deformare este variabilă, depinzând de valorile parametrilor mecanici care sunt considerate în modelarea procesului de laminare;
- Se constată că în cazurile „limită“ ale poziției punctului neutral avem următoarele: în problema tragerii benzilor \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 sunt ambele concave, pe când în problema laminării „fără“ punct neutral rezultă curba \mathcal{S}_1 convexă, \mathcal{S}_2 putând fi atât convexă, cât și concavă, variind în funcție de parametrii mecanici considerați în simulările numerice;
- Se remarcă faptul că influența inerției în problema laminării benzilor este caracterizată prin valoarea raportului adimensional Re/Bg . Graficele comparative (cu și fără termenul inerțial) realizate pentru figurarea distribuției tensiunii relative normale și tangențiale pe rolă, pun în evidență faptul că efectele inerției se fac resimțite atunci când se lucrează cu valori relativ mari ale lui V_2 .

Rezultatele originale din Capitolele 2 și 3 au fost publicate în două articole, iar rezultatele din Capitolul 4 vor face obiectul unui articol în curs de elaborare.

Ca perspectivă, studiul inițiat în această teză de doctorat poate fi extins prin:

- Elaborarea unei analize calitative a modelului în situația în care se aplică reducții relativ mari ale benzii, de 30 – 45%;
- Compararea rezultatelor teoretice cu datele experimentale existente în literatură. Acest lucru este îngreunat de faptul că datele experimentale conțin prea puține informații de natură geometrică sau mecanică legate de efectuarea acestora;
- Determinarea unei soluții locale în cazul laminării asimetrice a benzilor metalice, atunci când rolele au raze, viteze de operare sau coeficienți de frecare diferiți.

Bibliografie

- [1] Avitzur, B: *Metal Forming: Processes and Analyses*. McGraw-Hill, New York (1968)
- [2] Barbu, C.D, Şandru, N.: *A rational analytical model of flat rolling problem*. Acta Mech. (2018) **229**(7), pp. 3069 – 3088. doi: 10.1007/s00707-018-2144-0
- [3] Barbu, C.D, Şandru, N.: *Mathematical approach of the flat rolling problem and new aspects concerning the geometry of the deformation zone*. Proceedings of the Romanian Academy - Series A, (2018) – accepted for publication
- [4] Barbu, C.D, Şandru, N.: *High-speed viscoplastic flow through inclined planes with applications to flat rolling and strip drawing*. Simpozionul Anual al Institutului de Mecanica Solidelor (SISOM), 24–25 mai 2018
- [5] Camenschi, G., Cristescu, N., Şandru, N.: *High speed wire drawing*. Arch. Mech. **31**(5), (1979)
- [6] Camenschi, G., Cristescu, N., Şandru, N.: *Developments in high speed visco-plastic flow through conical converging dies*. J. Appl. Mech. **50**, pp. 566–570 (1983)
- [7] Camenschi, G.: *Introducere în mecanica mediilor continue deformabile*. Ed. Univ., Bucureşti, (2000)
- [8] Camenschi, G., Şandru, N.: *Modele Matematice în Prelucrarea Metalelor*. Ed. Tech., Bucureşti, (2003)
- [9] Cleja-Ţigoiu, S., Cristescu, N.D.: *Teoria plasticităţii cu aplicaţii în prelucrarea metalelor*. Ed. Univ., Bucureşti, (1985)
- [10] Cristescu, N.D., Suliciu, I.: *Vâscoplasticitate*. Ed. Tech., Bucureşti, (1976)
- [11] Cristescu, N.D.: *Dynamic Plasticity*. World Scientific, Singapore, (2007)
- [12] Hinch, E.J.: *Perturbation methods*. Cambridge University Press (1991)
- [13] Lenard, J.G.: *Primer on Flat Rolling*, 2nd edn. Elsevier, Oxford, England (2014)
- [14] Orowan, E.: *The calculation of roll pressure in hot and cold flat rolling*. Proc. Mech. Eng. **150**, pp. 140–167 (1943)
- [15] Şandru, N., Camenschi, G.: *Viscoplastic flow through inclined planes with application to the strip drawing*. Lett. Appl. Eng. Sci. **17**, pp. 773–784, (1979)
- [16] Şandru, N., Camenschi, G.: *Dynamical aspects in wire drawing problem*. Lett. Appl. Eng. **18**, pp. 999–1007, (1980)
- [17] Şandru, N., Camenschi, G.: *Mathematical model of the tube drawing with floating plug*. Int. J. Eng. Sci. **26**(6), pp. 567–585 (1988)
- [18] Siebel, E., Lueg, W.: *Investigations into the distribution of pressure at the surface of the material in contact with the rolls*. Mitt. K. W. Inst. Eisenf. **15**, pp. 1–14 (1933)
- [19] Tirosh, J., Iddan, D.: *On the Limit Analysis of High Speed Forming Processes in Cold or Hot Conditions*. In: Brüller O.S., Mannl V., Najjar J. (eds) Advances in Continuum Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg (1991)
- [20] Van Dyke, M.D.: *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Academic Press, New York, London (1964)