Şcoala Doctorală de Matematică, Universitatea din Bucureşti

Teză de doctorat- Rezumat

Scheme generale de construcţie a noi clase de repartiţii statistice. Modele, inferenţă statistică şi analiza datelor

Student-doctorand: Băncescu V. Adriana-Irina

Profesor coordonator: Prof. Dr. Vasile Preda

2018

Cuprins

Cuprinsul tezei

Introducere

Într-o lume a tehnologiei, modelarea seturilor de date cât mai eficient este crucială. Date sunt disponibile şi apar în mai toate domeniile: medicină, industrie [47], biologie, ştiinţe sociale, economie etc. Prin urmare, este foarte important, pentru a efectua diferite teste şi predicţii (modele de regresie) sau chiar studii de fiabilitate, proceduri ce ţin de controlul calităţii [46] şi studii de mentenanţă, să ştim repartiţia datelor care ne interesează. De exemplu, pentru a putea efectua studii de fiabilitate pentru un sistem, avem nevoie de repartiţia timpilor de supravieţuire ale acelui sistem. În studii legate de controlul calităţii, avem nevoie de statisticile de ordine [7].

De-a lungul anilor, în statistică, cercetătorii au propus multe noi repartiţii având proprietăţi şi aplicaţii diverse, cât şi metode de construcţie a lor [45, 48]. În 1997, A. W. Marshall şi I. Olkin [103] au propus o nouă metodă de adăugare a unui nou parametru unei familii de repartiţii. Această metodă a fost aplicată la numeroase repartiţii, conducând la introducerea şi studiul a noi modele statistice: Marshall-Olkin Pareto (2005) [66], Marshall-Olkin Lomax (2007) [64], Marshall-Olkin Lindley (2012) [65], Marshall-Olkin Birnbaum Saunders (2013) [92], Marshall-Olkin Weibull (2014) [143]. Gupta et al. [68, 69] au introdus în 1999, repartiţia exponenţializată exponenţială, şi astfel s-a obţinut o nouă metodă de generalizare a repartiţiilor. Câteva dintre modelele statistice obţinute şi studiate aplicând metoda de exponenţializare sunt repartiţiile exponenţializată Gumbel (2005) [118, 119], exponenţializată Lomax (2014) [141], exponenţializată Fréchet (2000) [82], exponenţializată Burr Type II (2011) [11]. Mai recent, William T. Shaw şi Ian R.C. Buckley (2007) au introdus harta de transmutare (QRTM), obţinându-se, de exemplu, următoarele repartiţii transmutate: transmutată Rayleigh (2013) [109], transmutată modificată Weibull (2013) [81], transmutată Pareto (2014) [112], transmutată Lomax (2013) [14], transmutată exponenţializată general inversă exponenţială (2013) [52, 128], transmutată exponenţial-Weibull (2015) [140].

Instrumente importante în industrie, în telecomunicaţii, în studii legate de durata de viaţă, fiabilitatea sistemelor sau controlul calităţi, în diferite domenii precum asigurări, medicină, economie [99] şi nu numai, sunt statisticile de ordine. Aceste instrumente reprezintă o importantă subdisciplină a statisticii având multe aplicaţii într-o gamă variată de domenii [175]. Acestea se obţin considerând o secvenţă de variabile aleatoare $X_1, X_2, \cdots, X_m$ şi ordonându-le crescător, $X_{1:m} \leq X_{2:m} \leq \cdots X_{m:m}$, unde $X_{k:m}$ este statistica de ordine k şi reprezintă cea de-a k valoare aleatoare a secvenţei aleatoare considerată, în ordine crescătoare. Aplicaţii ale statisticilor de ordine îşi găsesc locul în designul şi analiza diferitelor sisteme de telecomunicaţii, datorită principiului "alegerea celui mai bun" [175]. Problema întâmpinată cu statisticile de ordine o reprezintă forma funcţiei de densitate care în cele mai multe cazuri are o formă complicată sau nu se poate obţine o formă explicită a ei. Datorită acestui lucru, când nu putem lucra direct cu funcţia de densitate a statisticilor de ordine, este necesar să determinăm repartiţiile asimptotice corespunzătoare. Câteva aplicaţii ale statisticilor de ordine extreme, minimală $X_{1:m}$ şi maximală $X_{m:m}$ sunt:

Exemplu 0.1. [39] Presiunile la care sunt supuse de-a lungul duratei de viaţă structurile diferitelor sisteme din industrie pot cauza daune iremediabile sau care presupun mari costuri de reparaţie. Încărcăturile de mică intensitate considerate în proiectarea sistemului pot duce la cedarea structurii în timpul vieţii cauzând deteriorări ale sistemului. În schimb, încărcăturile de mare intensitate conduc la structuri ineficiente din punct de vedere economic. Astfel, pentru proiectarea unei sistem corect şi eficient economic, avem nevoie să ştim proprietăţile statistice ale încărcăturilor de mare intensitate, reprezentate de statisticile de ordine maximale, $X_{m:m}$.

Exemplu 0.2. [39] O altă aplicaţie a statisticilor de ordine este legată de traficul rutier de pe autostrăzi. Multe autostrăzi sunt proiectate astfel încât să avem blocaj rutier doar de k ori într-o anumită perioadă de timp. Intensitatea rutieră cea mai mare este reprezentată de statistica de ordine k, $X_{k:m}$.

Exemplu 0.3. [39] Proiectarea sistemelor ţine cont de natura aleatorie a acestora. Pentru un sistem serie (acesta cedează dacă cel puţin o componentă cedează), durata de viaţă poate fi considerată durata de viaţă a celei mai slabe componente, reprezentată de statistica de ordine minimală $X_{1:m}$ (principiul elementului cel mai slab). Valorile extreme sunt cele care afectează durata de viaţă a sistemelor.

Exemplu 0.4. [39] Alt exemplu este reprezentat de nivelurile de apă ale unui râu. Dacă X_1, X_2, $\cdots$, X_m sunt nivelurile de apă ale unui râu în zile consecutive, atunci proprietăţile statisticilor de ordine inferioare $X_{1:m}, X_{2:m}, \cdots, X_{k:m}$ sunt folosite pentru modelarea secetei, iar proprietăţile statisticilor de ordine superioare $X_{m-k:m}, X_{m-k+1:m}, \cdots, X_{m:m}$, sunt folosite în studiul riscurilor de inundaţie şi designul protecţiei împotriva inundaţiilor.

Actualitatea temei

Una din industriile importante şi mereu în dezvoltare este industria civilă. Subdomenii de mare semnificaţie ale acesteia sunt mentenanţa şi designul eficient al sistemelor civile. Aceste sisteme datorită utilităţii lor, sunt supuse la deteriorări progresive cauzate de diferite şocuri, presiuni interioare cât şi exterioare, ce ţin de structura lor, mecanica lor cât şi de mediu înconjurător [21]. Acest proces de deteriorare este un proces aleatoriu, şocurile suferite de sisteme de-a lungul timpului sunt de natură incertă în ceea ce priveşte presiunea încărcăturii, rezistenţa materialelor, cât şi a structurii. În acest context, au fost dezvoltate încă de la începutul primei revoluţii industriale,

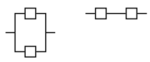

FIGURA 0.0.1: Sisteme paralel şi serie de două componente.

tehnici de optimizare a duratei de viaţă a sistemelor considerând diferite incertitudini/şocuri cât şi diferite costuri şi bugete de mentenanţă. Structura diferitelor sisteme industriale (civile, navale etc.) în acest tip de probleme este modelată de sisteme serie, paralel sau serie-paralel/paralel-serie, considerând degradarea lor [21]. Un sistem paralel cu m componente este un sistem care cedează atunci când nicio componentă nu mai funcţionează, iar un sistem serie cu m componente cedează atunci când o singură componentă nu mai funcţionează. Un sistem serie-paralel este un sistem serie cu componente subsisteme paralel, iar un sistem paralel-serie este un sistem paralel cu componente subsisteme serie. De asemenea, sistemul serie este reprezentat de statistica de ordine maximală, $X_{m:m}$, şi este un sistem m-din-m (m-out-of-m) (un sistem k-din-m (k-out-of-m) reprezentat de statistica de ordine $X_{k:m}$ funcţionează atâta timp cât k componente funcţionează), în timp ce sistemul paralel este reprezentat de statistica de ordine minimală, $X_{1:m}$, şi este un sistem 1-din-m. În Figura 0.0.1, am afişat sistemele paralel şi serie de două componente. Alte sisteme importante din teoria fiabilităţii sunt sistemele coherente [20]. Aceste sisteme sunt caracterizate de sisteme serie-paralel/paralel-serie. Prin urmare, aşa cum au propus Barone et al. [21], configuraţia structurală cât şi interacţiunea dintre componentele unui sistem, din punct de vedere statistic, este reprezentată de un sistem serie, paralel sau serie-paralel/paralel-serie. Câteva exemple de sisteme serie-paralel/paralel-serie includ un sistem de producţie chimică [93], podul E-17-AH din Colorado, Statele Unite ale Americii [55, 116] şi un sistem de transport pe cabluri întâlnit în şantierele navale [83]. Acestea sunt prezentate în continuare.

Levitin et al. (2013) [93] au considerat şi studiat următorul sistem de producţie chimică serie-paralel cu 12 componente: două pompe de alimentare (unităţile 1 şi 2), patru separatoare electrice (unităţile 3-6), două încălzitoare (unităţile 7, 8), şi patru reactoare (unităţile 9-12). Grupurile de unităţi (1,2,4), (3,7,9), (5,8,9,11) şi (6, 12) sunt distribuite între patru spaţii separate prin pereţi ignifugi. Cedarea separatorului 4, încălzitorului 8 şi a reactorului 9 poate să conducă la foc care se va propaga la toate celelalte unităţi aflate în aceeaşi încăpere. Cedarea celorlalte unităţi nu poate să conducă la foc datorită unui sistem local de prevenţie a incendiilor. În Figura 0.0.2 este reprezentată diagrama structurii acestui sistem. Componentele (1, 2) formează un sistem paralel, componentele (9, 10, 11, 12) de asemenea un sistem paralel, iar componentele (3,4,7) un sistem paralel-serie, componentele (3,4) formând un sistem paralel care este legat în serie cu unitatea 7. Unităţile (5,6,8) reprezintă în acelaşi mod un sistem paralel-serie. Aceste două sisteme paralel-serie (3,4,7) şi (5,6,8) formează un sistem paralel (3,4,7)-(5,6,8). Sistemele (1,2), (3,4,7)-(5,6,8) şi (9,10,11,12) formează un sistem serie cu trei subsisteme.

Un alt exemplu important de sistem serie-paralel este podul E-17-AH din Colorado, Statele Unite ale Americii [55, 116]. Podurile cu mai multe traverse de pod sunt modelate de sisteme serie-paralel/paralel-serie [10, 55, 116]. Acest exemplu este studiat în capitolul 2.

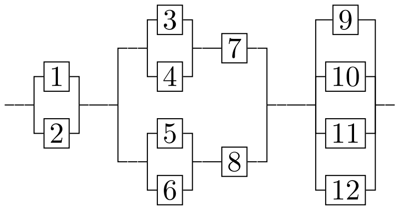

FIGURA 0.0.2: Un sistem de producţie chimică serie-paralel.

Un exemplu de sistem serie-paralel de mari dimensiuni este sistemul de transport pe cabluri întâlnit în şantierele navale [83]. Ascensorul de acostare a navelor pentru efectuarea de reparaţii utilizat în şantierul Naval din Gdynia este format dintr-o platformă de oţel şi 10 cabluri ale cărora forţă este generată de motoare electrice. Acest ascensor cedează dacă unul dintre cabluri cedează. Fiecare cablu este format din 22 de toroane: 10 externe şi 12 interne. Astfel, Kolowrocki (2014) [83] a arătat că acest sistem de transport al navelor este modelat de un sistem paralel-serie cu 10 subsisteme în serie, fiecare subsistem fiind un sistem paralel cu 22 de componente. În Figura 0.0.3, am afişat acest sistem.

Un alt subdomeniu important din statistică reprezintă teoria valorilor extreme. Aceasta se ocupă de repartiţiile (asimptotice) statisticilor de ordine extreme. O aplicaţie a acestui subdomeniu este testarea în condiţii de laborator a rezistenţei diferitelor structuri. Considerând un prototip sau model al structurii, testarea rezistenţei în condiţii de laborator este realizabilă datorită teoriei valorilor extreme, extrapolarea de la mic la mare fiind posibilă datorită acestei teorii [40]. Această teză are ca obiect principal, introducerea şi studierea de noi clase de repartiţii. Cu excepţia unei clase de repartiţii, aceste clase sunt propuse pentru studii de fiabilitate ale unor sisteme complexe serie-paralel/paralel-serie. Astfel, o proprietate importantă din acest punct de vedere, este determinarea repartiţiilor asimptotice ale statisticilor de ordine. Arătăm că aceste repartiţii asimptotice, în anumite condiţii, nu depind de toţi parametrii.

Alt intrument important în statistică reprezintă ordinea stocastică a variabilelor aleatoare având multe aplicaţii, în domenii ca fiabilitate, asigurări şi economie. Una dintre cele mai puternice ordini stocastice este ordinea raport de verosimilitate. Câteva ordini stocastice mai slabe decât aceasta sunt ordinea stocastică obişnuită, ordinea rata de hazard, ordinea rata de hazard inversă şi ordinea uniformă în direcţia pozitivă/negativă. În cazul sistemelor complexe, compararea lor în vederea alegerii celui mai bun din punct de vedere al structurii pentru diferite aplicaţii este importantă şi dificilă datorită dimensiunii lor. Din punct de vedere al duratei de viaţă medie a lor cât şi al ratelor de hazard (reprezintă probabilitatea ca un sistem să cedeze imediat, fiind importantă în analiza lor), este utilă compararea sistemelor cu ajutorul ordinii raport de verosimilitate. În 2008, Navarro [121] a studiat ordinea raport de verosimilitate pentru statistici de ordine, mixturi generalizate şi sisteme, iar împreună cu Shaked în 2006 [122] au studiat ordinea rata de hazard a statisticilor de ordine şi a sistemelor. În această teză discutăm ordinea stocastică pentru noile clase de repartiţii introduse. De asemenea, ordinea stocastică este folosită în vederea îmbunătăţirii fiabilităţii unui

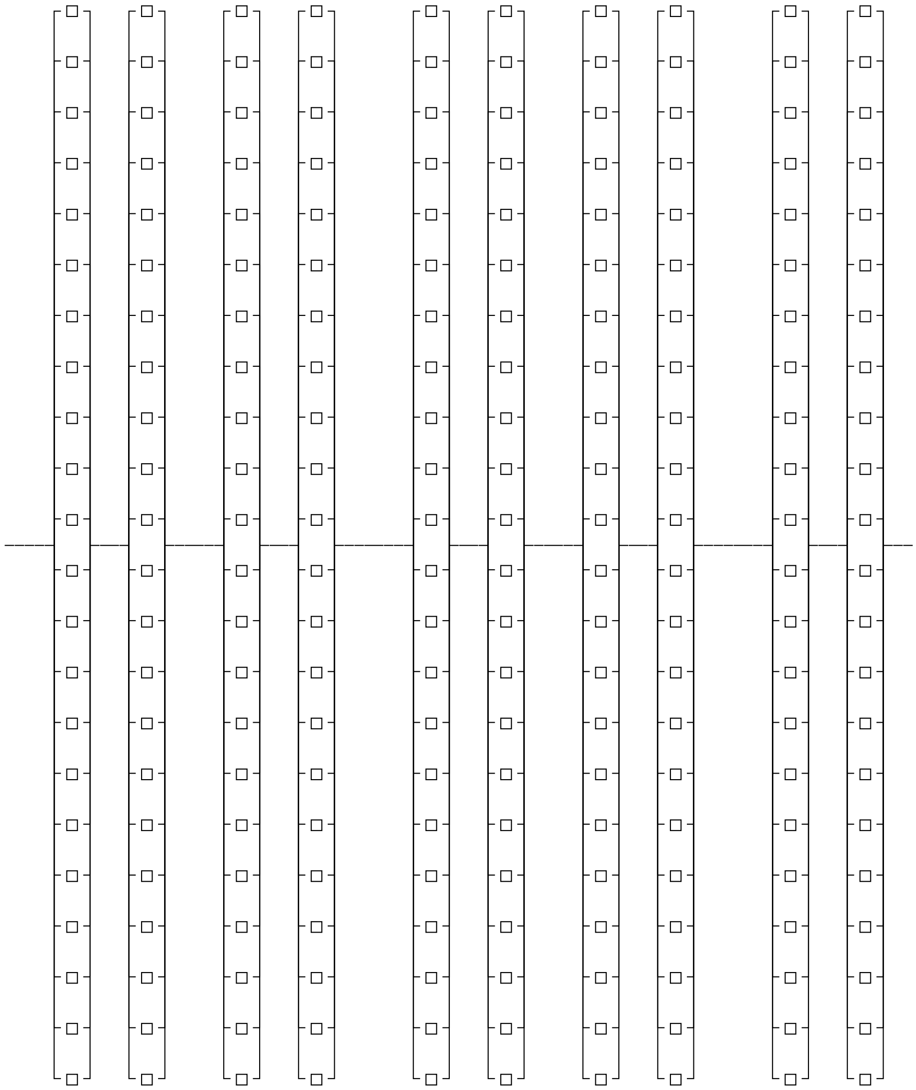

FIGURA 0.0.3: Sistem paralel-serie de transport al navelor.

sistem. Un mod de a face acest lucru poate fi prin alocarea unei redundanţe active. În literatura de specialitate, au fost introduse două tipuri obişnuite de componente redundante, redundanţă activă şi redundanţă în aşteptare. Componentele redundante active sunt puse în paralel la componentele sistemului şi încep să funcţioneze simultan cu componentele originale. Componentele redundante în aşteptare sunt ataşate componentelor sistemului astfel încât să înceapă să funcţioneze după ce componenta originală încetează să funcţioneze [50]. Măsurarea performanţei sistemului pentru diferite alocări de componente redundante active sau în aşteptare, se face folosind diferite ordini stocastice. Câteva lucrări în domeniu sunt cele ale lui Ebrahim (2016) [50], Balakrishnan et al. (2015) [17], Torrado et al. (2015) [156], Laniado şi Lillo (2014) [86], Zhao, Chan şi Ng (2012) [179], da Costa Bueno şi da Carmo (2007) [43], Valdes şi Zequeira (2006) [164], Singh şi Misra (1994) [151], Boland et al. (1992) [35]. De asemenea, o întrebare de interes este "În ce mod instalăm noua componentă, în paralel sau în serie cu cea mai slabă componentă a sistemului [50]?".

Un alt subiect tratat în această teză este statistica Tsallis. Statistica Tsallis îşi are rădăcinile în fizică, o primă noţiune introdusă fiind entropia Tsallis [157–159, 162]. Această statistică particulară este un domeniu important al mecanicii statistică nonextensivă [160]. Concepte ale acestei ramuri a fizicii şi-au găsit aplicaţii în multe alte domenii, precum economie, biologie, chimie, medicină, informatică etc. [4, 60]. De exemplu, veniturile gospodăriilor din Brazilia au fost modelate de o repartiţie Tsallis [152], un lucru remarcabil deoarece până recent veniturile celor săraci erau modelate de o repartiţie, în timp ce veniturile celor bogaţi de o alta. Alte repartiţii din statistica Tsallis sunt repartiţiile q-exponenţială, q-Weibull, q-Gamma, denumite q-repartiţii, acestea având multiple aplicaţii [131, 137, 171, 178]. O revizuire scurtă a acestor aplicaţii se găseşte în [130]. Repartiţiile q-exponenţiale au fost aplicate în studii empirice legate de bursele de valori [73, 76, 77, 136], secvenţe ADN [139], nume de familie [171], comportament uman [38, 154, 155], întârzieri ale trenurilor [30], reacţii chimice [125], linii aeriene [98], registru fosil [149], cutremure [3, 44, 70], procese de numărare a voturilor [102], internet [2], pentru a numera doar câteva. Repartiţiile q-gausiene au aplicaţii în plasme stelare [37], gaze condensate Bose [53, 57, 124], difuzia neliniară [132, 161], molecule ADN [113], galaxii [120], agregate celulare [163]. O aplicaţie a repartiţiei q-Weibull se referă la cinetica fractală [36]. In 2016, aceste repartiţii au fost propuse să fie folosite în teoria fiabilităţii determinându-se câteva proprietăţi ale lor cum ar fi formele ratelor de hazard şi funcţiile de fiabilitate [178]. Această teză introduce noi repartiţii de tipul Tsallis, obţinute prin q-log transformarea unei variabile aleatoare, q-log reprezentând logaritmul Tsallis, o generalizare a logaritmului natural.

Funcţiile de densitate pot fi separate în două clase distincte: log-concave şi log-convexe. În această teză, introducem două noi clase de densităţi care generalizează clasele de densităţi menţionate anterior, pe care le numim densităţi α-log-convexe şi log-convexe-β, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Aceste noţiuni, ne lărgesc viziunea asupra log-concavităţii şi log-convexităţii, dându-ne nişte instrumente utile referitoare la gradul de log-concavitate şi log-convexitate a densităţilor. Astfel, densităţile pot fi puternic log-concave, log-concave, slab log-concave, puternic log-convexe, log-convexe şi slab log-convexe.

Capitolul 1

Clase de repartiţii GET pentru studii de fiabilitate

Teoria fiabilităţii este un domeniu important în industrie. De-a lungul deceniilor, multe repartiţii au fost introduse pentru a modela datele ce provin din acest domeniu. Cele mai folosite repartiţii sunt repartiţia Weibull şi modificările/ generalizările ei [16].

Din necesitatea de a construi noi modele statistice pentru industrie şi nu numai, având diferite forme ale ratei de hazard: crescătoare, descrescătoare, unimodală (de formă upside-down bathtub), de formă cadă (bathtub) sau roller coaster, introducem o nouă clasă de repartiţii potrivite pentru studii de fiabilitate/durata vieţii şi nu numai. Această nouă clasă de repartiţii este obţinută folosind metoda generală de construcţie a repartiţiilor exponenţializate [41] şi metoda de transmutare [145], două metode de construcţie de noi repartiţii, introduse recent. Îmbinarea acestora are ca rezultat clasa de repartiţii general exponenţializate transmutate, pe care o notăm cu GET. Aceste noi repartiţii sunt în anumite cazuri modele statistice mai potrivite decât alte modele introduse în literatură. De asemenea, modelele GET reprezintă sisteme serie, paralel, serie-paralel/paralel-serie de mici dimensiuni.

1.1 Clasa de repartiţii GET

Pornind de la o repartiţie de bază continuă arbitrară, clasa de repartiţii GET este definită în felul următor.

Definiţie 1.1. Fie G o funcţie de repartiţie continuă arbitrară şi fie g funcţia de densitate corespunzătoare lui G. Definim funcţia de repartiţie a modelelor GET prin

$$F_{GET}(x) = [1 - (1 - \{(1+\lambda)G(x) - \lambda G(x)^2\})^{\alpha}]^{\beta} \tag{1.1}$$

unde $\alpha > 0, \beta > 0$ sunt parametrii de formă, iar $|\lambda| \leq 1$ este parametrul de transmutare.

Densitatea modelelor GET este

$$
\begin{aligned}
f_{GET}(x) = \alpha\beta\{1 - \{(1+\lambda)G(x) - \lambda G(x)^2\}\}^{\alpha-1}[1 - \{1 - \{(1+\lambda)G(x) - \lambda G(x)^2\}\}^{\alpha}]^{\beta-1} \\
\times g(x)\Big[1 + \lambda - 2\lambda G(x)\Big] \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

1.1.1 Motivaţie şi interpretare

Modelele statistice GET reprezintă sisteme serie, paralel, serie-paralel şi paralel-serie, atunci când α, β sunt numere naturale, iar λ ia valori din mulţimea $\{-1, 0, 1\}$. Fie α, β numere naturale. Pentru $\lambda = -1$, repartiţiile GET modelează un sistem paralel cu β componente independente, fiecare componentă fiind un subsistem serie cu 2α componente independente identic repartizate având funcţia de repartiţie comună G. Pentru $\lambda = 1$, repartiţiile GET modelează un sistem paralel cu β componente independente, fiecare componentă fiind un subsistem serie cu α subsisteme paralele independente cu două componente independente identic repartizate având funcţia de repartiţie comună G. Pentru $\lambda = 0$, obţinem modelele EG ce reprezintă un sistem paralel cu β componente independente, fiecare componentă fiind un subsistem serie cu α componente independente identic repartizate având funcţia de repartiţie comună G. În Figurile 1.1.1 şi 1.1.2, am reprezentat câteva posibile sisteme ce pot fi modelate de repartiţiile GET.

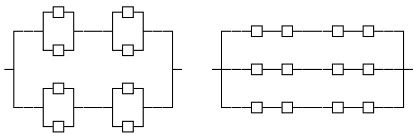

FIGURA 1.1.1: GET(2,2,1) şi GET(2,3,-1)

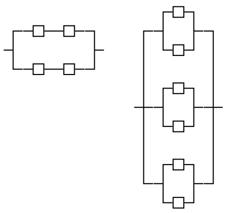

FIGURA 1.1.2: GET(2,2,0) şi GET(2,3,1)

Capitolul 2

Transmutări şi exponenţializări de ordinul n. Extinderi de teoreme.

În acest capitol, introducem noi clase de repartiţii ce extind clasele de repartiţii GET, transmutate (T) şi general exponenţializate (EG). De asemenea, obţinem noi teoreme ce extind teoremele prezentate în capitolul anterior.

Prima clasă de noi repartiţii este obţinută prin multipla aplicare a metodei de transmutare unei repartiţii de bază continuă, rezultând noi modele statistice pe care le numim repartiţii transmutate de ordin n şi le notăm cu T_n.

A doua clasă de noi repartiţii este obţinută prin multipla aplicare a metodei de general exponenţializare [41] unei repartiţii de bază continuă, rezultând noi modele statistice pe care le numim repartiţii exponenţializate de ordin n şi le notăm cu E_n.

A treia clasă de noi repartiţii este obţinută prin multipla aplicare a metodei de transmutare exponenţializare [177] unei repartiţii de bază continuă, rezultând noi modele statistice pe care le numim repartiţii transmutate exponenţializate de ordin n şi le notăm cu TE_n.

Aceste clase de repartiţii reprezintă sisteme complexe serie, paralel, serie-paralel/paralel-serie de mari dimensiuni. Sistemele reprezentate de modelele T_n au componentele/subsistemele legate întotdeauna în număr par, niciodată impar. Astfel, la fiecare pas i, subsistemul reprezentat de funcţia de repartiţie obţinută la pasul $i-1$ pe care o notăm cu F_{i-1}, este legat în paralel sau în serie cu un subsistem de acelaşi tip având aceeaşi funcţie de repartiţie F_{i-1}. Modelele E_n reprezintă sisteme serie-paralel/paralel-serie mai complexe decât modelele T_n, incluzând sistemele reprezentate de acestea din urmă. La fiecare pas i, subsistemul reprezentat de repartiţia E_{i-1}, este legat în paralel de un număr impar sau par de ori cu el însuşi, iar după, sistemul rezultat este pus în serie de un număr impar sau par de ori în acelaşi mod. Mulţimea sistemele modelate de repartiţiile TE_n include sistemele modelate de repartiţiile T_n şi repartiţiile E_n, extinzând mulţimea sistemelor reprezentate de acestea din urmă. Pentru toate aceste sisteme avem componente/subsisteme independente, această presupunere pentru sisteme ducând la o aproximare a duratelor de viaţă a sistemelor din industrie care de cele mai multe ori au componente dependente [167].

Pentru toate aceste noi clase de repartiţii, discutăm repartiţiile asimptotice ale statisticilor de ordine şi ordinea stocastică. În plus, pentru modelele T_n discutăm monotonia şi log-concavitatea funcţiilor de densitate. Arătăm că acestea din urmă păstrează caracteristicile repartiţiilor transmutate, având în schimb un grad de flexibilitate mai mare în ceea ce priveşte măsurile de asimetrie şi de aplatizare. De asemenea, ratele de hazard ale modelelor T_n iau toate formele introduse în literatura de specialitate: crescătoare, descrescătoare, unimodală, de formă cadă sau roller coaster. Rata de hazard descrie procesul de îmbătrânire a unui sistemului considerat.

2.1 Clase de repartiţii transmutare de ordin n (T_n)

În această secţiune, introducem noi clase de repartiţii asimetrice obţinute prin aplicarea metodei de transmutare unei repartiţii de bază continuă. Aceste modele statistice păstrează caracteristicile repartiţiilor transmutate (de ordin 1), oferind în acelaşi timp o mai mare flexibilitate în ceea ce priveşte măsurile de asimetrie şi de aplatizare. O analiză extinsă a modelelor T_n este efectuată, incluzând repartiţiile asimptotice ale statisticilor de ordine, monotonia şi log-concavitatea funcţiilor de densitate cu implicaţii legate de forma ratei de hazard.

Fie F o funcţie de repartiţie arbitrară continuă având funcţia de densitate f, şi

$$\begin{aligned}
&T_1 = T_1(F,\lambda_0): \quad F_1(x) = (1+\lambda_0)F(x) - \lambda_0 F(x)^2 \\
&T_2 = T_2(F,\lambda_0,\lambda_1): \quad F_2(x) = (1+\lambda_1)F_1(x) - \lambda_1 F_1(x)^2 \\
&T_3 = T_3(F,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2): \quad F_3(x) = (1+\lambda_2)F_2(x) - \lambda_2 F_2(x)^2 \\
&\dots \\
&T_n = T_n(F,\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}): \quad F_n(x) = (1+\lambda_{n-1})F_{n-1}(x) - \lambda_{n-1} F_{n-1}(x)^2
\end{aligned} \tag{2.1}$$

unde $|\lambda_i| \leq 1$, $\forall i \in \overline{0, n-1}$ sunt parametrii de transmutare.

Notăm cu $T_1(F,\lambda_0)$ repartiţia având F_1 ca funcţie de repartiţie şi parametru λ_0, cu $T_2(F,\lambda_0,\lambda_1)$ repartiţia având F_2 ca funcţie de repartiţie şi parametrii λ_0,λ_1, şi aşa mai departe, notând cu $T_n(F,\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$ repartiţia având F_n ca funcţie de repartiţie şi parametrii $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$.

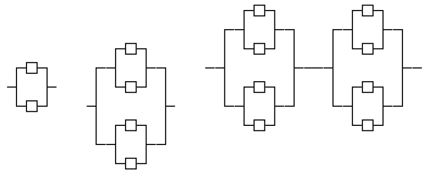

FIGURA 2.1.1: $T_1(F, 1)$, $T_2(F, 1, 1)$ şi $T_3(F, 1, 1, -1)$

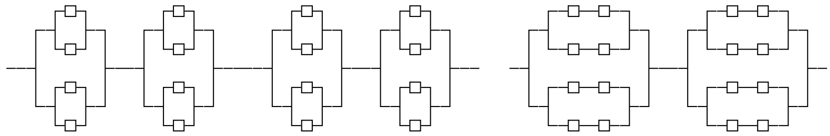

FIGURA 2.1.2: $T_4(F, 1, 1, -1, -1)$ şi $T_3(F, -1, 1, 1, -1)$

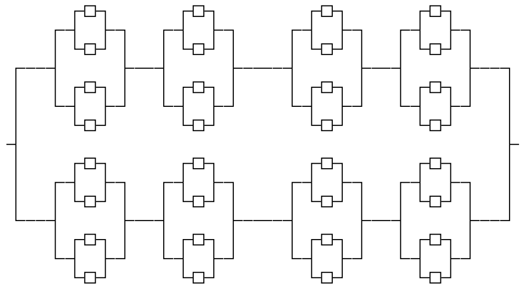

FIGURA 2.1.3: $T_5(F, 1, 1, -1, -1, 1)$

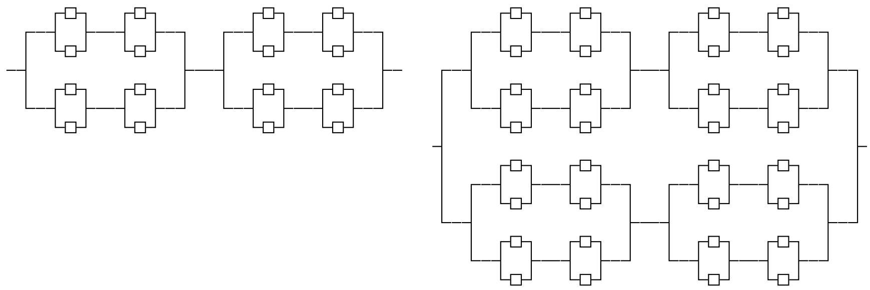

FIGURA 2.1.4: $T_4(F, 1, -1, 1, -1)$ şi $T_5(F, 1, -1, 1, -1, 1)$

2.1.1 Motivaţie şi interpretare

Funcţia de repartiţie F_n pentru $\lambda_i = -1$, $\forall i = \overline{0, n-1}$ poate fi interpretată ca durata de viaţă a unui sistem serie cu 2^n componente independente identic repartizate având funcţia de repartiţie F. Pentru $\lambda_i = 1$, $\forall i = \overline{0, n-1}$, F_n poate fi interpretată ca durata de viaţă a unui sistem paralel cu 2^n componente independente identic repartizate având funcţia de repartiţie F. Atunci când parametrii de transmutare iau valori diferite din mulţimea $\Big\{-1, 1\Big\}$, F_n poate fi interpretată ca durata de viaţă a unui sistem complex şi de dimensiune mare serie-paralel/paralel-serie cu componente independente. De asemenea, putem modela durata de viaţă a unor sisteme serie cu componente serie, cât şi a unor sisteme paralel cu componente subsisteme paralel. În Figurile 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 şi 2.1.4 sunt reprezentate câteva tipuri de sisteme care pot fi modelate statistic de repartiţiile T_n. Pătratul gol reprezintă o componentă a sistemului care are funcţia de repartiţie F.

2.2 Clase de repartiţii exponenţializate de ordin n (E_n)

În această secţiune, noi clase de repartiţii sunt introduse pe care le notăm cu E_n şi le numim repartiţii exponenţializate de ordin n. Aceste clase de repartiţii sunt obţinute prin multipla aplicare a metodei de exponenţializare unei repartiţii de bază continuă F şi reprezintă sisteme complexe serie-paralel/paralel-serie de mari dimensiuni. Mulţimea sistemelor modelate de repartiţiile E_n extinde mulţimea sistemelor modelate de repartiţiile T_n. Câteva teoreme referitoare la repartiţiile asimptotice ale statisticilor de ordine sunt obţinute. De asemenea, discutăm ordinea stocastică a acestor noi clase de repartiţii.

Fie F o funcţie de repartiţie continuă arbitrară, iar f funcţia de densitate corespunzătoare. Fie

$$\begin{aligned}
&E_1(F, \alpha_0, \beta_0): \quad F_1(x) = [1 - \{1 - F(x)\}^{\alpha_0}]^{\beta_0},\\
&E_2(F, \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1): \quad F_2(x) = [1 - \{1 - F_1(x)\}^{\alpha_1}]^{\beta_1},\\
&\dots\\
&E_n(F, \alpha_0, \beta_0, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}): \quad F_n(x) = [1 - \{1 - F_{n-1}(x)\}^{\alpha_{n-1}}]^{\beta_{n-1}} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Densităţile corespunzătoare lui $F_1, F_2, ..., F_n$ sunt

$$\begin{aligned}
&f_1(x) = \alpha_0\beta_0 f(x)\{1 - F(x)\}^{\alpha_0-1}[1 - \{1 - F(x)\}^{\alpha_0}]^{\beta_0-1}\\
&f_2(x) = \alpha_1\beta_1 f_1(x)\{1 - F_1(x)\}^{\alpha_1-1}[1 - \{1 - F_1(x)\}^{\alpha_1}]^{\beta_1-1}\\
&\dots\\
&f_n(x) = \alpha_{n-1}\beta_{n-1} f_n(x)\{1 - F_{n-1}(x)\}^{\alpha_{n-1}-1}[1 - \{1 - F_{n-1}(x)\}^{\alpha_{n-1}}]^{\beta_{n-1}-1} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

unde $\alpha_i, \beta_i > 0$ pentru orice $i = \overline{0, n-1}$.

Notăm cu $h_i(x) = \dfrac{f_i(x)}{1 - F_i(x)}$ ratele de hazard corespunzătoare pentru fiecare $i = \overline{1, n}$. De asemenea, notăm cu $E_1(F, \alpha_0, \beta_0)$ repartiţia având F_1 ca funcţie de repartiţie, cu $E_2(F, \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1)$ repartiţia având F_2 ca funcţie de repartiţie, şi aşa mai departe, notăm cu $E_n(F, \alpha_0, \beta_0, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ repartiţia având F_n ca funcţie de repartiţie.

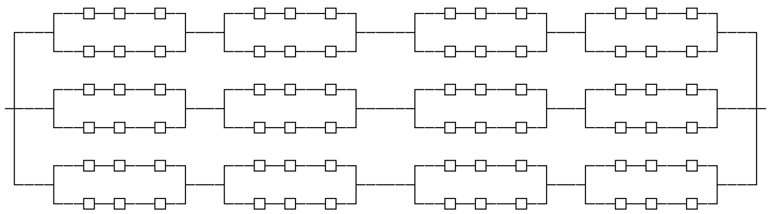

FIGURA 2.2.1: $E_2(F, 3, 2, 4, 3)$

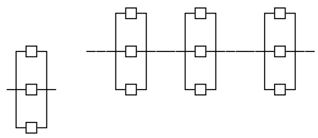

FIGURA 2.2.2: $E_1(F, 1, 3)$ şi $E_2(F, 1, 3, 3, 1)$

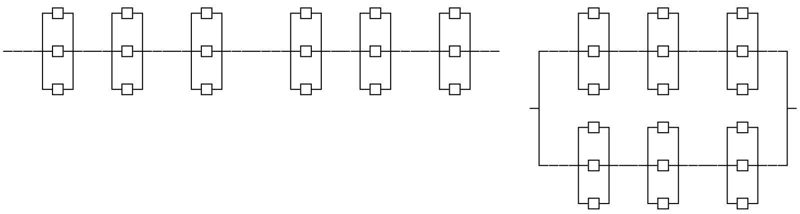

FIGURA 2.2.3: $E_3(F, 1, 3, 3, 1, 2, 1)$ şi $E_3(F, 1, 3, 3, 1, 1, 2)$

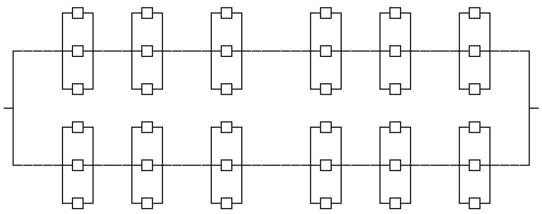

FIGURA 2.2.4: $E_3(F, 1, 3, 3, 1, 2, 2)$

2.2.1 Motivaţie şi interpretare

Pentru α_i şi β_i, $i = \overline{0, n-1}$, numere naturale, repartiţiile exponenţializate de ordin n pot modela sisteme complexe şi de mari dimensiuni paralel-serie/ serie-paralel. Modelul $E_i(F, \alpha_{i-1}, \beta_{i-1})$ reprezintă un sistem paralel cu β_i componente, fiecare componentă fiind un subsistem serie având α_i componente independent identic repartizate având funcţia de repartiţie comună F_{i-1}. În Figurile 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 şi 2.2.4, sunt afişate câteva posibile tipuri de sisteme ce pot fi modelate de repartiţiile E_n. Pătratul gol reprezintă o componentă a sistemului ce are ca funcţie de repartiţie F.

Exemplu 2.1. Podul E-17-AH din Colorado, Statele Unite ale Americii este un pod pentru autostrăzi lung de 42 m şi lat de 12.20 m. Puntea este din beton consolidat, iar traversele de pod (girders) din oţel. Acest pod a fost studiat de-a lungul timpului de către mulţi cercetători. În 2001, Estes şi Frangopol [54] au propus un model de mentenanţă şi de inspecţie a unui pod bazat pe funcţia de fiabilitate a sistemului considerând ca studiu de caz podul E-17-AH din Colorado. Yang et al. (2004) [174] au considerat un model de predicţie a duratei de viaţă a unui pod, luând ca

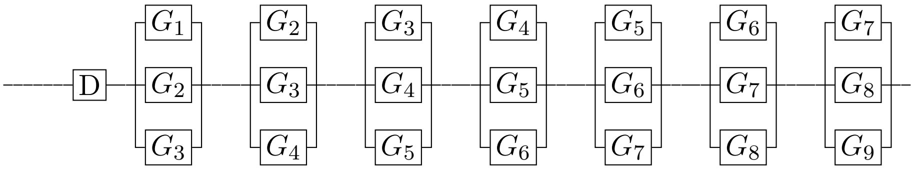

FIGURA 2.2.5: Modelul de sistem pentru podul E-17-AH [116].

studiu de caz acelaşi pod. Utilizând modelele E_n, modelăm structura podului din Colorado şi determinăm repartiţiile asimptotice ale statisticilor de ordine. Aceste tipuri de poduri sunt modelate în analiza fiabilităţii sistemelor de combinaţii de componente serie şi paralel [10, 55].

Structura podului E-17-AH este un sistem serie-paralel cu 10 componente independente, X_1, X_2, $\cdots$, X_9 şi Y, unde Y reprezintă durata de viaţă a punţii, iar X_1, X_2, $\cdots$, X_9 reprezintă durata de viaţă a traverselor de pod. În Figura 2.2.5, am afişat structura sistemului podului E-17-AH. Notăm puntea cu D, iar traversele de pod cu G_1,G_2,$\cdots$,G_9. Disponibilitatea sistemului a fost analizată aplicând un model de mentenanţă excluzând din analiză puntea D, şi considerând X_1,X_2,$\cdots$,X_9 ca fiind independente identic repartizate Weibull [105]. Similar cazului din [105, 176], repartiţia Weibull este adoptată pentru a modela durata de viaţă a componentelor, definită ca durata de viaţă până la apariţia unui defect sever care necesită acţiune urgentă. Funcţia de repartiţie a modelului Weibull de parametrii k şi ρ este definită ca

$$F(x) = 1 - \exp(-(x/\rho)^k), \quad x \geq 0, k > 0, \rho > 0. \tag{2.4}$$

Valorile parametrilor acestei repartiţii sunt conform cu analiza datelor făcută în [105]. Astfel, avem $k = 2.37$ şi $\rho = 0.0077$ pentru puntea principală, iar $k = 2.86$ şi $\rho = 0.0106$ pentru traversele de pod. Ţinta duratei de viaţă este 75 ani.

Modelarea structurii podului utilizând modelele E_n

Durata de viaţă a unui sistem paralel cu trei componente independente identic repartizate având funcţia de repartiţie comună F este $E_1(F, 3, 1)$, iar a unui sistem serie cu şapte componente independente identic repartizate având funcţia de repartiţie comună F este dată de $E_1(F, 1, 7)$. Astfel, durata de viaţă a podului din Colorado este modelată de repartiţia $E_2(F, 3, 1, 1, 7)$, unde F reprezintă funcţia de repartiţie a modelului Weibull. Notăm cu F_2 funcţia de repartiţie corespunzătoare modelului statistic $E_2(F, 3, 1, 1, 7)$.

2.3 Clase de repartiţii transmutate exponenţializate de ordin n (TE_n)

Clasele de repartiţii transmutate exponenţializate de ordin n, pe care le notăm cu TE_n, sunt obţinute aplicând simultan şi de mai multe ori metoda de transmutare şi metoda de general exponenţializare. Astfel, aceste noi clase de repartiţii extind clasele de repartiţii T_n şi E_n. Aceste noi modele statistice reprezintă de asemenea sisteme serie-paralel/paralel-serie complexe de mari dimensiuni. Mulţimea sistemelor serie-paralel modelate de repartiţiile TE_n extinde şi include mulţimea sistemelor serie-paralel/paralel-serie reprezentate de modelele T_n şi E_n. Clasele de repartiţii TE_n sunt definite în felul următor.

Fie F o funcţie de repartiţie arbitrară continuă şi f funcţia de densitate corespunzătoare. Fie

$$\begin{aligned}
&TE_1(F,\alpha_0,\beta_0,\lambda_0): \quad F_1(x) = (1+\lambda_0)[1-\{1-F(x)\}^{\alpha_0}]^{\beta_0} - \lambda_0[1-\{1-F(x)\}^{\alpha_0}]^{2\beta_0}\\
&TE_2(F,\alpha_0,\beta_0,\lambda_0,\alpha_1,\beta_1,\lambda_1): \quad F_2(x) = (1+\lambda_1)[1-\{1-F_1(x)\}^{\alpha_1}]^{\beta_1}\\
&\qquad\qquad - \lambda_1[1-\{1-F_1(x)\}^{\alpha_1}]^{2\beta_1}\\
&TE_3(F,\alpha_0,\beta_0,\lambda_0,\alpha_1,\beta_1,\lambda_1,\alpha_2,\beta_2,\lambda_2): \quad F_3(x) = (1+\lambda_2)[1-\{1-F(x)\}^{\alpha_2}]^{\beta_2}\\
&\qquad\qquad - \lambda_2[1-\{1-F(x)\}^{\alpha_2}]^{2\beta_2}\\
&\ldots\\
&TE_n(F,\alpha_0,\beta_0,\lambda_0,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_{n-1},\lambda_{n-1}): \quad F_n(x) = (1+\lambda_{n-1})[1-\{1-F_{n-1}(x)\}^{\alpha_{n-1}}]^{\beta_{n-1}} -\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \lambda_{n-1}[1-\{1-F_{n-1}(x)\}^{\alpha_{n-1}}]^{2\beta_{n-1}}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

unde $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ şi $|\lambda_i| \le 1$, $\forall\ i = \overline{0, n-1}$.

Notăm cu $TE_1(F,\alpha_0,\beta_0,\lambda_0)$ repartiţia care are F_1 ca funcţie de repartiţie şi parametrii α_0, β_0, λ_0, cu $TE_2(F,\alpha_0,\beta_0,\lambda_0,\alpha_1,\beta_1,\lambda_1)$ repartiţia care are F_2 ca funcţie de repartiţie şi parametrii $\alpha_0, \beta_0, \lambda_0, \alpha_1, \beta_1, \lambda_1$, şi aşa mai departe, notăm cu

$TE_n(F,\alpha_0,\beta_0,\lambda_0,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_{n-1},\lambda_{n-1})$ repartiţia care are F_n ca funcţie de repartiţie şi parametrii $\alpha_0, \beta_0, \lambda_0, ..., \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \lambda_{n-1}$. Pentru $n = 1$ obţinem clasa de repartiţii transmutate exponenţializate introdusă în 2015 de către Yousof et al. [177]. Pentru modelele TE_n determinăm funcţia cuantilă şi repartiţiile asimptotice ale statisticilor de ordine. De asemenea, discutăm ordinea stocastică a acestora.

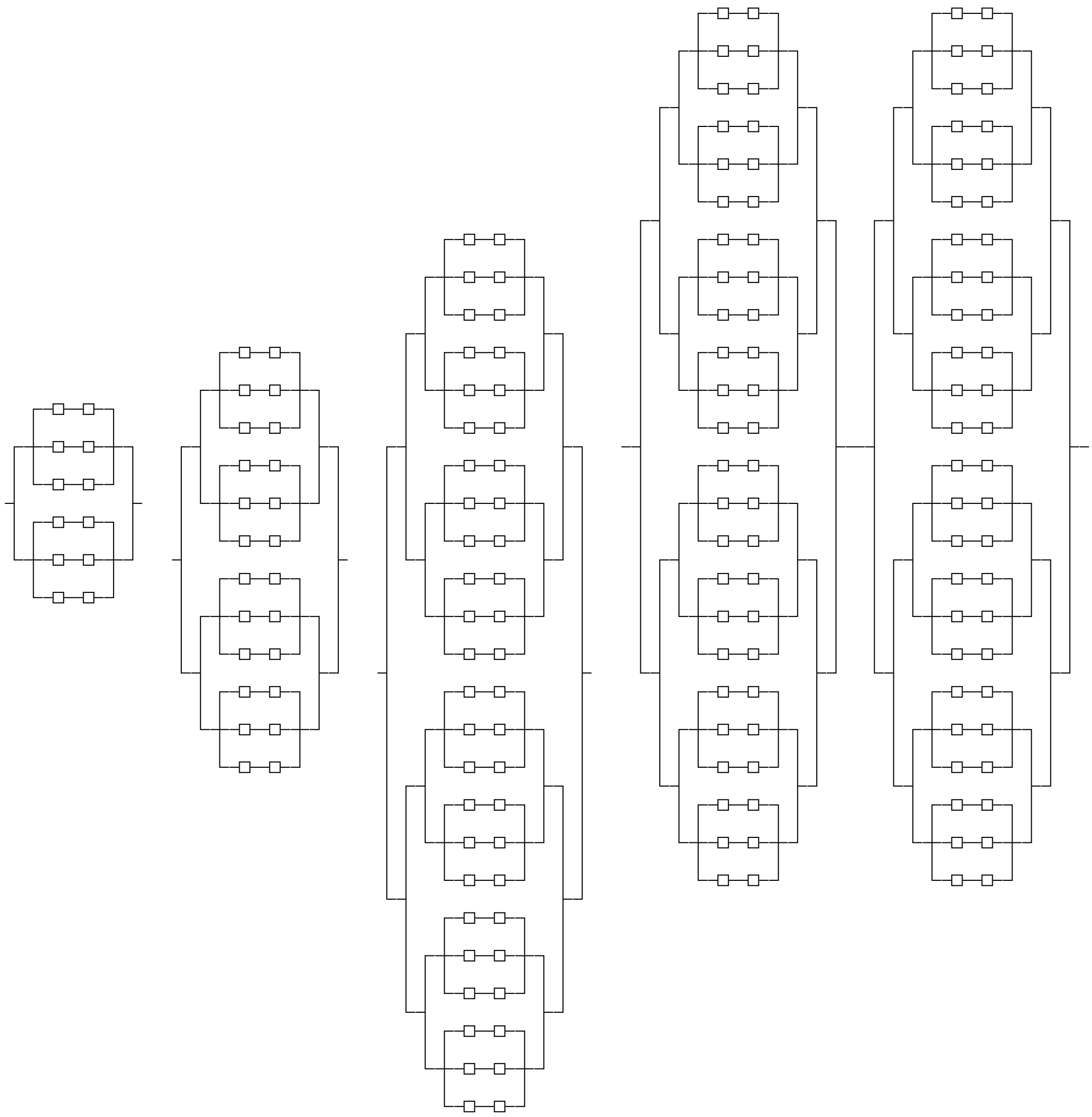

FIGURA 2.3.1: $TE_1(F, 2, 3, 1)$, $TE_2(F, 2, 3, 1, 1, 2, 0)$, $TE_2(F, 2, 3, 1, 1, 2, 1)$ şi TE_3(F,2,3,1,1,2,1,1,2,-1)

2.3.1 Motivaţie şi interpretare

Deoarece repartiţiile TE_n sunt obţinute aplicând atât metoda de transmutare de ordin n cât şi metoda de exponenţializare de ordin n, iar aceste modele reprezentă sisteme complexe şi de mari dimensiuni paralel-serie/serie-paralel, şi aceste repartiţii pot modela sisteme complexe de acest tip. În Figuria 2.3.1, am afişat câteva sisteme care pot fi modelate folosind repartiţiile TE_n. Pătratul gol reprezintă o componentă a sistemului care are ca funcţie de repartiţie F.

Capitolul 3

Clasa de repartiţii q-log Tsallis

În acest capitol, introducem o nouă clasă de modele bazate pe q-logaritmul Tsallis care are proprietăţi interesante referitoare la funcţiile ratelor de hazard şi durata de viaţă reziduală medie. Considerând q-logaritmul Tsallis, această nouă clasă de repartiţii, modelele q-log-locaţie-scală, pe scurt repartiţiile qLLS, are proprietăţi utile în studii de fiabilitate şi de supravieţuire.

Noţiunile de α-log-convexitate şi log-convexitate-β care extind noţiunile de log-convexitate şi log-concavitate sunt introduse. Câteva submodele ale modelelor qLLS sunt discutate presupunând că repartiţiile de bază locaţie-scală au densităţi log-concave, log-convexe, α-log-convexe sau log-convexe-β, rezultând în ceea ce numim modele q-log-locaţie-scală-log-concave (qLLSLC), modele q-log-locaţie-scală-log-convexe (qLLSLC), modele q-log-locaţie-scală-α-log-convexe (α-qLLSLV) şi modele q-log-locaţie-scală-log-convexe-β (qLLSLV-β). Analiza noastră principală se concentrează pe log-concavitatea şi log-convexitatea modelelor qLLS. Modelele qLLSLC au ca submodele repartiţiile log-locaţie-scală-log-concave (LLSLC) [74]. Repartiţiile LLSLC au proprietăţi şi aplicaţii interesante. Recent, Gigliarano et al. (2017) [67] au utilizat clasa de repartiţii log-locaţie-scală în modelarea diferitelor tendinţe ale mediei şi concentraţiei timpilor de supravieţuire.

În cele ce urmează vom arăta că rata de hazard a repartiţiilor qLLSLC poate fi crescătoare, descrescătoare, unimodală sau de formă cadă depinzând de valorile parametrului q al logaritmului Tsallis. Pentru funcţia duratei de viaţă reziduală medie corespunzătoare obţinem margini superioare şi inferioare. De asemenea, considerăm şi discutăm log-concavitatea funcţiilor de densitate ale modelelor propuse.

3.1 Repartiţii q-log-locaţie-scală

Clasa de repartiţii locaţie-scală este definită de următoarele funcţii de repartiţie şi densitate, respectiv

$$F_L(x;\mu,\sigma,w) = F(\frac{x-\mu}{\sigma};w), \qquad f_L(x;\mu,\sigma,w) = \frac{1}{\sigma}f(\frac{x-\mu}{\sigma};w), \quad x\in\mathbb{R} \tag{3.1}$$

unde $\mu \in R$ este parametrul de locaţie, $\sigma > 0$ este parametru de mărime şi w (posibil un vector) reprezintă parametrul asociat densităţii de bază f. Pentru definirea modelelor qLLS avem nevoie de repartiţiile locaţie-scală trunchiate.

Clasa de repartiţii locaţie-scală trunchiate este definită de următoarele funcţii de repartiţie şi densitate, respectiv

$$F_T(x;k,\mu,\sigma,w) = kF(\frac{x-\mu}{\sigma};w), \qquad f_T(x;k,\mu,\sigma,w) = \frac{k}{\sigma}f(\frac{x-\mu}{\sigma};w), \quad x\in(a,b) \tag{3.2}$$

unde $k > 0$ este parametrul de trunchiere care se obţine din $\int_a^b f_T(x)dx = 1$, iar (a,b) este intervalul de trunchiere, $a,b\in\mathbb{R}$. Fie X o variabilă aleatoare având funcţia de densitate f_T şi funcţia de repartiţie F_T de forma (3.2).

Repartiţiile q-log-locaţie-scală (qLLS) sunt definite utilizând logaritmul Tsallis, aplicând transformarea $X = log_q^T(Y)$, $Y = e_q(X)$ unde

$$log_q^T(x) = \begin{cases} \log(x), & if \quad x>0 \quad \text{şi} \quad q=1 \\ \frac{x^{q-1}-1}{q-1}, & if \quad x>0 \quad \text{şi} \quad q\neq 1 \end{cases}$$

q este un parametru real, iar $e_q(x)$ este funcţia exponenţială Tsallis corespunzătoare lui log_q^T

$$e_q(x) = \begin{cases} \exp(x), & if \quad q=1 \\ [1+(q-1)x]^{1/(q-1)}, & if \quad q\neq 1 \quad \text{şi} \quad 1+(q-1)x>0 \\ 0^{1/(q-1)}, & if \quad q\neq 1 \quad \text{şi} \quad 1+(q-1)x\leq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Funcţiile de densitate, de repartiţie, de supravieţuire şi rata de hazard ale lui Y, notate cu g, G, $\overline{G}$ şi h_G sunt definite în felul următor

$$g(y;\theta,\lambda,q,w) = \frac{k\lambda}{\theta}(\frac{y}{\theta})^{q-2}f(\lambda\frac{(\frac{y}{\theta})^{q-1}-1}{q-1};w), \quad y>0$$

$$G(y;\theta,\lambda,q,w) = kF(\lambda\frac{(\frac{y}{\theta})^{q-1}-1}{q-1};w), \quad y>0$$

$$\overline{G}(y;\theta,\lambda,q,w) = k\overline{F}(\lambda\frac{(\frac{y}{\theta})^{q-1}-1}{q-1};w)+1-k, \quad y>0$$

$$\begin{aligned} h_G(y;\theta,\lambda,q,w) &= \frac{\lambda}{\theta}(\frac{y}{\theta})^{q-2}h_F(\lambda\frac{(\frac{y}{\theta})^{q-1}-1}{q-1};w) \\ &\times \frac{k\overline{F}(\lambda\frac{(\frac{y}{\theta})^{q-1}-1}{q-1};w)}{k\overline{F}(\lambda\frac{(\frac{y}{\theta})^{q-1}-1}{q-1};w)+1-k} \quad y>0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

unde $\theta > 0$ şi $\lambda > 0$ sunt reparametrizări ale lui μ şi σ, respectiv, iar h_F este rata de hazard corespunzătoare funcţiei de repartiţie F.

Domeniul de definiţie al repartiţiei de bază definită prin funcţiile de repartiţie şi de densitate, F şi f, respectiv, pentru modelele qLLS este diferit în funcţie de valorile parametrului q. Astfel, în anumite cazuri, repartiţia de bază aleasă este trunchiată, adică $k \neq 1$. Acest lucru este necesar ca funcţia G să fie o funcţie de repartiţie.

Capitolul 4

Comparaţii de modele şi submodele

În acest capitol, comparăm câteva modele şi submodele ale claselor de repartiţii T_n utilizând analiza datelor. Criteriile de comparaţie folosite sunt criteriul informaţional Akaike (AIC) şi criteriul informaţional Bayesian (BIC). Modelul cu cel mai mic AIC şi/sau BIC este ales ca fiind cel mai potrivit dintre cele testate pentru a modela setul de date analizat din punctul de vedere a criteriilor aplicate.

Analiza datelor

Analiza datelor se face asupra a şapte seturi de date reale, folosind ca repartiţie de bază pentru modelele T_n, repartiţiile exponenţială, exponenţializată exponenţială, general exponenţializată exponenţială, Pareto, Weibull, Birnbaum Saunders şi exponenţializată Birnbaum Saunders. Rezultatele obţinute ne arată că modelele T_n sunt potrivite pentru a modela seturi de date în multe cazuri. Parametrii repartiţiilor sunt estimaţi folosind funcţia *mledist()* din R.

Capitolul 5

Clase de repartiţii Transmutate-G

În acest capitol, studiem câteva proprietăţi ale clasei de repartiţii general transmutate-G [126] şi de asemenea introducem noi clase de repartiţii care au la bază această metodă de construcţie de noi repartiţii pe care le vom nota cu $GT.T_n$. Modelele $GT.T_n$ reprezintă sisteme serie-paralel/paralel-serie complexe şi de mari dimensiuni, complexitatea acestor sisteme fiind mai mare decât a sistemelor reprezentate de modelele T_n, E_n şi TE_n. Clasa sistemelor modelate de repartiţiile $GT.T_n$ include toate sistemele reprezentate de repartiţiile T_n şi o parte din sistemele reprezentate de repartiţiile E_n şi TE_n. Pentru toate aceste clase de repartiţii, obţinem repartiţiile asimptotice ale statisticilor de ordine şi discutăm ordinea stocastică.

Clasa de repartiţii general transmutate-G ($GT.G$), introdusă de Nofal et al. (2017) [107, 126], este definită de următoarea funcţie de repartiţie

$$F_{GT.T}(x; \lambda, a, b, \varphi) = F_{GT.T}(x) = G(x;\varphi)^a \left[(1+\lambda) - \lambda G(x;\varphi)^b\right] \tag{5.1}$$

unde funcţia de densitate corespunzătoare este

$$f_{GT.T}(x; \lambda, a, b, \varphi) = f_{GT.T}(x) = g(x;\varphi) G(x;\varphi)^{a-1} \left[a(1+\lambda) - \lambda(a+b) G(x;\varphi)^b\right] \tag{5.2}$$

cu a, b, λ sunt parametrii reali, $|\lambda| \leq 1$; $a > 0$, $b > 0$ pentru $-1 \leq \lambda \leq 0$, iar pentru $0 \leq \lambda \leq 1$ avem $a + b > 0, a \geq b$; λ este parametrul de transmutare, iar $G(x;\varphi) = G(x)$ şi $g(x;\varphi) = g(x)$ reprezintă funcţiile de repartiţie şi de densitate ale repartiţie de bază de parametru φ (posibil un vector).

5.1 Clase de repartiţii $GT.T$ de ordin n ($GT.T_n$)

Fie F o funcţie de repartiţie continuă cu densitatea corespunzătoare f. Fie

$$
\begin{aligned}
&GT.T_1(F,a_0,b_0,\lambda_0): \quad F_1(x)=F(x)^{a_0}[1+\lambda_0-\lambda_0F(x)^{b_0}]\\
&GT.T_2(F,a_0,b_0,\lambda_0,a_1,b_1,\lambda_1): \quad F_2(x)=F_1(x)^{a_1}[1+\lambda_1-\lambda_1F_1(x)^{b_1}]\\
&GT.T_3(F,a_0,b_0,\lambda_0,a_1,b_1,\lambda_1,a_2,b_2,\lambda_2): \quad F_3(x)=F_2(x)^{a_2}[1+\lambda_2-\lambda_2F_2(x)^{b_2}]\\
&\dots\\
&GT.T_n(F,a_0,b_0,\lambda_0,\dots,a_{n-1},b_{n-1},\lambda_{n-1}): \quad F_n(x)=F_{n-1}(x)^{a_{n-1}}[1+\lambda_{n-1}-\lambda_{n-1}F_{n-1}(x)^{b_{n-1}}]
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

cu densităţile corespunzătoare

$$
\begin{aligned}
f_1(x)&=f(x)F(x)^{a_0-1}\Big[a_0(1+\lambda_0)-\lambda_0(a_0+b_0)F(x)^{b_0}\Big]\\
f_2(x)&=f_1(x)F_1(x)^{a_1-1}\Big[a_1(1+\lambda_1)-\lambda_1(a_1+b_1)F_1(x)^{b_1}\Big]\\
f_3(x)&=f_2(x)F_2(x)^{a_2-1}\Big[a_2(1+\lambda_2)-\lambda_2(a_2+b_2)F_2(x)^{b_2}\Big]\\
&\dots\\
f_n(x)&=f_{n-1}(x)F_{n-1}(x)^{a_{n-1}-1}\Big[a_{n-1}(1+\lambda_{n-1})-\lambda_{n-1}(a_{n-1}+b_{n-1})F_{n-1}(x)^{b_{n-1}}\Big]
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

unde a_i, b_i, $|\lambda_i|\le 1$ sunt parametrii reali; $a_i>0$, $b_i>0$ pentru $-1\le\lambda_i\le 0$, iar pentru $0\le\lambda_i\le 1$ avem că $a_i+b_i>0, a_i\ge b_i$, $i=\overline{0,n-1}$.

Notăm cu $h_i(x)=\dfrac{f_i(x)}{\overline{F}_i(x)}$ ratele de hazard corespunzătoare, unde $\overline{F}_i(x)=1-F_i(x)$ sunt funcţiile de supravieţuire, $i=\overline{1,n}$. De asemenea, notăm cu $GT.T_1(F,a_0,b_0,\lambda_0)$ modelul statistic definit de funcţia de repartiţie F_1 având parametrii a_0,b_0 şi λ_0, cu $GT.T_2(F,a_0,b_0,\lambda_0,a_1,b_1,\lambda_1)$ modelul definit de funcţia de repartiţie F_2 având parametrii $a_0,b_0,\lambda_0,a_1,b_1,\lambda_1$, şi aşa mai departe, notăm cu $GT.T_n(F,a_0,b_0,\lambda_0,\dots,a_{n-1},b_{n-1},\lambda_{n-1})$ modelul definit de funcţia de repartiţie F_n având parametrii $a_0,b_0,\lambda_0,...,a_{n-1},b_{n-1},\lambda_{n-1}$.

5.1.1 Motivaţie şi interpretare

Modelele $GT.T_n$, precum modelele T_n, E_n şi TE_n, pot de asemenea reprezenta sisteme complexe şi de mari dimensiuni serie-paralel/paralel-serie şi k-din-m. Pentru $a_i=b_i=1, \forall i=\overline{0,n-1}$, obţinem repartiţiile transmutate de ordin n. Pentru $b_0=1$, $\lambda_0=1$ şi a_0 număr natural, F_1 reprezintă durata de viaţă a unui sistem format din a_0 componente independente în serie: a_0-1 componente independente având ca funcţie de repartiţie pe F, iar ultima componentă este un subsistem paralel cu două componente independente, fiecare componentă având F ca funcţie de repartiţie. Pentru

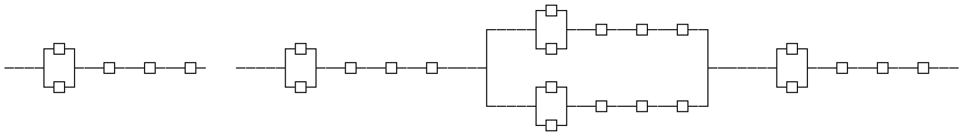

FIGURA 5.1.1: $GT.T_1(F, 4, 1, 1)$ şi $GT.T_2(F, 4, 1, 1, 3, 1, 1)$

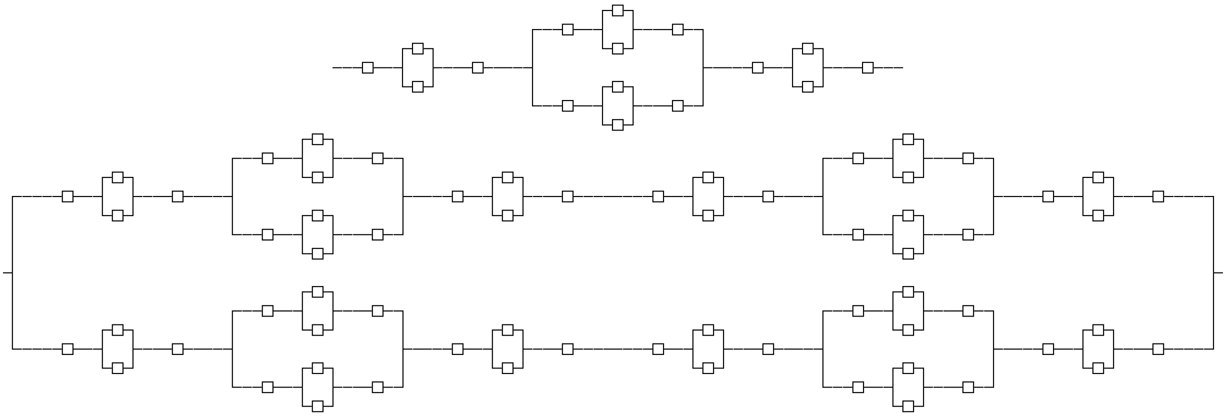

FIGURA 5.1.2: $GT.T_2(F, 3, 1, 1, 3, 1, 1)$ şi $GT.T_4(F, 3, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 2, -1, 1, 1, 1)$

$\lambda_0 = -1$ şi a_0, b_0 numere naturale, F_1 reprezintă durata de viaţă a unui sistem serie cu $a_0 + b_0$ componente independente identic repartizare având funcţia de repartiţie F. Pentru $a_0 = b_0$, a_0, b_0 numere naturale şi $\lambda_0 = -1$, F_1 reprezintă durata de viaţă a unui sistem serie cu $2a_0$ componente independente identic repartizate cu funcţia de repartiţie F. Pentru $a_0 = b_0$, a_0, b_0 numere naturale şi $\lambda_0 = 1$, F_1 reprezintă durata de viaţă a unui sistem paralel cu a_0 componente independente identic repartizate cu funcţia de repartiţie F. Pentru $a_0 = b_0 = 1$ şi $\lambda_0 = 1$, F_1 reprezintă durata de viaţă a unui sistem paralel cu două componente independente identic repartizate cu funcţia de repartiţie F. În Figurele 5.1.1 şi 5.1.2, am afişat câteva tipuri de sisteme care pot fi modelate de repartiţiile $GT.T_n$. Pătratul gol reprezintă o componentă a unui sistem care are F ca funcţie de repartiţie.

Capitolul 6

Concluzii şi direcţii viitoare de cercetare

În această teză, am introdus şi studiat diferite clase de repartiţii, toate propuse pentru studii de fiabilitate. Acestea sunt

(i) clasa de repartiţii general exponenţializate transmutate (GET)

(ii) clasa de repartiţii transmutate de ordin n (T_n)

(iii) clasa de repartiţii exponenţializate de ordin n (E_n)

(iv) clasa de repartiţii transmutate exponenţializate de ordin n (TE_n)

(v) clasa de repartiţii q-log-locaţie-scală (qLLS) cu următoarele subclase

- clasa de repartiţii q-log-locaţie-scală-log-concave ($qLLSLC$)
- clasa de repartiţii q-log-locaţie-scală-log-convexe ($qLLSLV$)
- clasa de repartiţii α-q-log-locaţie-scală-log-convexe ($\alpha - qLLSLC$)
- clasa de repartiţii q-log-locaţie-scală-β-log-convexe ($qLLSLC - \beta$)

(vi) clasa de repartiţii transmutate-G de ordin n, $GT.T_n$

Aceste clase de repartiţii, cu excepţia modelelor qLLS, modelează sisteme complexe şi de mari dimensiuni serie-paralel sau paralel-serie. Pentru toate aceste modele statistice, am studiat ordinea raport de verosimilitate care are multe implicaţii. De asemenea, am discutat proprietăţi referitoare la repartiţiile asimptotice ale statisticilor de ordine. Chiar dacă multe dintre aceste modele statistice au mulţi parametrii cu cât n creşte, acest lucru nu este neapărat o problemă în cazul modelării sistemelor serie-paralel/paralel-serie. Luând valori iniţiale pentru acei parametrii care ne dau structura sistemului, ne rămân doar acei parametrii ai repartiţiei de bază de estimat.

Noi direcţii de cercetare

Domenii importante în industrie sunt fiabilitatea, mentenanţa şi optimizarea costurilor sistemelor [19, 20, 22, 23, 85]. Noile direcţii de cercetare propuse sunt

(i) Studierea de noi proprietăţi şi dezvoltarea de aplicaţii pentru modelele T_n, E_n, TE_n şi $GT.T_n$.

(ii) Introducerea şi studierea numeroaselor submodele generate de noile clase de repartiţie discutate.

(iii) Studierea formelor ratelor de hazard, ratelor de hazard inverse, duratelor de viaţă reziduală medie ale noilor modele.

(iv) Analiză bayesiană pentru repartiţiile T_n, E_n, TE_n şi $GT.T_n$, cât şi simulări Monte Carlo.

(v) Studiul modelelor de stres-rezistenţă folosind aceste modele şi submodele

(vi) Studiul sistemelor complexe şi de mari dimensiuni series-paralel/paralel-serie şi aplicaţii ale lor, în contextul acestor noi modele statistice.

(vii) Dezvoltarea de aplicaţii cum ar fi

- modele de mentenanţă a sistemelor
- modele de optimizare a costurilor sistemelor
- strategii de optimizare a fiabilităţii sistemelor redundante.

(viii) Dezvoltarea de aplicaţii şi aprofundarea noţiunilor de α-log-convexitate şi log-convexitate-β.

Bibliografie selectivă

[1] Abd El Hady N.E. (2014) Exponentiated Transmuted Weibull Distribution: A Generalization of the Weibull distribution, *International Journal of Mathematical, Computational, Physical and Computer Engineering*, **8**(6)

[2] Abe S., Suzuki N. (2003) Itineration of the Internet over nonequilibrium stationary states in Tsallis statistics, *Physical review E*, **67**(1), 016106

[3] Abe S., Suzuki N. (2003). Law for the distance between successive earthquakes, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **108**(B2)

[4] Abe S. Okamoto Y. (eds.(2001) Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications, Springer, Berlin

[5] Afify A. Z., Nofal Z.M., Yousof H.M., El Gebaly Y. M. and Butt N.S. (2015) The Transmuted Weibull Lomax Distribution: Properties and Application, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, **11**(1), 135-152

[6] Almalki S. J. and Yuan J. (2013) A new modified Weibull distribution, *Reliability Engineering and System Safety*, **111**, 164-170

[7] Arnold B.C., Balakrishnan N. and Nagaraja H.N.. (1992) A First Course in Order Statistics, *John Wiley & Sons, New York*

[8] Aryall G.R. and Tsokos C.P. (2011). Transmuted Weibull distribution: A generalization of the Weibull probability distribution, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, **4**(2), 89–102.

[9] Afify Z. A., Nofal Z.M. and Abd El Hadi N. (2015) Exponentiated Transmuted Generalized Rayleigh Distribution: A New Four Parameter Rayleigh Distribution, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, **11**(1), 115-134

[10] Akgul F., Frangopol DM (2004), Computational platform for predicting lifetime system reliability profites for different structure types in a network, *Journal of Computing in Civil Engineering*, **18**(2), 92-104

[11] Al- Hussaini E.K. and Hussein M. (2011) Estimation Using Censored Data from Exponentiated Burr Type XII Population, *American Open Journal of Statistics*, **1(02)**, 33-45

[12] An M.Y. (1998) Logconcavity versus Logconvexity: A Complete Characterization, *Journal of Economic theory*, **80**, 350-369

[13] Aryall G.R. (2013) Transmuted log-logistic distribution, *J. Stat. Appl. Pro.*, **2**(1), 11-20

[14] Ashour S.K. and Eltehtwy M. A. (2013) Transmuted Lomax Distribution, *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, **1**(6), 121-127

[15] Ashour S.K. şi Eltehiwy M.A. (2015) Exponentiated power Lindley distribution, *Journal of Advanced Research, Cairo University*, **6**(6), 895-905

[16] Almalki S. J. and Nadarajah S. (2014) Modifications of the Weibull distribution: A review, *Reliability Engineering and System Safety*, **124**, 32-55

[17] Balakrishnan N., Haidari A., Masoumifard K. (2015) Stochastic Comparisons of Series and Parallel Systems With Generalized Exponential Components, *IEEE Transactions on Reliability*, **64**(1)

[18] Bapat R.B. and Kochar S.C. (1994) On Likelihood-Ratio Ordering of Order Statistics, *Linear Algebra and its Applications*, **199**(1), 281-291

[19] Barlow R.E., Proschan F. and Hunter L.C. (1965) Mathematical Theory of Reliability, *John Wiley & Sons, Inc., New York*

[20] Barlow, R.E. and Proschan F. (1975) Statistical Theory of Reliability and Life-Testing: Reliability Models, *Holt, Rinehart & Winston, New York*

[21] Barone G., Frangopol D.M., Soliman M. (2014) Optimization of life-cycle maintenance of deteriorating bridges with respect to expected annual system failure rate and expected cumulative cost, *Journal of Structural Engineering*, **140**(2), 04013043

[22] Băncescu I. (2015) A maintenance model with a quasi generalized Lindley distribution, *19th European Young Statiscians Meeting, Prague, The Czech Republic 31 August-4 September 2015*

[23] Băncescu I. (2015) Maintenance model using Lindley type distributions, *A 18-a Conferinţă a Societăţii de Probabilităţi şi Statistică 8th of May 2015, Bucharest, Romania*

[24] Băncescu I. (2015) Transmuted exponentiated exponential distribution vs exponentiated transmuted exponential. A comparison using data analysis, *The 12th Balkan Conference on Operational Research BALCOR 2015, Constanţa, Romania*

[25] Băncescu I. Comparing the expected system lifetimes of k-out-of-m systems using transmuted-G distributions, *Proceedings of the Romanian Academy*- lucrare acceptată

[26] Băncescu I. (2018) Some classes of statistical distributions. Properties and Applications, *Analele Ştiinţifice ale Universităţii din Constanţa*, volumul XXVI, fascicola 1

[27] Băncescu I. q-log-distributions. Log-concavity and Log-convexity- lucrare acceptată la *The European Physical Journal Plus*

[28] Băncescu I., Exponentiated distributions of order n and serie-parallel systems, trimis spre publicare la *Journal of Applied Statistics*

[29] Băncescu I., Modelling serie-parallel systems. Inference and Applications, trimis spre publicare la *SORT-Statistics and Operations Research Transactions*

[30] Briggs K., Beck C. (2007) Modelling train delays with q-exponential functions, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **378**(2), 498-504

[31] Bromiley P. A., Thacker N. A., Bouhova-Thacker E. (2004). Shannon entropy, Renyi entropy, and information, *Statistics and Inf. Series* (2004-004).

[32] Burrell Q.L. (2005) Symmetry and Other Transformation of Lorenz/Leimkuhler Representations of Informetric Data, *Information Processing and Management*, **41**, 1317-1329

[33] Borges E.P. (1998). On a q-generalization of circular and hyperbolic functions, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **31**, 5281-5288

[34] Borzadaran G.R.M. and Borzadaran H.A.M. (2011). Log-concavity property for some well-known distributions, *Surveys in Mathematics and its Applications*, **6**, 203-219.

[35] Boland P. J., El-Neweihi E., Proschan F. (1992) Stochastic order for redundancy allocation in series and parallel systems, *Advances in Applied Probability*, **24**, 161-171

[36] Brouers F., Sotolongo-Costa O. (2006). Generalized fractal kinetics in complex systems (application to biophysics and biotechnology), *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **368**(1), 165-175

[37] Caruso F., Pluchino A., Latora V., Vinciguerra S., Rapisarda A. (2007) Analysis of self-organized criticality in the Olami-Feder-Christensen model and in real earthquakes, *Physical Review E*, **75**(5), 055101

[38] Cajueiro D. O. (2006) A note on the relevance of the q-exponential function in the context of intertemporal choices, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **364**, 385-388

[39] Castillo E. (2012). Extreme value theory in engineering. *Elsevier*

[40] Castillo E., Hadi A. S., Balakrishnan N., Sarabia J. M. (2005) Extreme value and related models with applications in engineering and science, *Hoboken, NJ: Wiley*

[41] Cordeiro G. M., Ortega E. M. M. and da Cunha D. C. C. (2013) The Exponentiated Generalized Class of Distributions, *Journal of Data Science*, **11**, 1-27

[42] Cordeiro G. M., Alizadeh M., Ortega E. M.M. (2014). The exponentiated half-logistic family of distributions: Properties and applications, *Journal of Probability and Statistics*

[43] da Costa Bueno V., do Carmo I. M. (2007) Active redundancy allocation for a k-out-of-n:F system of dependent components, *European Journal of Operational Research*, **176**, 1041-1051

[44] Darooneh A. H., Dadashinia C. (2008) Analysis of the spatial and temporal distributions between successive earthquakes: Nonextensive statistical mechanics viewpoint, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **387**(14), 3647-3654

[45] Dumitrescu M., Florea D. and Tudor C. (1983) Elemente de teoria probabilitatilor si statistica matematica, *Tipografia Universitatii Bucuresti*

[46] Dumitrescu M. and Vraciu C. (1979) Metode statistice de control al calitatii productiei. Controlul de receptie, *Tipografia Universitatii Bucuresti*

[47] Dumitrescu M. (2000) Bazele Matematice ale Monitorizarii Proceselor Industriala, *Editura Academiei Romane*

[48] Dumitrescu M. (1989) Curs de statistica matematica, *Tipografia Universitatii Bucuresti*

[49] Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M.J. and Kaas R. (2005) Actuarial Theory for Dependent Risks, *John Wiley & Sons*

[50] Ebrahim A.S. (2016) Stochastic comparisons of redundancy allocation at component level versus systems level, Second Seminar on Reliability Theory and its Applications, 18-19 mai 2016

[51] Eeckhout J.(2004) Gibrat's law for (All) cities. *American Economics Review*, **94**(5), 1429-1451

[52] Elbatal J., Diab L.S. and Abdul Alim N.A. (2013) Transmuted Generalized Linear Exponential Distribution, *International Journal of Computer Applications*, **83**(17)

[53] Erdemir E., Tanatar B. (2003). q-Gaussian trial function in high density Bose-Einstein condensates, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **322**, 449-455

[54] Estes A. C. Frangopol D. M. (2001) Bridge lifetime system reliability under multiple limit states, *Journal of bridge engineering*, **6**(6), 523-528

[55] Este AC, Frangopol DM (1999) Repair optimization of highway bridges using system reliability approach, *Journal of Structural Engineering*, **125**(7), 766-75

[56] Exton H. (1978) Handbook of Hypergeomtric Integrals: Theory, Applications, Tables, Computer Programs, *Halsted Press, New York*

[57] Fa K. S., Mendes R. S., Pedreira P. R. B., Lenzi E. K. (2001). q-Gaussian trial function and Bose-Einstein condensation, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **295**(1), 242-245

[58] Finkelstein M. (2008) Failure Rate Modelling for Reliability and Risk, Springer

[59] Gao J., Hu J., Buckley T., White K., Hass C. (2011). Shannon and Renyi entropies to classify effects of mild traumatic brain injury on postural sway, *PLoS One*, **6**(9), e24446

[60] Gell-Mann M., Tsallis C. (eds.) (2004) Nonextensive Entropy - Interdisciplinary Applications, *Oxford University Press, New York*

[61] Glaser R.E. (1980) Bathtub and related failure rate characterizations, *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 667-672

[62] Gastwirth J. L. (1972) The estimation of the Lorenz curve and Gini index, *The Review of Economics and Statistics*, **54**(3), 306-316

[63] Geyer C. J. (2007) Stat 5102 Notes: Fisher Information and Confidence Intervals Using Maximum Likelihood

[64] Ghitany M.E., Al-Awadhi F.A. and Alkhalfan L.A. (2007) Marshall-Olkin Extended Lomax Distribution and Its Application to Censored Data, *Communication in Statistics- Theory and Methods*, **36**(10), 1855-1866

[65] Ghitany M.E., Al-Mutairi D.K., Al-Awadhi F.A. and Al-Burais M.M. (2012) Marshall-Olkin extended Lindley distribution and its application, *IJAM. International Journal of Applied Mathematics*, **25**(5)

[66] Ghitany M.E. (2005) Marshall-Olkin extended Pareto distribution and its application, *IJAM. International Journal of Applied Mathematics*, **18**(1)

[67] Gigliarano C., Basellini U., Bonetti M. (2017). Longevity and concentration in survival times: the log-scale-location family of failure time models,*Lifetime Data Analysis*, **23**, 254-274

[68] Gupta R. D. and Kundu D. (1999) Generalized exponential distributions, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, **41**, 173-188

[69] Gupta R. D. and Kundu D. (2001) Exponentiated exponential family: an alternative to gamma and Weibull, *Biometrical Journal*, **43**, 117-130

[70] Hasumi T. (2009) Hypocenter interval statistics between successive earthquakes in the two-dimensional Burridge-Knopoff model, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **388**(4), 477-482

[71] He B., Cui W. and Du X. (2016) An additive modified Weibull distribution, *Reliability Engineering and System Safety*, **145**, 28-37

[72] Hosking J.R., Wallis J.R. and Wood E.F. (1985) Estimation of the generalized extreme-value distribution by the method of probability-weighted moments, *Technometrics*, **27**(3), 251-261

[73] Jiang Z. Q., Chen W., Zhou W. X. (2008) Scaling in the distribution of intertrade durations of Chinese stocks, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **387**(23), 5818-5825

[74] Jones M.C. and A. Noufaily (2015) Log-location-scale-log-concave distributions for survival and reliability analysis, *Electronic Journal of Statistics*, **9**, 2732-2750

[75] Joag-dev K., Kochar S. and Proschan, F. (1995) A general composition theorem and its applications to certain partial orderings of distributions, *Statistics and Probability Letters*, **22**(2), 111-119.

[76] Kaizoji T. (2006) An interacting-agent model of financial markets from the viewpoint of non-extensive statistical mechanics, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **370**(1), 109-113

[77] Kaizoji T. (2004) Inflation and deflation in financial markets, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **343**, 662-668

[78] Kang J., Lee H.S. (2008) Detection of sudden damages of structure by regularized autoregressive model using measured acceleration in *Bridge Maintenance, Safety, Management, Health Monitoring and Informatics - Koh şi Frangopol (eds)* 2008 Taylor and Francis Group, London

[79] Kchouk B., Dussault J.P. (2013) The Chebyshev-Shamanskii Method for Solving Systems of Nonlinear Equations, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **157**, 148-167

[80] Khan S.A. (2017). Exponentiated Weibull regression for time-to-event data, *Lifetime Data Analysis*, 1-27

[81] Khan M.S. şi King R. (2013) Transmuted modified Weibull distribution: A generalization of the modified Weibull probability distribution, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, **6**(1), 66-88

[82] Kotz S. şi Nadarajah S. (2000) Extreme Value Distribution: Theory and Applications, *Imperial College Press, London*

[83] Kolowrocki K. (2014), Reliability of Large and Complex Systems, Second Edition, Springer

[84] Krugman P. (1996) The Self-Organizing Economy, *Blackwell Publishers Cambridge, Massachusetts*

[85] Lai C.D. Xie M. (2006). *Stochastic ageing and dependence for reliability*, Springer

[86] Laniado H., Lillo R.E. (2014). Allocation policies of redundancies in two-parallelseries and two-series-parallel systems. *IEEE Transactions on Reliability*, **63**, 223-229

[87] Lake D. E. (2006). Rényi entropy measures of heart rate Gaussianity, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **53**(1), 21-27

[88] Lawless J.F. (1982) Statistical Models and Methods for Lifetime Data, *John Wiley and Sons, New York*

[89] Leadbetter M.R., Lindgren G. and Rootz'en H. (1987) Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes, *Springer Verlag, New York*

[90] Lee E.T. and Wang J.W. (2003) Statistical Methods for Survival Data Analysis (3rd ed.), *New York, Wiley*

[91] Lemonte A.J. and Cordeiro G.M. (2011) An extended Lomax distribution, *Statistics*, 1-17

[92] Lemonte A.J. (2013) A new extension of the Birnbaum-Saunders distribution, *Brazilian Journal of Probability and Statistics* **27**(2), 133-149

[93] Levitin G., Xing L., Ben-Haim H., Dai Y. (2013) Reliability of Series-Parallel Systems With Random Failure Propagation Time, *IEEE Transactions on Reliability*, **62**(3),637-647

[94] Lehmann E. L. (1953) The power of rank tests, *Annals of Mathematical Statistics*, **24**, 23-43

[95] Lindley D.V. Fiducial distributions and Bayes theorem, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **20**, 102-107

[96] Lindley D.V. (1965) Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint, Part II: Inference, *Cambridge University Press, New York*

[97] Li S., Yang F., Famoye F., Lee C., Black D. (2011). Quasi-negative binomial distribution: Properties and applications, *Computational Statistics* & *Data Analysis*, **55**(7), 2363-2371

[98] Li W., Wang Q. A., Nivanen L., Le Mehaute A. (2005). On different q-systems in non-extensive thermostatistics. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, **48**(1), 95-100

[99] Longin F. (Ed.) (2016). Extreme Events in Finance: A Handbook of Extreme Value Theory and Its Applications. *John Wiley and Sons*

[100] Lucena S. E., Silva A. H. A., Cordeiro G. M. (2015) The Transmuted generalized gamma distribution: properties and application, *Journal of Data Science*, **13**(1), 187-206

[101] Luckstead J., Devadoss S. (2014) A comparison of city size distributions for China and India from 1950 to 2010. *Economics Letters*, **124**(2), 290-295

[102] Lyra M. L., Costa U. M. S., Costa Filho R. N., Andrade Jr. J. S. (2003) Generalized Zipf's law in proportional voting processes. *EPL (Europhysics Letters)*, **62**(1), 131

[103] Marshall A. W. şi Olkin I. (1997) A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families, *Biometrika*, **84**(3), 641-652

[104] Martínez-Flórez G., Bolfarine H. and Gómez H.W. (2014) An alpha-power extension for the Birnbaum-Saunders distribution, *Statistics*, **48**(4), 896-912

[105] Maunsell Ltd (1999), Serviceable life of highway structures and their components, Final Report, Birmingham (UK): Highway Agency

[106] MacGillivray H.L. (1986). Skewness and asymmetry: Measures and orderings, *Annals of Statistics*, **14**, 994–1011.

[107] Mansour M. M. şi Mohamed S. M. (2015) A new generalized of transmuted Lindley distribution, *Applied Mathematical Sciences*, **9**(55), 2729-2748

[108] Marshall A.W. şi Olkin I. (2007) Life distributions; Structure of Nonparametric, Semiparametric, and Parametric Families, *Springer, New York*

[109] Merovci F. (2013) Transmuted Rayleigh Distribution, *Austrian Journal of Statistics*, **42**(1), 21-31

[110] Merovci F., Alizadeh M., Yousof H. M., Hamedani G. G. (2017). The exponentiated transmuted-G family of distributions, *Theory and applications. Communications in Statistics-Theory and Methods*, 1-23

[111] Merovci F. (2013) Transmuted exponentiated exponential distribution, *Mathematical Sciences And Applications E-Notes*, **1**(2), 112-122

[112] Merovci F. şi Llukan Puka (2014) Transmuted Pareto distribution, *ProbStat Forum*, **7**, 1-11

[113] Moreira D. A., Albuquerque E. L., Da Silva L. R., Galvao D. S. (2008). Low-temperature specific heat spectra considering nonextensive long-range correlated quasiperiodic DNA molecules. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **387**(22), 5477-5482

[114] Murthy D. P., Xie M., şi Jiang R. (2004) Weibull models, *John Wiley and Sons*, **505**

[115] Musleh R. M. şi Helu A. (2014) Estimation of the inverse Weibull distribution based on progressively censored data: Comparative study, *Reliability Engineering and System Safety*, **131**, 216-227

[116] Nadar M.O., Frangopol DM (2010) Redundancy of structural systems with and without maintenance: An approach based on lifetime functions, *Reliability Engineering and System Safety*, **95**, 520-533

[117] Nadarajah S. şi Kotz S. (2006) The Exponentiated Type Distributions, *Acta Applicandae Mathematicae*, **92**(2), 97-111

[118] Nadarajah S. (2005) The exponentiated Gumbel distribution with climate application, *Environmetrics*, **17**, 13-23

[119] Nadarajah S. şi Gupta A. K. (2007) The exponentiated gamma distribution with application to drought data, *Calcutta Statistical Association Bulletin*, **59**, 29-54

[120] Nakamichi A., Morikawa M. (2004). Is galaxy distribution non-extensive and non-Gaussian? *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **341**, 215-233

[121] Navarro J. (2008) Likelihood ratio ordering of order statistics, mixtures and systems, *Statistical Planning and Inference*, **138**, 1242-1257

[122] Navarro J. şi M. Shaked (2006) Hazard rate ordering of order statistics and systems, *Journal of Applied Probability*, **43**, 391-408

[123] Nichols M.D. şi Padgett W.J. (2005). A bootstrap control chart for Weibull percentiles, *Quality and Reliability Engineering International*, **22**, 141-151.

[124] Nicolin A. I., Carretero-González R. (2008) Nonlinear dynamics of Bose-condensed gases by means of a q-Gaussian variational approach, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **387**(24), 6032-6044

[125] Niven R. K. (2006) Q-exponential structure of arbitrary-order reaction kinetics, *Chemical Engineering Science*, **61**(11), 3785-3790

[126] Nofal Z.M., Afify A.Z., Yousof H.M. şi Cordeiro G.M. (2017) The generalized transmuted-G family of distributions. *Communications in Statistics- Theory and Methods*, **46**(8), 4119-4136

[127] Rényi A. (1961). On measures of entropy and information. In Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics. The Regents of the University of California.

[128] Oguntunde P. E., Adejumo A. O. şi Balogun O. S. (2014) Statistical Properties of the Exponentiated Generalized Inverted Exponential Distribution, *Applied Mathematics*, **4**(2), 47-55

[129] Peng X., şi Yan Z. (2014) Estimation and application for a new extended Weibull distribution, *Reliability Engineering and System Safety*, **121**, 34-42

[130] Picoli Jr. S., Mendes R. S., Malacarne L. C., Santos R. P. B. (2009) q-distributions in complex systems: a brief review, *Brazilian Journal of Physics*, **39**(2)

[131] Picoli S., Mendes R. S., Malacarne L. C. (2003) q-exponential, Weibull, and q-Weibull distributions: an empirical analysis, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **324**(3), 678-688

[132] Plastino A. R., Plastino A. (1995) Non-extensive statistical mechanics and generalized Fokker-Planck equation, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **222**(1-4), 347-354

[133] Powel M.J.D. (1994) A Direct Search Optimization Method that Models the Objective and Constraint Functions by linear interpolation, in Advances in Optimization and Numerical Analysis, S. Gomez, J.P. Hennart (eds.), 51-67, Kluwer Academic Publishers, London

[134] Preda V., Băncescu I. (2016) A new family of distributions with a general generic distribution for reliability studies. Log-concavity and Application, *International Journal of Risk Theory, Alexandru Myller Publishing Iaşi*, **1**(6), 13-38

[135] Prudnikov A. P., Brychkov Y. A. şi Marichev O. I. (1986) Integrals and Series (vol. 1-3), *Breach Science, Amsterdam, Netherlands*

[136] Politi M., Scalas E. (2008) Fitting the empirical distribution of intertrade durations, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **387**(8), 2025-2034

[137] Podesta T. S. V., Rosembach T. V., dos Santos A. A., Martins M. L. (2017) Anomalous diffusion and q-Weibull velocity distributions in epithelial cell migration, *PloS one*, **12**(7), e0180777

[138] Ross S.M. (1996) Stochastic Processes, *Wiley Series in Probability, John Wiley & Sons*

[139] Oikonomou T., Provata A., Tirnakli U. (2008). Nonextensive statistical approach to non-coding human DNA. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **387**(11), 2653-2659

[140] Saboor A., Kamal M. şi Ahmad M. (2015) The transmuted exponential-Weibull distributions with applications, *Pakistan Journal of Statistics*, **31**(2), 229-250

[141] Salem H.M. (2014) The Exponentiated Lomax Distribution: Different Estimation Methods, *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, **2**(6), 364-368

[142] Sanhueza A., Leiva V., Balakrishnan N. (2008) The generalized Birnbaum-Saunders distribution and its theory, methodology, and application, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **37**(5), 645-670

[143] Santos-Neto M., Bourguignon M., Zea L.M., Nascimento A.D. şi Cordeiro G.M. (2014) The Marshall-Olkin extended Weibull family of distributions, *Journal of Statistical Distributions and Applications*, **1**(1)

[144] Shaked M. şi Shanthikumar J.G. (2007) Stochastic Orders, *Springer Series in Statistics, Springer*

[145] Shaw W. şi Buckley I. (2007) The alchemy of probability distributions: beyond Gram-Charlier expansions and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map, *arXiv prereprint, arXiv, 0901.0434*

[146] Sarabia J. M. (2008) Parametric Lorenz Curves: Models and Applications, *Chapter in "Modeling Income Distributions and Lorenz Curves", pp 167-190, Volume 5 of the series "Economic Studies in Equality, Social Exclusion and Well-Being"*

[147] Shannon C. E., Weaver W. (1949). The mathematical theory of communications, *University Illinois Press*, Urbana

[148] Sharma J. R., Arora H. (2017). Improved Newton-like methods for solving systems of nonlinear equations. *SeMA Journal*, **74**(2), 147-163

[149] Shimada T., Yukawa S., Ito N. (2003). Life-span of families in fossil data forms q-exponential distribution. *International Journal of Modern Physics C*, **14**(09), 1267-1271

[150] Singla N., Jain K. şi Sharma S. K. (2012) The beta generalized Weibull distribution: Properties and applications, *Reliability Engineering and System Safety*, **102**, 5-15

[151] Singh H., Misra H. (1994). On redundancy allocation in systems, *Journal of Applied Probability*, **31**, 1004-1014

[152] Soares A. D., Moura Jr N. J., Ribeiro M. B. (2016). Tsallis statistics in the income distribution of Brazil. *Chaos, Solitons* & *Fractals*, **88**, 158-171.

[153] Subrahmanyam M.B. (1989) An Extension of the simplex method to constrained nonlinear optimization, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **62**(2), 311-319

[154] Takahashi T., Oono H., Inoue T., Boku S., Kako Y., Kitaichi Y., Tanaka T. (2011). Depressive patients are more impulsive and inconsistent in intertemporal choice behavior for monetary gain and loss than healthy subjects-An analysis based on Tsallis' statistics. *arXiv preprint arXiv:1111.6493*

[155] Takahashi T., Oono H., Radford M. H. (2008). Psychophysics of time perception and intertemporal choice models. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **387**(8), 2066-2074

[156] Torrado N., Kochar S. (2015) Stochastic Order Relations Among Parallel Systems from Weibull Distributions. *Journal of Applied Probability*, **52**(1), 102-116. doi:10.1017/S0001867800012222

[157] Tsallis C. (1994) What are the numbers that experiments provide?, *Quimica Nova*, 17:46

[158] Tsallis C., Possible generalization of the Boltzmann-Gibbs statistics, *Journal of Statistical Physics*, **52**, 479-487

[159] Tsallis C., Anteneodo C., Borland L. şi Osorio R. (2003) Nonextensive statistical mechanics and economics, *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, **324**(1-2), 89-100

[160] Tsallis C. (2009) Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics, Approching a Complex World, *Springer*

[161] Tsallis C., Bukman D. J. (1996). Anomalous diffusion in the presence of external forces: Exact time-dependent solutions and their thermostatistical basis. *Physical Review E*, **54**(3), R2197

[162] Tsallis C., Mendes R.S. şi Plastino A.R. (1998) The role of constraints within generalized nonextensive statistics, *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, **261**(3-4), 534-554

[163] Upadhyaya A., Rieu J. P., Glazier J. A., Sawada Y. (2001). Anomalous diffusion and non-Gaussian velocity distribution of Hydra cells in cellular aggregates, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **293**(3), 549-558

[164] Valdes J.E., Zequeira R. (2006). On the optimal allocation of two redundancies in a two-component series system. *Operation Research Letter*, **34**, 49-52

[165] Vahidi A.R., Jayadi S.H., Khorasani S.M. (2012) Solving system of nonlinear equations by restarted adomian's method, *Applied Mathematics and Computation*, **6**, 509-516

[166] Volinsky C. T., Raftery A. E. (2000). Bayesian information criterion for censored survival models. *Biometrics*, **56**(1), 256-262

[167] Walter M., Esch S., Limbourg P. (2009), A copula-based approach for dependability analyses of fault-tolerant systems with interdependent basic events, in *Safety, Reliability and Risk Analysis: Theory, Methods and Applications - Sebastián Martorell, C. Guedes Soares şi Julie Barnett (eds) 2009 Taylor şi Francis Group, Londra, pag. 1705*

[168] Wang P. (2011) A third-order family of newton-like iteration methods for solving nonlinear equations, *Journal of Numerical Math. Stochast.*, **3**, 13-19

[169] Weibull W. (1951) A statistical distribution function of wide applicability. J Appl Mech 1951, **18**, 293-7

[170] Wong K.L. (1991) The physical basis for the roller-coaster hazard rate curve for electronics, *Quality and reliability engineering international*, **7**, 48-95

[171] Yamada H. S., Iguchi K. (2008). q-exponential fitting for distributions of family names. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **387**(7), 1628-1636

[172] Yamano T. (2002) Some properties of q-logarithm and q-exponential functions in Tsallis statistics, *Physica A- Statistical Mechanics and its Applications*, **305**(3-4), 486-496

[173] Yamrubboon D., Bodhisuwan W., Pudprommarat C., Saothayanun L. (2017). The Negative Binomial-Sushila Distribution with Application in Count Data Analysis, *Thailand Statistician*, **15**(1), 69-77

[174] Yang S. I. Frangopol D. M. Neves L. C. (2004) Service life prediction of structural systems using lifetime functions with emphasis on bridges, *Reliability Engineering & System Safety*, **86**(1), 39-51

[175] Yang H.C., Alouini M.-S. (2011), Order Statistics in Wireless Communications Diversity, Adaptation, and Scheduling in MIMO and OFDM Systems, Cambridge Univerisity Press

[176] Yang S.I., Frangopol DM, Neyes LC (2006), Optimum maintenance strategy for deteriorating structures based on lifetime functions, Engineering Structures, **28**(2), 196-206

[177] Yousof H. M., Afify A. Z., Alizadeh M., Butt N. S., Hamedani G. G., Ali M. M. (2015). The transmuted exponentiated generalized-G family of distributions, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, **11**(4)

[178] Zhang F., Shi Y., Ng H. K.T., Wang R. (2016) Tsallis statistics in reliability analysis: Theory and methods *The European Physical Journal Plus*, **131**(10), 379

[179] Zhao P., Chan P., Ng H. K. T. (2012). Optimal allocation of redundancies in series systems. *European Journal of Operational Research*, **220**(3), 673-683