UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI

Facultatea de Matematică şi Informatică

Teză de doctorat
Rezumat în limba română

Contributions to proof mining

Autor:
Andrei Sipoș

Coordonator ştiinţific:
Prof. dr. Laurenţiu Leuştean

Bucureşti, 2017

Rezumat în limba română

Domeniul “proof mining” (introdus şi dezvoltat de Ulrich Kohlenbach) caută să obţină informaţii cantitative din demonstraţii matematice (din diverse domenii) de natură nu neapărat constructivă. O referinţă cuprinzătoare este [42], în vreme ce un rezumat al studiilor din ultimii ani se poate găsi în [43].

Teoria demonstraţiei este una din cele patru sau cinci ramuri principale ale logicii şi are ca obiect studiul demonstraţiilor în sine, scopuri particulare fiind rezultate de consistenţă, transformări structurale şi substructurale, ordinali asociaţi etc.

Întrebarea fundamentală a proof mining-ului este:

“Ce anume ştim în plus dacă am demonstrat o teoremă prin mijloace restrictive decât dacă doar ştim că este adevărată?” (pusă de G. Kreisel în anii ’50)

Răspunsul, dat de Kohlenbach şi de colaboratorii săi în anii ’90 şi 2000 este că prin analiza logică a unei demonstraţii anume se pot obţine:

- termeni ce codifică algoritmi de obţinere a martorilor sau marginilor pentru variabile cuantificate existenţial;
- independenţa de anumiţi parametri sau măcar continuitatea dependenţei;
- slăbirea premiselor sau, mai general, a cadrului axiomatic.

Pentru ca aceasta să funcţioneze, trebuie să impunem anumite condiţii asupra *sistemului logic* şi asupra *complexităţii enunţului teoremei.*

În general folosim sisteme aritmetice cu tipuri înalte, intuiţioniste sau clasice, la care se adaugă anumite principii neconstructive (cum ar fi diverse forme ale axiomei alegerii) şi tipuri ce se referă la spaţiile cu care lucrăm (metrice, normate, Hilbert etc.)

Două asemenea sisteme sunt $\mathcal{A}_i^\omega[X, \langle\cdot,\cdot\rangle, C]$ (intuiţionist) şi $\mathcal{A}^\omega[X, \langle\cdot,\cdot\rangle, C]$ (clasic).

De obicei se folosesc interpretări de demonstraţii pentru a extrage informaţia cantitativă. Metateoreme ce garantează acest fapt au fost dezvoltate de Gerhardy şi Kohlenbach în anii 2000.

Un exemplu de metateoremă este următoarea, pentru logica clasică, ce foloseşte interpretarea funcţională a lui Gödel, în varianta sa “monotonă” introdusă de Kohlenbach, în conjuncţie cu translaţia negativă.

Teorema 1 (cf. Kohlenbach, 2005 [41]). *Fie ρ un tip admisibil şi x o variabilă de tip ρ. Fie $B_\forall(x,u)$ (respectiv $C_\exists(x,v)$) o $\forall$-formulă având doar x,u libere (respectiv o $\exists$-formulă cu doar x,v libere). Dacă*

$$\mathcal{A}^\omega[X, \|\cdot\|] \vdash \forall x^\rho(\forall u^0 B_\forall \to \exists v^0 C_\exists),$$

atunci se poate extrage o funcţională calculabilă Φ astfel încât pentru orice x şi x^* (unde x^* majorează pe x) avem că

$$\forall u \leq \Phi(x^*) B_\forall(x,u) \to \exists v \leq \Phi(x^*) C_\exists(x,v)$$

este adevărată în orice spaţiu normat.

Începem să descriem unul din primele rezultate ale tezei, o aplicaţie a proof mining-ului la o problemă specifică de analiză neliniară.

Presupunem că avem un spaţiu Hilbert H, o mulţime închisă convexă $C \subseteq H$ şi o familie finită de aplicaţii $(T_i : C \to C)_{1 \leq i \leq N}$ cu un punct fix comun.

Problema este de a găsi un punct fix comun.

Vom lucra cu următoarele două condiţii asupra unei aplicaţii $T : C \to C$.

Definiţia 2. *Aplicaţia T se numeşte* **neexpansivă** *dacă pentru orice $x, y \in C$, avem $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$.*

Definiţia 3 (Browder şi Petryshyn, 1967 [12]). *Fie $k \in [0,1)$. Aplicaţia T se numeşte* **k-strict pseudocontractivă** *dacă pentru orice $x, y \in C$, avem*

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k\|(x - Tx) - (y - Ty)\|^2.$$

Observăm că neexpansivă $\Leftrightarrow$ 0–strict pseudocontractivă.

O cale de a rezolva problema găsirii punctului fix pentru aplicaţii ale acestor două clase este *algoritmul paralel*, o generalizare a ubicuului algoritm Mann.

Definim o *familie de ponderi* ca fiind o familie $(\lambda_i^{(n)})_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ 1\leq i\leq N}}$ ce satisface, pentru orice i,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda_i^{(n)} > 0,$$

iar pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^{(n)} = 1.$$

Fie $(\lambda_i^{(n)})_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ 1\leq i\leq N}}$ o familie de ponderi, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1)$ un şir, $x \in C$ un punct, numit *punctul de pornire*.

Scriem, pentru orice $n \geq 0$:

$$A_n := \sum_{i=1}^N \lambda_i^{(n)} T_i.$$

Definim rezultatul algoritmului paralel pentru acest date ca fiind şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$, definit recursiv prin:

$$x_0 := x$$
$$x_{n+1} := t_n x_n + (1-t_n)A_n x_n$$

(Unii autori folosesc “convenţia opusă”, i.e. t_n este interschimbat cu $1-t_n$.)

Algoritmul Mann este cazul particular când $N=1$ (şi deci toate $\lambda_1^{(n)}$ sunt 1). (Acest caz a fost tratat de Ivan şi Leuştean în 2015 [33].)

De acum, vom fixa

- un spaţiu Hilbert H;
- o mulţime convexă închisă $C \subseteq H$;
- o familie finită de aplicaţii $(T_i : C \to C)_{1\le i\le N}$;
- un punct de pornire $x \in C$;
- un şir $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1)$;
- o familie de ponderi $(\lambda_i^{(n)})_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ 1\le i\le N}}$.

În acest context, vom nota cu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rezultatul algoritmului paralel asociat datelor de mai sus.

Rezultatul concret pe care îl vom analiza este următorul.

Teorema 4 (López-Acedo and Xu, 2007 [65])**.** *Fie $k \in (0,1)$ şi presupunem că fiecare T_i este k-strict pseudocontractivă, cu $\bigcap_{i=1}^N Fix(T_i) \neq \emptyset$. Impunem condiţiile:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(t_n - k)(1-t_n) = \infty$$

şi

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}|\lambda_i^{(j+1)} - \lambda_i^{(j)}|} < \infty.$$

Atunci şirul $(x_n)_n$ converge slab la un punct fix al familiei $(T_i : C \to C)_{1\le i\le N}$.

Un rezultat intermediar în demonstraţie (care este deseori o lemă crucială în a arăta astfel de teoreme de convergenţă) este caracteristica lui $(x_n)_n$ de a fi (relativ la contextul nostru) *asimptotic regulat*, i.e.

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - A_n x_n\| = 0.$$

Pentru acest rezultat vom deriva varianta cantitativă.

De asemenea: vom analiza mai întâi cazul mai simplu când T_i-urile sunt neexpansive (adică $k=0$).

Să vedem ce informaţii putem spera să obţinem. Limita dinainte va să zică că:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall N \geq N_\varepsilon (\|x_n - A_n x_n\| < \varepsilon).$$

Ce vrem să găsim este o "formulă" pentru N_ε în funcţie de (evident) ε şi de alte argumente ce ne parametrizează situaţia. O asemenea formulă se numeşte o *rată de convergenţă* pentru şir.

Acum putem să ne întrebăm la propriu cum ne pot ajuta uneltele logice.

Avem în mare două metateoreme generale la dispoziţie, pentru care putem vedea acum compromisurile corespunzătoare:

- cea folosind logica intuiţionistă (şi interpretarea "modified realizability" a lui Kreisel), care:
  - poate extrage margini pentru toate tipurile de formule;
  - nu permite folosirea terţului exclus;
- cea folosind logica clasică (şi interpretarea "funcţională", combinată cu "translaţia negatică"), care:
  - poate extrage margini doar pentru formule Π_2 (adică $\forall\exists$);
  - permite folosirea terţului exclus.

Problema e că demonstraţia regularităţii asimptotice foloseşte terţul exclus (reductio ad absurdum) *şi* are o concluzie non-Π_2 (tocmai am văzut că are o formă $\Pi_3/\forall\exists\forall$).

O problemă similară a fost întâlnită şi rezolvată de Leuştean în 2014 [58] pentru iteraţia Ishikawa.

Vestea bună este că terţul exclus este folosit doar la începutul demonstraţiei pentru a deriva că:

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - A_n x_n\| = 0,$$

care este un enunţ Π_2, având în vedere că poate fi scris ca:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall m \exists N \geq m (\|x_N - A_N x_N\| < \varepsilon).$$

O margine asupra N-ului de mai sus, ce depinde de ε şi de m va fi numit un *modul de liminf* pentru şir.

O caracteristică a metateoremelor logice ale proof mining-ului este că premisele universale pot fi adăugate la sistem fără a influenţa extracţia în ansamblu. Aceasta este crucial aici, din două motive distincte.

Primul este că va trebui să montăm modulul de liminf la a doua parte a demonstraţiei. Înlocuind variabila cuantificată existenţial cu marginea concretă, transformăm enunţul într-unul pur universal (monoton).

Al doilea ar fi venit înainte de primul – ideea e că rezultatul însuşi necesită convergenţa şi divergenţa anumitor serii - trebuie deci să folosim rata de divergenţă $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ şi modulul Cauchy $\gamma : (0,\infty) \to \mathbb{N}$, ce satisfac pentru orice $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{\theta(N)} (t_n - k)(1 - t_n) \geq N.$$

şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$ and $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{j=\gamma(\varepsilon)+1}^{\gamma(\varepsilon)+n} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |\lambda_i^{(j+1)} - \lambda_i^{(j)}|} \leq \varepsilon.$$

pentru a pune aceste premise în formă universală.

Interpretarea funcţională monotonă (combinată cu translaţia negativă) poate deci să fie folosită pentru a obţine rezultatul următor.

Teorema 5. *Fie $b > 0$ şi $p \in \bigcap_{i=1}^N Fix(T_i)$ astfel încât $\|x\| \leq b$ şi $\|x-p\| \leq b$. Notăm, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $m \in \mathbb{N}$:*

$$\Delta_{b,\theta}(\varepsilon, m) := \theta\left(m + \left\lceil \frac{b^2}{\varepsilon^2} \right\rceil\right).$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $m \in \mathbb{N}$, există un $N \in [m, \Delta_{b,\theta}(\varepsilon, m)]$ astfel încât $\|x_N - A_N x_N\| \leq \varepsilon$.

Enunţul de liminf, odată ce N a fost mărginit, devine un enunţ pur universal (monoton), ce, aşa cum am spus, poate fi adăugat ca axiomă în restul demonstraţiei, analizat prin modified realizability. Obţinem următorul rezultat.

Teorema 6. *Notăm, pentru orice $\varepsilon > 0$,*

$$\begin{aligned} \Phi_{b,\theta,\gamma}(\varepsilon) &:= \Delta_{b,\theta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \gamma\left(\frac{\varepsilon}{6b}\right) + 1\right) \\ &= \theta\left(\gamma\left(\frac{\varepsilon}{6b}\right) + \left\lceil \frac{4b^2}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1\right). \end{aligned}$$

Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ avem că pentru orice $n \geq \Phi_{b,\theta,\gamma}(\varepsilon)$, $\|x_n - A_n x_n\| \leq \varepsilon$.

Ne amintim, toate acestea sunt pentru $k = 0$ (neexpansivitate)!

Efectuând demonstraţia pentru cazul neexpansiv, am simplificat-o major şi am eliminat radicalul din presupunerea de convergenţă (cu un nou γ pentru noua serie). Vom folosi acum un truc pentru a demonstra enunţul şi pentru cazul general k-strict pseudocontractiv.

Definiţia 7. *Dacă $T : C \to C$ e o aplicaţie şi $t \in [0,1]$, definim $T_t : C \to C$ ca $T_t x := tx + (1-t)Tx$.*

A se observa că am folosit aceeaşi convenţie ca mai devreme. De asemenea, putem uşor verifica că $T_{1-t_1} T_{1-t_2} = T_{1-t_1 t_2}$, pentru orice $t_1, t_2 \in [0,1]$. O proprietate netrivială este:

Lema 8 ((Browder and Petryshyn, 1967 [12])). *Dacă T este k-strict pseudocontractivă, atunci T_k este neexpansivă.*

Ca o divagaţie, problema găsirii unei generalizări potrivite a pseudocontracţiilor stricte la clase mai largi de spaţii Banach a reprezentat o preocupare în analiza neliniară în ultima decadă.

De pildă, Zhou [84] propune o definiţie pentru cazul spaţiilor Banach E ce satisfac

$$\beta_E^*(x,t) \leq dt$$

pentru un anume $d \geq 1$, unde β_E^* este un modul propus de Cholamjiak şi Suantai [15].

Un rezultat al tezei este că această condiţie este de fapt echivalentă cu cea de a fi 2-uniform neted.

Lema 9. *Fie E un spaţiu Banach neted. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *E este 2-uniform neted, i.e. există un $c > 0$ astfel încât pentru orice τ, $\rho_E(\tau) \leq c\tau^2$;*
2. *există un $d > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in E$ avem că $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2j(x)(y) + d\|y\|^2$;*
3. *există un $d > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E$ şi orice $t \geq 0$ avem $\beta_E^*(x,t) \leq dt$ (i.e., condiţia lui Zhou).*

Mai mult, constantele din (ii) şi (iii) se pot lua ca fiind aceeaşi (de aceea am şi folosit aceeaşi literă).

Acum, 2-uniform netezimea este caracterizată de constanta c, iar pentru clarificarea treburilor dinainte, avem nevoie de constanta d.

Am arătat în teză că se poate obţine prin formula

$$d_c := \frac{8}{\min\left(\frac{1}{16c}, 2 - \sqrt{2}\right)}$$

şi clar avem $d_c \geq 1$.

Aşadar este imediat că putem extinde lema lui Browder şi Petryshyn la spaţii Banach 2-uniform netede.

Teorema 10. *Fie E un spaţiu Banach 2-unform neted, i.e. există $c > 0$ astfel încât pentru orice τ, $\rho_E(\tau) \leq c\tau^2$. Fie $C \subseteq E$ o mulţime convexă. Fie $k \in (0,1)$ şi $T : C \to C$ o pseudocontraţie k-strictă.*

Atunci $T_{1-\frac{1-k}{d_c}}$ este neexpansivă.

Această lemă în variile ei încarnări capturează tot ce este esenţial despre pseudocontracţii stricte. În conjuncţie cu faptul că T_k are aceleaşi puncte fixe ca T, pentru orice T şi k, a dus la:

- Demonstraţii mai simple pentru teoreme de convergenţă ca cele din [69, 84].
- Metode mai simple de a arăta rezultate asociate de regularitate asimptotică.

Pentru mai multe detalii, v. [75].

Întorcându-ne la cazul algoritmului paralel, lema ne ajută să derivăm varianta generală cantitativă.

Teorema 11. *Notăm, pentru orice* $\varepsilon > 0$,

$$\Phi'_{b,k,\theta,\gamma}(\varepsilon) := \theta\left(\gamma\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{6b}\right) + \left\lceil \frac{4b^2}{(1-k)^2\varepsilon^2} \right\rceil + 1\right).$$

Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ *avem că pentru orice* $n \geq \Phi'_{b,k,\theta,\gamma}(\varepsilon)$, $\|x_n - A_n x_n\| \leq \varepsilon$.

Nu este pesemne potrivit ca atunci când derivăm rezultate cantitative asupra algoritmilor ce se referă la familii de aplicaţii $(T_i)_i$, folosind aplicaţii auxiliare $(A_n)_n$, să vorbim despre rata de convergenţă pentru:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - A_n x_n\| = 0$$

ca fiind o rată propriu-zisă de regularitate asimptotică. Mai bine ar fi să vorbim despre rate individuale, pentru fiecare i, ale enunţurilor:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| = 0.$$

Ne amintim că fiecare A_n era o combinaţie convexă de T_i-uri. Această proprietate este folosită pentru a deriva, în mare, că un punct fix al unei asemenea combinaţii A este un punct fix al fiecărei T_i, i.e. că:

$$\forall q \in C(\forall \delta > 0 \|q - Aq\| \leq \delta \to \forall \varepsilon > 0 \|q - T_i q\| < \varepsilon)$$

scris şi în forma echivalentă logic:

$$\forall q \in C \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\|q - Aq\| \leq \delta \to \|q - T_i q\| < \varepsilon)$$

Putem aplica, din nou, pe acest enunţ $\forall\exists$, metateorema generală de proof miningpentru a găsi δ ca funcţie de ε. Atunci rata de T_i-regularitate asimptoticăeste obţinută imediat. Un exemplu similar se poate găsi în [37].

Obţinem rezultatul cu adevărat final despre algoritmul paralel.

Teorema 12. *Notăm pentru orice* $\varepsilon > 0$*:*

$$\Phi''_{a,b,k,\theta,\gamma}(\varepsilon) := \Phi_{b,\theta,\gamma}\left(\min\left\{\frac{(1-k)\varepsilon}{2}, \sqrt{\frac{a(1-k)^2\varepsilon^2}{4(1-a)} + b^2} - b\right\}\right),$$

Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ *avem că pentru orice* $n \geq \Phi''_{a,b,k,\theta,\gamma}(\varepsilon)$ *şi pentru orice* i, $\|x_n - T_i x_n\| \leq \varepsilon$.

Pentru o expoziţiune mai detaliată, v. [76].

Cum formula pentru convergenţă nu este într-o formă $\Pi_2/\forall\exists$ şi în general lucrăm cu interpretarea pentru logica clasică, în anumite cazuri vom obţine varianta cantitativă a formei normale Herbrand a proprietăţii de a fi Cauchy, aşa numita *rată de metastabilitate* (în sensul lui T. Tao [79, 80]). Metastabilitatea poate fi formulată ca:

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \exists n \forall i, j \in [n, n + g(n)] d(x_i, x_j) \leq \frac{1}{k+1},$$

care, se poate vedea, este un enunţ Π_2 la modul extins. O *rată de metastabilitate* va fi o margine $\Psi(k, g)$ asupra lui n.

O rată de metastabilitate este ceea ce am extras pentru iteraţia Ishikawa în contextul pentru care a fost original introdusă, i.e. pseudocontracţii Lipschitz pentru mulţimi compacte, folosind tehnici dezvoltate de U. Kohlenbach, L. Leuştean si A. Nicolae pentru lucrul cu şiruri Fejér monotone.

Pentru mai multe informaţii, v. [60].

Trecem acum la un alt subiect. Fie H un spaţiu Hilbert.

Spunem că un operator multivoc $A : H \to 2^H$ este *monoton* dacă pentru orice $x, y, u, v \in H$ cu $u \in A(x)$ şi $v \in A(y)$ avem că

$$\langle x - y, u - v\rangle \geq 0.$$

Spunem că este *maximal monoton* dacă este maximal printre operatorii monotoni atunci când îi considerăm ca submulţimi ai lui $H \times H$.

Scopul algoritmului punctului proximal (PPA) este de a găsi *zerouri* ale lui A, i.e. puncte $x \in H$ cu $0 \in A(x)$.

Unealta principală folosită este *rezolventul* lui A, i.e. aplicaţia definită prin:

$$J_A := (id + A)^{-1}.$$

Avem următoarele rezultate clasice din optimizarea convexă:

- dacă A este maximal monoton, atunci J_A este univoc;
- pentru orice $x \in H$, x este un zerou al lui A dacă şi numai dacă x este un punct fix al lui J_A.

Acum putem enunţa teorema PPA.

Teorema 13 (Algoritmul Punctului Proximal)**.** *Fie $A : H \to 2^H$ un operator maximal monoton ce are măcar un zerou şi fie $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ astfel încât $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^2 = \infty$. Fie $x \in H$. Punem $x_0 := x$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} := J_{\gamma_n A} x_n$.*

Atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge slab la un zerou al lui A.

Un caz particular al său, pe care îl vom analiza mai întâi este: dacă mulţimea zerourilor lui A are interiorul nevid, atunci convergenţa este tare.

Tratăm şi în acest caz formularea metastabilă a enunţului.

Teorema 14. *Pentru orice $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definim $\chi_g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ recursiv, după cum urmează:*

$$\chi_g(0) := 0$$

$$\chi_g(n + 1) := \chi_g(n) + g(\chi_g(n))$$

Notăm acum, pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\Phi_{b,r}(k,g) := \chi_g\left(\left\lceil \frac{b^2(k+1)}{2r} \right\rceil\right).$$

Atunci, în acest caz, $\Phi_{b,r}$ este o rată de metastabilitate pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aceasta este o aplicaţie simplă a "principiului finit de convergenţă" al lui Tao [79].

Cel mai interesant caz pentru extragerea de margini va fi atunci când operatorul este "uniform monoton", i.e. satisface inegalitatea mai puternică:

$$\langle x-y, u-v\rangle \geq \phi(\|x-y\|)$$

relativ la o funcţie crescătoare $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ce se anulează doar în 0.

În acest caz, se cunoaşte că zeroul este unic, iar convergenţa este necesar tare.

Urmându-l pe Briseid [11], putem încerca să obţinem varianta cantitativă a următorului enunţ de unicitate pentru un punct fix:

$$\forall x \forall y (Tx = x \wedge Ty = y \to x = y).$$

Pentru aceasta, exploatăm implementarea semnului de egalitate din sistemul nostru, i.e. scriem ce e mai sus ca:

$$\forall x \forall y (\forall \delta (d(Tx,x) \leq \delta \wedge d(Ty,y) \leq \delta) \to \forall \varepsilon (d(x,y) \leq \varepsilon),$$

ceea ce se prenexează ca:

$$\forall x \forall y \forall \varepsilon \exists \delta ((d(Tx,x) \leq \delta \wedge d(Ty,y) \leq \delta) \to (d(x,y) \leq \varepsilon).$$

Varianta cantitativă este:

$$\forall x \forall y \forall \varepsilon ((d(Tx,x) \leq \delta(\varepsilon) \wedge d(Ty,y) \leq \delta(\varepsilon)) \to (d(x,y) \leq \varepsilon),$$

unde $\delta(\varepsilon)$ este cantitatea extrasă prin proof mining, numită "modul de unicitate".

Eyvind Briseid a observat în teza sa de doctorat că acest modul, împreună cu o lemă asociată de regularitate asimptotică ar putea ajuta în obţinerea ratei de convergenţă direct, indiferent de principiile folosite în demonstraţie (exceptând în acea lemă).

În cazul nostru, având în vedere că folosim o întreagă familie de aplicaţii pentru care zeroul căutat este punct fix, a trebuit să modificăm ideea, astfel încât folosim modulul de unicitate doar implicit. Lema relevantă este următoarea:

Lema 15. *În acest cadru, dacă $x \in H$ şi z e un zerou al lui A, avem că:*

$$\gamma\phi(d(J_{\gamma A}x,z)) \leq d(x,J_{\gamma A}x)d(J_{\gamma A}x,z).$$

Rezultatul corespunzător de regularitate asimptotică va fi:

Lema 16. *Definim $\Sigma_b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pentru orice k, prin $\Sigma_{b,\theta}(k) := \theta(b^2(k+1)^2)$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi orice $n \geq \Sigma_{b,\theta}(k)$, avem că*

$$\frac{d(x_n, x_{n+1})}{\gamma_n} \leq \frac{1}{k+1}.$$

Punând toate acestea cap la cap, obţinem rezultatul principal cantitativ:

Teorema 17. *Punem, pentru orice $k \in \mathbb{N}$,*

$$\Psi_{b,\theta,\phi}(k) := \Sigma_{b,\theta}\left(\left\lceil \frac{2b}{\phi\left(\frac{1}{k+1}\right)} \right\rceil\right) + 1,$$

unde $\Sigma_{b,\theta}$ este cel din lema precedentă

Atunci $\Psi_{b,\theta,\phi}$ este o rată de convergenţă pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Un ultim rezultat cantitativ afirmă că în anumite cazuri, algoritmul converge într-un număr finit şi calculat de paşi.

Teorema 18. *Presupunem că există un $\eta > 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi pentru orice $w \in C$ cu $\|w - z\| \leq \eta$ avem că $T_n w = z$. Atunci pentru orice $n \geq \Delta_b\left(\left\lceil \frac{2}{\eta} \right\rceil\right) + 1$, avem că $x_n = z$, unde Δ_b este definit, pentru orice k, prin $\Delta_b(k) := b^2(k+1)^2$.*

Numele "algoritmul punctului proximal" denotă o întreagă familie de asemenea scheme iterative, implicând nu numai spaţii Hilbert, dar şi unele mai generale precum spaţiile CAT(0).

De asemenea, poate fi folosit pentru a găi minime ale func tiilor convexe şi puncte fixe ale aplicaţiilor neexpansive.

Ne amintim că am avut un şir $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ şi am asociat la fiecare pas n rezolventul de ordin γ_n al operatorului nostru maximal monoton. Toate PPA-urile cunoscute folosesc această schemă, ceea ce ridică întrebarea dacă asta ar putea fi generalizat natural.

Răspunsul este afirmativ şi constă în următoarele definiţii.

Definiţia 19. *Fie X un spaţiu CAT(0), $(T_n : X \to X)_{n\in\mathbb{N}}$ o familie de aplicaţii şi $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$. Spunem că o familie $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este* **în ansamblu ferm neexpansivă** *(jointly firmly nonexpansive) relativ la şirul $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $x, y \in X$ şi orice $\alpha, \beta \in [0,1]$ cu $(1-\alpha)\gamma_n = (1-\beta)\gamma_m$ avem că:*

$$d(T_n x, T_m y) \leq d((1-\alpha)x + \alpha T_n x, (1-\beta)y + \beta T_m y).$$

Definiţia 20. *Fie H un spaţiu Hilbert, $(T_n : H \to H)_{n\in\mathbb{N}}$ o familie de aplicaţii şi $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$. Spunem că o familie $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este* **în ansamblu** *(P_2) (jointly (P_2)) relativ la şirul $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$ şi orice $x, y \in H$ avem că:*

$$\frac{1}{\gamma_n}\langle T_n x - T_m y, x - T_n x\rangle \geq \frac{1}{\gamma_m}\langle T_n x - T_m y, y - T_m y\rangle.$$

Această condiţie "în ansamblu (P_2)" poate fi exprimată şi în spaţii CAT(0) prin:

$$\frac{1}{\gamma_n}\langle \overrightarrow{T_n x T_m y}, \overrightarrow{x T_n x}\rangle \geq \frac{1}{\gamma_m}\langle \overrightarrow{T_n x T_m y}, \overrightarrow{y T_m y}\rangle,$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este funcţia de *quasi-liniarizare* introdusă de Berg şi Nikolaev [9].

Ea este, totuşi, strict mai generală decât cea "în ansamblu ferm neexpansivă" (deşi cele două sunt echivalente în spaţii Hilbert).

Cele mai surprinzătoare fapte sunt:

- toate instanţele cunoscute ale PPA produc familii în ansamblu ferm neexpansive;
- orice familie în ansamblu ferm neexpansivă este în ansamblu (P_2);
- se poate arăta convergenţa PPA în spaţii CAT(0) pentru familii ce sunt presupuse a fi doar în ansamblu (P_2).

Toate rezultatele cantitative prezentate anterior pot fi exprimate în acest cadru general, **incluzându-le** pe cele uniforme (ce unifică, de pildă, problema găsirii zerourilor aplicaţiilor uniform monotone de dinainte cu cea a găsirii punctelor de minim ale funcţiilor uniform convexe).

Pentru mai multe detalii, v. [59].

Acum, ne vom concentra mai mult pe situaţia din spaţiile CAT(0). Dacă X este un spaţiu CAT(0), iar $f : X \to (-\infty, \infty]$ este o funcţie convexă, inferior semicontinuă, proprie, putem defini (după Jost[35]) rezolventul său $J_f : X \to X$, pentru orice $x \in X$, prin:

$$J_f(x) := \mathrm{argmin}_{y\in X}\left[f(y) + \frac{1}{2}d^2(x,y)\right].$$

Rezultatul următor a fost obţinut de Bačák în 2013.

Teorema 21 ([4])**.** *Fie $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ un şir potrivit de ponderi. Fie $x \in X$. Punem $x_0 := x$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} := J_{\gamma_n f} x_n$.*

Atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge slab la un punct de minim al lui f.

Aceasta este una din construcţiile ce duc de asemenea la familii în ansamblu ferm neexpansive.

Cazul local compact a fost analizat folosit aceleaşi tehnici Fejér folosite mai sus la iteraţia Ishikawa. Pentru mai multe detalii, v. [61].

Ultimul rezultat al tezei reprezintă o explorare mai adâncă a fundamentelor proof mining-ului. Am lucrat până acum cu o logică capabilă de a lucra cu structuri metrice sau normate. Istoric, au fost patru încercări majore de a realiza aşa ceva:

1. logici continue (Chang şi Keisler, 1966 [13])
2. logica formulelor pozitiv-mărginite (Henson, 1976 [27]; Henson şi Iovino, 2002 [28])

3. teorii compacte abstracte / logic de ordinul întâi continuă (Ben Yaacov et al. în anii 2000 [8])
4. extensii ale sistemelor aritmetice cu tipuri înalte (Kohlenbach în anii 2000 [41])

Despre (4) am vorbit până acum şi va fi şi ţelul nostru; (3) este caz particular al lui (1), care este prea general pentru a fi util; despre (2) s-a arătat că este echivalent cu (3) şi este preferabil în anumite situaţii – despre el vom vorbi în continuare.

Să prezentăm ideile de bază ale logicii formulelor pozitiv-mărginite.

Signaturile sunt signaturi de ordinul întâi multisortate, adăugându-se un sort special pentru numere reale. De asemenea, simbolurile de funcţie trebuie să includă operaţiile canonice de spaţiu normat pentru fiece sort.

Modelele pentru o asemenea signatură constau în modele obişnuite de ordinul întâi multisortate cu proprietatea că fiecare mulţime subiacentă este spaţiu normat relativ la funciîle canonice, sortul numerelor reale este instanţiat cu structura canonică iar toate operaţiile sunt uniform continue pe submulţimi mărginite.

Formulele sunt construite în următorul mod:

1. formulele atomice sunt de forma $t \leq r$ sau $r \leq t$, unde t este termen de sort real, iar $r \in \mathbb{Q}$;
2. permitem conjuncţii şi disjuncţii;
3. în sfârşit, adăugam cuantificatori "mărginiţi", care acţionează ca $\exists x(\|x\| \leq r \wedge \varphi)$ and $\forall x(\|x\| \leq r \to \varphi)$, unde $r \in \mathbb{Q}$.

Această logică a fost studiată în principal din perspectiva teoriei modelelor, folosind conceptul de *semantică aproximativă*. Günzel şi Kohlenbach au arătat în 2016 [26] cum poate fi tradusă în proof mining.

Ei au definit clasa $\mathcal{PBL}$, conţinând formule de următoarea formă:

$$\forall l^{\mathbb{N}} \forall_{r_1} x_1^{\tilde{X}} \exists_{s_1} y_1^{\tilde{X}} \ldots \forall_{r_m} x_m^{\tilde{X}} \exists_{s_m} y_m^{\tilde{X}} (T(\underline{x}, \underline{y}, l) =_{\mathbb{R}} 0)$$

unde prin $\tilde{X}$ notăm şi numere reale şi elemente ale spaţiului, prin $\forall_r$ (respectiv $\exists_r$) notăm cuantificatorii mărginiţi de dinainte, iar r_i-urile şi s_i-urile pot conţine doar variabila l.

Formulele pozitiv-mărginite pot fi uşor traduse în această clasă prin prenexare şi realizarea unor operaţii simple.

Partea fără cuantificatori este tradusă după cum urmează:

- $r \leq_{\mathbb{R}} t$ este înlocuit de $\min\{r, t\} - r =_{\mathbb{R}} 0$;
- $t \leq_{\mathbb{R}} r$ este înlocuit de $\min\{r, t\} - t =_{\mathbb{R}} 0$;
- $t_1 =_{\mathbb{R}} 0 \vee t_2 =_{\mathbb{R}} 0$ este înlocuit de $\min\{|t_1|, |t_2|\} =_{\mathbb{R}} 0$;

- $t_1 =_{\mathbb{R}} 0 \wedge t_2 =_{\mathbb{R}} 0$ este înlocuit de $\max\{|t_1|, |t_2|\} =_{\mathbb{R}} 0$.

Vom avea nevoie şi de aserţiunea privind continuitatea uniformă, codificată ca:

$$\begin{gathered} U_m(T, \omega_T) := \forall n^0, b^0, l^0 \forall_b x_1, z_1, y_1, w_1, \ldots y_m, w_m \\ (\bigwedge_{i=1}^{m} \|x_i - z_i\|, \|y_i - w_i\| <_{\mathbb{R}} 2^{-\omega_T(b,n,l)} \to \\ |T(\underline{x}, \underline{y}, l) - T(\underline{z}, \underline{w}, l)| \leq_{\mathbb{R}} 2^{-n}) \end{gathered}$$

Altă clasă de formule, în care formulele $\mathcal{PBL}$ vor fi traduse la rândul lor, este cea a Δ-formulelor, de forma următoare:

$$\forall \underline{a} \exists \underline{b} \leq \underline{ra} \forall \underline{c} B(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$$

unde B este fără cuantificatori, iar tipurile posibile ale $\underline{a}$, $\underline{b}$ şi $\underline{c}$ sunt restrânse la tipuri "admisibile".

Acest tip de formule are de obicei un comportament bun relativ la variantele monotone ale interpretărilor de demonstraţii (v. [42]).

O formulă $\mathcal{PBL}$ precum cea arătată mai devreme va fi tradusă în următoarea Δ-formulă:

$$\exists \underline{Y} \forall l^{\mathbb{N}} \forall \underline{x} \left(\bigwedge_{i=1}^{m} Y_i \leq \lambda y, l.s_i \wedge T(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y} \, \underline{\tilde{x}} l, l) =_{\mathbb{R}} 0 \right)$$

i.e. o skolemizare ce foloseşte şi construcţia specială $x \mapsto \tilde{x}$ şi unde putem elimina mărginirea cuantificatorilor universali din raţiuni de extensionalitate şi uniform continuitate.

Demonstrarea validităţii acestei translaţii este porţiunea netrivială a rezultatului lui Günzel şi Kohlenbach, enunţat după cum urmează.

Teorema 22 (Günzel and Kohlenbach, 2016 [26])**.** *Fie Θ o mulţime de propoziţii $\mathcal{PBL}$ pentru care $U_m(T, \omega_T)$-urile sunt demonstrabile în $\mathcal{A}^\omega[X, \|\cdot\|]$. Fie $B_\forall(x, u)$ (respectiv $C_\exists(x, v)$) o $\forall$-formulă având doar x, u libere (respectiv o $\exists$-formulă având doar x, v libere). Dacă*

$$\mathcal{A}^\omega[X, \|\cdot\|] + \Theta \vdash \forall x^\rho (\forall u^0 B_\forall \to \exists v^0 C_\exists),$$

atunci se poate extrage o funcţională calculabilă Φ astfel încât pentru orice x şi x^* (unde x^* majorează pe x) avem că

$$\forall u \leq \Phi(x^*) B_\forall(x, u) \to \exists v \leq \Phi(x^*) C_\exists(x, v)$$

ţine în orice model al sistemului corespunzător.

În articolul lor, au fost considerate următoarele subclase de latici Banach axiomatizabile prin Δ-formule:

- clasa tuturor laticilor Banach

- latici $L^p(\mu)$
  - din care, cazul cu μ fără atomi
- latici $C(K)$
- latici BL^pL^q

Scopul nostru va fi să adaptăm o axiomatizare a spaţiilor $L^p(\mu)$ doar ca spaţii Banach (fără a considera o structură laticială).

Vom pleca de la următoarea caracterizare:

Teorema 23 (Lindenstrauss, Pelczynski, Tzafriri – anii '60 [63, 64, 82])**.** *Un spaţiu Banach este izometric cu un spaţiu $L^p(\mu)$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice subspaţiu al său finit dimensional B, există un subspaţiu finit-dimensional C ce conţine pe B şi este "$(1+\varepsilon)$-izometric" (judecând după distanţa Banach-Mazur) cu un spaţiu Banach finit-dimensional cu norma p standard.*

Deşi este implicită, caracterizarea de mai sus nu este potrivită pentru un tratament logic, deoarece nu avem o margine a priori asupra dimensiunii lui C, ceea ce ar duce la formule infinit de lungi sau la cuantificatori existenţiali nemărginiţi.

Trucul este de a folosi porţiuni ale demonstraţiei direcţiei "numai dacă" (dintr-o carte din 1973 a lui Lindenstrauss şi Tzafriri [64]) plus anumite idei ale lui Henson şi Raynaud [29], ce ne oferă următoarea caracterizare alternativă.

Teorema 24. *Un spaţiu Banach X este izometric cu un spaţiu $L^p(\mu)$ dacă pentru orice $x_1,\ldots, x_n$ in X de normă mai mică ca 1 şi pentru orice $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, există un subspaţiu $C \subseteq X$ şi $y_1,\ldots, y_n$ în C de normă mai mică decât 1 astfel încât C este de dimensiune cel mult $(4nN+1)^n$, este izometric cu $\mathbb{R}_p^{\dim_{\mathbb{R}} C}$ şi pentru orice i, $\|x_i - y_i\| \leq \frac{1}{N}$.*

După cum putem vedea, dimensiunea lui C este acum mărginită, iar aproximarea a fost "permutată". Demonstraţia ne oferă şi marginile asupra normelor ce vor fi utile în axiomatizarea finală.

Putem traduce condiţia dinainte într-un set brut de axiome de "ordinul întâi ($A_{n,N}$-urile de mai jos).

$$\begin{gathered}
\psi_m(\underline{z}) := \forall \underline{\lambda} \left(\|\textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i z_i\| = (\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^p)^{\frac{1}{p}} \right) \\
\psi'_{m,n}(\underline{y}, \underline{z}) := \textstyle\bigwedge_{k=1}^n \left(\exists \underline{\lambda} \left(y_k = \sum_{i=1}^m \lambda_i z_i\right)\right) \\
\psi''_{n,N}(\underline{x}, \underline{y}) := \textstyle\bigwedge_{k=1}^n \left(\|x_k - y_k\| \leq \frac{1}{N+1} \wedge \|y_k\| \leq 1 \right) \\
\varphi_{n,m,N}(\underline{x}) := \exists \underline{y} \exists \underline{z} \left(\psi_m(\underline{z}) \wedge \psi'_{m,n}(\underline{y}, \underline{z}) \wedge \psi''_{n,N}(\underline{x}, \underline{y}) \right) \\
\phi_{n,N}(\underline{x}) := \textstyle\bigvee_{0 \leq m \leq (4nN+1)^n} \varphi_{n,m,N}(\underline{x}) \\
A_{n,N} := \forall \underline{x} \left(\left(\textstyle\bigwedge_{k=1}^n \|x_k\| \leq 1\right) \to \phi_{n,N}(\underline{x}) \right)
\end{gathered}$$

Totuşi, rămâne întrebarea de ce putem trata axiomele dinainte ca Δ-axiome cu care putem lucra. Ceea ce trebuie să facem este să mărginim cuantificatorii existenţiali.

În primul rând, considerăm generatorii ca fiind de normă mai mică ca 1 printr-o operaţie (astfel că nu adăugăm complexitate la formule); apoi, din prima formulă, vedem că z_i-urile trebuie să fie de normă egală cu unu; y_k-urile sunt deja mărginiţi de 1; în sfârşit, a doua formulă combinată cu prima şi cu marginea asupra lui x duce la o margine similară asupra λ-urilor.

Aşadar, formularea Δ a $A_{n,N}$-urilor, notată cu B, este definită după cum urmează.

$$
\begin{gathered}
\psi(m,z) := \forall \lambda^{1(0)(0)} \left(\|\textstyle\sum_{i=1}^{m} |\lambda(i)|_{\mathbb{R}} \cdot_X z(i)\| =_{\mathbb{R}} (\sum_{i=1}^{m} |\lambda(i)|_{\mathbb{R}}^{p})^{1/p} \right) \\
\psi'(m,n,y,z,\lambda) := \forall k \preceq_0 (n-1) \\
(y(k+1) =_X \textstyle\sum_{i=1}^{m} \lambda(i) \cdot_C z(i)) \\
\psi''(n,N,x,y) := \forall k \preceq_0 (n-1) \\
\left(\left\| \widetilde{x(k+1)} - y(k+1) \right\| \leq_{\mathbb{R}} \frac{1}{N} \wedge \|y(k+1)\| \leq_{\mathbb{R}} 1 \right) \\
\varphi(n,m,N,x,y,z,\lambda) := \psi(m,z) \wedge \psi'(m,n,y,z,\lambda) \wedge \psi''(n,N,x,y) \\
B := \forall n^0, N^0 \geq 1 \forall x^{X(0)} \exists y, z \preceq_{X(0)(0)} 1_{X(0)(0)} \exists \lambda^{1(0)(0)(0)} \in [-2,2] \\
\exists m \preceq_0 (4nN+1)^n \varphi(n,m,N,x,y,z,\lambda)
\end{gathered}
$$

Teoremele şi discuţia de mai sus atestă că această nouă teorie ce conţine axioma B (plus o constată p cu constrângerea $1 \leq p$) prinde spaţiile $L^p(\mu)$.

Avem aşadar următoarea metateoremă.

Teorema 25. *Fie $B_\forall(x,u)$ (respectiv $C_\exists(x,v)$) o $\forall$-formulă având doar x,u libere (respectiv o $\exists$-formulă având doar x,v libere). Dacă*

$$\mathcal{A}^\omega[X, \|\cdot\|, L^p] \vdash \forall x^\rho (\forall u^0 B_\forall \to \exists v^0 C_\exists),$$

atunci se poate extrage o funcţională calculabilă Φ astfel încât pentru orice x şi x^* (unde x^* majorează pe x) avem că

$$\forall u \leq \Phi(x^*) B_\forall(x,u) \to \exists v \leq \Phi(x^*) C_\exists(x,v)$$

ţine în orice spaţiu Banach $L^p(\mu)$.

Noua axiomatizare, fiind în genere o teoremă de comparaţie cu spaţiul euclidian p-normat, este destul de prietenoasă aplicaţiilor. Dată fiind o demonstraţie existentă despre spaţii $L^p(\mu)$, ea poate fi tradusă în acest sistem deoarece:

- când o particularizăm la cazul $\mathbb{R}^n_p$, enunţurile despre integrale se transformă în enunţuri despre sume de numere reale, care sunt cel mai probabil demonstrabile în $\mathcal{A}^\omega$ şi/sau formule universale ce pot fi adăugate liber la sistem fără să avem treabă cu extracţia marginilor;
- argumentul de aproximare implică o serie de mărginiri via ε-uri, ce sunt de asemenea probabil formalizabile.

Ca exemplu, am formalizat demonstraţia validităţii modulului canonic de convexitate uniformă pentru acest tip de spaţii (în cazul $p \geq 2$).

Teorema 26. *Demonstrabil în sistemul nostru (plus axioma* $2 \leq_{\mathbb{R}} c_p$ *şi alte două axiome universale), funcţia* $\eta : (0, 2] \to (0, \infty)$*, definită, pentru orice* ε*, prin* $\eta(\varepsilon) := 1 - (1 - (\frac{\varepsilon}{2})^p)^{1/p}$*, este un modul de convexitate uniformă.*

În acest caz, rezultatul intermediar despre numere reale este în principal inegalitatea lui Clarkson.

Toate acestea se pot regăsi într-o formă detaliată în [77].

Bibliography

[1] D. Ariza-Ruiz, L. Leuştean, G. López-Acedo, Firmly nonexpansive mappings in classes of geodesic spaces. *Transactions of the American Mathematical Society* 366, 4299–4322, 2014.

[2] D. Ariza-Ruiz, G. López-Acedo, A. Nicolae, The asymptotic behavior of the composition of firmly nonexpansive mappings. *J. Optim. Theory Appl.* 167, 409–429, 2015.

[3] J. Avigad, J. Iovino, Ultraproducts and metastability. *New York J. of Math.* 19, 713–727, 2013.

[4] M. Bačák, The proximal point algorithm in metric spaces. *Israel J. Math.* 194, no. 2, 689–701, 2013.

[5] M. Bačák, S. Reich, The asymptotic behavior of a class of nonlinear semigroups in Hadamard spaces. *J. Fixed Point Theory Appl.* 16, 189–202, 2014.

[6] M. Bačák, I. Searston, B. Sims, Alternating projections in CAT(0) spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 385, no. 2, 599–607, 2012.

[7] H. Bauschke, P. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces.* Springer, 2010.

[8] I. Ben Yaacov, A. Berenstein, C. W. Henson, A. Usvyatsov, *Model theory for metric structures.* In: *Model theory with applications to algebra and analysis.* Vol. 2, 315–427, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 350, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

[9] I. D. Berg, I. G. Nikolaev, Quasilinearization and curvature of Alexandrov spaces. *Geom. Dedicata* 133, 195–218, 2008.

[10] H. Brézis, P. Lions, Produits infinis de résolvantes. *Israel J. Math.* 29, 329–345, 1978.

[11] E. M. Briseid, Logical aspects of rates of convergence in metric spaces. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 74, No. 4, pp. 1401–1428, 2009.

[12] F. E. Browder, W. V. Petryshyn, Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 20:197–228, 1967.

[13] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Continuous model theory.* Princeton University Press, 1966.

[14] C. E. Chidume, S. A. Mutangadura, An example on the Mann iteration method for Lipschitz pseudo-contractions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 129, 2359–2363, 2001.

[15] P. Cholamjiak, S. Suantai, Weak and strong convergence theorems for a countable family of strict pseudocontractions in Banach spaces. *Optimization* 62, no. 2, 255–270, 2013.

[16] V. Colao, G. Marino, Common fixed points of strict pseudocontractions by iterative algorithms. *J. Math. Anal. Appl.* 382(2):631–644, 2011.

[17] S. Dhompongsa, W. Kirk, B. Sims, Fixed points of uniformly Lipschitzian mappings. *Nonlinear Anal.*, 65, pp. 762–772, 2006.

[18] R. Espínola, A. Fernández-León, CAT(k)-spaces, weak convergence and fixed points. *J. Math. Anal. Appl.*, 353, 410–427, 2009.

[19] T. Figiel, An example of infinite dimensional reflexive Banach space non-isomorphic to its Cartesian square. *Studia Mathematica* 42.3:295–306, 1972.

[20] E. L. Fuster, Moduli and constants... what a show! http://www.uv.es/llorens/Documento.pdf, 2006.

[21] P. Gerhardy, Proof mining in topological dynamics. *Notre Dame J. Form. Log.* **49**, 431–446, 2008.

[22] P. Gerhardy, U. Kohlenbach, Strongly uniform bounds from semi-constructive proofs. *Ann. Pure Applied Logic* vol. 141, 89–107, 2006.

[23] P. Gerhardy, U. Kohlenbach, General logical metatheorems for functional analysis. *Trans. Amer. Math. Soc.* 360, 2615–2660, 2008.

[24] J.-Y. Girard, Une extension de l'interpretation de Gödel à l'analyse, et son application à l'elimination des coupures dans l'analyse et dans le théorie des types. In: J. E. Fenstad (ed.), *Proc. of the Second Scandinavian Logic Symposium*, 63–92. North-Holland, Amsterdam, 1971.

[25] K. Gödel, Über eine bisher noch nicht benütze Erweiterung des finiten Standpunktes. *Dialectica* 12, 280–287, 1958.

[26] D. Günzel, U. Kohlenbach, Logical metatheorems for abstract spaces axiomatized in positive bounded logic. *Advances in Mathematics* vol. 290, 503–551, 2016.

[27] C. W. Henson, Nonstandard hulls of Banach spaces. *Israel Journal of Mathematics* 25, 108–144, 1976.

[28] C. W. Henson, J. Iovino, *Ultraproducts in analysis*. In: *Analysis and Logic*. London Mathematical Society Lecture Notes Series, vol. 262, 1–113, 2002.

[29] C. W. Henson, Y. Raynaud, On the theory of $L_p(L_q)$-Banach lattices. *Positivity* 11, no. 2, 201–230, 2007.

[30] D. Hilbert, P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik. I.* (German) Zweite Auflage. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 40 Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968.

[31] W. A. Howard, Hereditarily majorizable functionals of finite type. In: A. Troelstra, *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*. Lecture Notes in Mathematics 344, pp. 454–461, Springer, Berlin, 1973.

[32] S. Ishikawa, Fixed points by a new iteration method. *Proc. Amer. Math. Soc.* **44**, 147–150, 1974.

[33] D. Ivan, L. Leuştean, A rate of asymptotic regularity for the Mann iteration of k-strict pseudo-contractions. *Numer. Funct. Anal. Optimiz.* 36:792–798, 2015.

[34] J. Jost, Equilibrium maps between metric spaces. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 2, 173–204, 1994.

[35] J. Jost, Convex functionals and generalized harmonic maps into spaces of non positive curvature. *Comment. Math. Helvetici* 70, no. 4, 659–673, 1995.

[36] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations. *J. Math. Soc. Japan* 19:508–520, 1967.

[37] M. A. A. Khan, U. Kohlenbach, Bounds on Kuhfittig's iteration schema in uniformly convex hyperbolic spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 403:633–642, 2013.

[38] U. Kohlenbach, Analysing proofs in analysis. In: W. Hodges, M. Hyland, C. Steinhorn, J. Truss (eds.), *Logic: from Foundations to Applications*. European Logic Colloquium (Keele, 1993), 225–260, Oxford University Press, 1996.

[39] U. Kohlenbach, Relative constructivity. *J. Symbolic Logic* 63:1218–1238, 1998.

[40] U. Kohlenbach. Uniform asymptotic regularity for Mann iterates. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 279, 531–544, 2003.

[41] U. Kohlenbach, Some logical metatheorems with applications in functional analysis. *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 357, no. 1, 89–128, 2005.

[42] U. Kohlenbach, *Applied proof theory: Proof interpretations and their use in mathematics.* Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008.

[43] U. Kohlenbach, Recent progress in proof mining in nonlinear analysis. Preprint, to appear in forthcoming special issue of *IFCoLog Journal of Logic and its Applications* with invited articles by recipients of a Gödel Centenary Research Prize Fellowship, 2017.

[44] U. Kohlenbach, L. Leuştean, Mann iterates of directionally nonexpansive mappings in hyperbolic spaces, *Abstract and Applied Analysis*, No. 8, 449–477, 2003.

[45] U. Kohlenbach, L. Leuştean, On the computational content of convergence proofs via Banach limits. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* Vol. 370, No. 1971, 3449–3463, 2012.

[46] U. Kohlenbach, L. Leuştean, A. Nicolae, Quantitative results on Fejér monotone sequences. arXiv:1412.5563 [math.LO], to appear in *Communications in Contemporary Mathematics*.

[47] U. Kohlenbach, G. López-Acedo, A. Nicolae, Quantitative asymptotic regularity for the composition of two mappings. *Optimization* vol. 66, pp. 1291–1299, 2017.

[48] U. Kohlenbach, A. Nicolae, A proof-theoretic bound extraction theorem for CAT(κ)-spaces. *Studia Logica* vol. 105, pp. 611–624, 2017.

[49] D. Körnlein, *Quantitative Analysis of Iterative Algorithms in Fixed Point Theory and Convex Optimization*. PhD thesis, Darmstadt, 2016.

[50] M. A. Krasnoselski, Two remarks on the method of successive approximation. *Usp. Math. Nauk (N.S.)* 10:123–127, 1955.

[51] G. Kreisel, Mathematical significance of consistency proofs. *J. Symbolic Logic*, 23, 155–182, 1958.

[52] G. Kreisel, Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite types. In: A. Heyting (Ed.), *Constructivity in Mathematics*, 101–128, North-Holland, Amsterdam, 1959.

[53] G. Kreisel et al., *Reports of Seminar on the Foundations of Analysis ("Stanford report")*. Technical report, Stanford University, Summer 1963.

[54] H. E. Lacey, *The isometric theory of classical Banach spaces*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 208. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.

[55] L. Leuştean, Proof mining in $\mathbb{R}$-trees and hyperbolic spaces. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 165, 95–106. In G. Mints, R. de Queiroz (eds.), *Proceedings of the 13th Workshop on Logic, Language, Information and Computation (WoLLIC 2006)*, Stanford University, CA, USA, 18-21 July 2006.

[56] L. Leuştean, A quadratic rate of asymptotic regularity for CAT(0)-spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 325, No. 1, 386–399, 2007.

[57] L. Leuştean, Nonexpansive iterations in uniformly convex W-hyperbolic spaces. In: A. Leizarowitz, B. S. Mordukhovich, I. Shafrir, A. Zaslavski (eds.), *Nonlinear Analysis and Optimization I: Nonlinear Analysis*. Cont. Math. 513, 193–209, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[58] L. Leuştean, An application of proof mining to nonlinear iterations. *Ann. Pure Appl. Logic* **165**, 1484–1500, 2014.

[59] L. Leuştean, A. Nicolae, A. Sipoş, On a generalization of the proximal point algorithm. In preparation.

[60] L. Leuştean, V. Radu, A. Sipoş, Quantitative results on the Ishikawa iteration of Lipschitz pseudo-contractions. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, Volume 17, Number 11, 2277–2292, 2016.

[61] L. Leuştean, A. Sipoş, Quantitative results on the proximal point algorithm in CAT(0) spaces. In preparation.

[62] J. Lindenstrauss, On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces. *Michigan Math. J.* 10:241–252, 1963.

[63] J. Lindenstrauss, A. Pelczynski, Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications. *Studia Math.*, 29:275–326, 1968.

[64] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 338. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[65] G. López-Acedo, H.-K. Xu, Iterative methods for strict pseudo-contractions in Hilbert spaces. *Nonlinear Anal.* 67, no. 7, 2258–2271, 2007.

[66] H. Luckhardt, *Extensional Gödel Functional Interpretation*. Springer Lecture Notes in Mathematics 306, 1973.

[67] H. Luckhardt, Herbrand-Analysen zweier Beweise des Satzes von Roth: Polynomiale Anzahlschranken. *J. Symb Log.* 54, 234–263, 1989.

[68] B. Martinet, Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives. *Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle* 4, 154–158, 1970.

[69] G. Marino, H.-K. Xu, Weak and strong convergence theorems for strict pseudo-contractions in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 329, no. 1, 336–346, 2007.

[70] P. Oliva, Hybrid functional interpretations of linear and intuitionistic logic. *J. Logic Comput.* 22:305–328, 2012.

[71] B. Prus, R. Smarzewski, Strongly unique best approximations and centers in uniformly convex spaces. *J. Math. Anal. Appl.* Volume 121, Issue 1, 10–21, 1987.

[72] S. Reich, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 67, no. 2, 274–276, 1979.

[73] T. Rockafellar, Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAM J. Control Optimization* 14, 877–898, 1976.

[74] H. Schaefer, Über die Methode sukzessiver Approximationen. *Jber. Deutsch. Math. Verein.* 59, Abt. 1, 131–140, 1957.

[75] A. Sipoş, A note on the Mann iteration for k-strict pseudocontractions in Banach spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, Volume 38, Issue 1, 80–90, 2017.

[76] A. Sipoş, Effective results on a fixed point algorithm for families of nonlinear mappings. *Annals of Pure and Applied Logic*, Volume 168, Issue 1, 112–128, 2017.

[77] A. Sipoş, Proof mining in L^p spaces. Preprint, arXiv:1609.02080 [math.LO], 2016.

[78] C. Spector, Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics. In: J. C. E. Dekker (Ed.), *Proc. Sympos. Pure Math.* 5, pp. 1–27, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1962.

[79] T. Tao, Soft analysis, hard analysis, and the finite convergence principle. Essay posted May 23, 2007, appeared in: T. Tao, *Structure and Randomness: Pages from Year One of a Mathematical Blog.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[80] T. Tao, Norm convergence of multiple ergodic averages for commuting transformations. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 28, 657–688, 2008.

[81] A. Troelstra, *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis.* Lecture Notes in Mathematics 344, Springer, Berlin, 1973.

[82] L. Tzafriri, Remarks on contractive projections in L_p-spaces. *Israel J. Math.*, 7:9–15, 1969.

[83] H.-K. Xu, Inequalities in Banach spaces with applications. *Nonlinear Anal.*, 16:1127–1138, 1991.

[84] H. Y. Zhou, Weak convergence theorems for strict pseudo-contractions in Banach spaces. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* 30, no. 5, 755–766, 2014.