Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Şcoala Doctorală de Matematică

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

CONTRIBUŢII LA TEORIA SPAŢIILOR KÖTHE-BOCHNER. REZULTATE TEORETICE ŞI APLICAŢII

Coordonator ştiinţific
Prof. Univ. Dr. Vasile Preda

Doctorand
Răzvan-Cornel Sfetcu

Bucureşti
2017

Cuprins

Introducere

Spaţiile de funcţii apar peste tot în matematică. Ele constituie parte fundamentală a Analizei Funcţionale. Există aplicaţii concrete ale acestora. Spaţii speciale de funcţii apar în probleme de calcul numeric, probleme de optimizare, în rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale şi cu derivate parţiale. Un exemplu foarte sugestiv în acest sens este dat de spaţiile Lebesgue cu exponent variabil, care sunt cazuri particulare de spaţii Köthe-Bochner, fiind foarte actuale, vezi [6], [33], [34], [35], [36], [88], [100]. De altfel, unele dintre rezultatele din aceste articole sunt generalizate în teză. În ultimul timp se manifestă tendinţa de modelare a discretului prin continuu cu ajutorul unor funcţii aparţinând unor spaţii funcţionale speciale.

Spaţiile Köthe generalizează spaţiile Lebesgue, spaţiile Orlicz, spaţiile Lorentz, spaţiile Marcinkiewicz şi alte spaţii de funcţii. Ele au fost introduse de matematicienii germani G. Köthe şi O. Toeplitz în articolul [69], dar nu au fost numite aşa. Köthe a generalizat acest articol, vezi [68], dar apoi a renunţat la studiul acestui subiect. Forma actuală a spaţiilor Köthe a apărut pentru prima dată în teza de doctorat a lui W.A.J. Luxemburg scrisă sub îndrumarea lui A.C. Zaanen. Numele de spaţii Köthe a fost dat la sugestia lui J. Dieudonné, vezi [42]. O generalizare naturală a acestor spaţii este să considerăm funcţii cu valori într-un spaţiu Banach arbitrar în loc de funcţii cu valori scalare dezvoltându-se astfel teoria spaţiilor Köthe-Bochner. Aceste spaţii de funcţii sunt intens studiate. În acest sens menţionăm: [3], [15], [16], [20], [23], [44], [46], [59], [79], [80], [81], [99], [138], [145], [146].

Spaţiile Köthe-Bochner nu sunt studiate numai pentru proprietăţi ce ţin de Analiza Funcţională. În multe articole recente (vezi [19], [21], [71], [72], [73], [74], [83], [84], [97], [98], [110], [122], [128], [140]) spaţiile Köthe-Bochner sunt legate de noţiunile de funcţie de entropie, funcţie de capacitate, numere de entropie, element de cea mai bună aproximare, noţiuni ce ţin de Teoria Optimizării.

În această teză de doctorat ne ocupăm de completitudinea spaţiilor Köthe-Bochner, generalizăm tipuri de convergenţe cunoscute de la Teoria Măsurii şi studiem legăturile între convergenţele nou-definite şi convergenţa în topologia de spaţiu Köthe-Bochner, caracterizăm spaţiile Köthe-Bochner care sunt algebre Banach cu unitate, spaţii Hilbert şi spaţii hilbertabile, aproximăm spaţiile Köthe-Bochner $L_\rho(X)$ cu subspaţii $L_\rho(Y)$, unde $Y \subset X$ sunt subspaţii finit dimensionale, găsim o reprezentare a dualului unui spaţiu Köthe-Bochner, reprezentăm operatorii liniari şi continui $U : \mathcal{L}_\rho(E) \to F$ şi stabilim legături între aceştia şi operatorii liniari şi continui $V : \mathcal{L}_\rho \to \mathcal{L}(E, F)$, introducem o schemă pentru a găsi mulţimi proximinale în spaţii Banach şi aplicăm această schemă la spaţii Köthe-Bochner, arătăm că, în anumite condiţii, o mulţime convexă, mărginită, închisă şi solidă este proximinală întrun spaţiu Köthe-Bochner, demonstrăm proprietăţi ale entropiilor Tsallis şi Rényi, stabilim relaţii între funcţiile de entropie şi spaţiile Köthe-Bochner.

Mulţumiri

Mulţumesc domnilor profesori Ion Chiţescu şi Vasile Preda pentru sprijinul acordat, pentru numeroasele sfaturi şi încurajări primite în perioada studiilor doctorale.

Mulţumesc tuturor domnilor profesori care m-au format în anii de şcoală şi de facultate.

De asemenea mulţumesc familiei mele pentru suportul acordat.

Capitolul 1

Preliminarii

Notăm $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Vom folosi convenţia $0 \cdot \infty = 0$.

Pentru orice mulţime nevidă T notăm $\mathcal{P}(T)$ mulţimea tuturor submulţimilor lui T. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$ notăm funcţia caracteristică a lui A via $\varphi_A : T \to \mathbb{R}$.

Toate spaţiile seminormate $(X, \| \ \|)$ (pe scurt X) sunt considerate nenule. Dacă $(X, \| \ \|)$ este un spaţiu seminormat şi $(Y, ||| \ |||)$ este un spaţiu normat definim $\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y|$ T liniar şi continuu$\}$, normat cu norma operatorială $\|T\|_o = \sup\{|||T(x)||| \mid x \in X, \|x\| \leq 1\}$. În particular, dacă $Y = K$, notăm $\mathcal{L}(X, K) = X' \overset{def}{=}$ dualul lui X. Dacă $f : T \to X$ definim $|f| : T \to \mathbb{R}_+$, $|f|(t) = \|f(t)\|$.

Dacă A este o mulţime nevidă şi $(x_i)_{i \in I}$ este o familie de elemente ale lui A scriem $(x_i)_{i \in I} \subset A$ (sau $(x_i)_i \subset A$) pentru a ilustra faptul că $x_i \in A$ pentru orice $i \in I$. Dacă $(\Delta, \leq)$ este o mulţime dirijată şi $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ este un şir generalizat astfel încât $x_\delta \in A$ pentru orice $\delta \in \Delta$ vom scrie $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ net A. În particular, dacă $I = \mathbb{N}$, obţinem şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ (vom mai scrie $(x_n)_{n \geq 1} \subset A$ sau, cel mai adesea, $(x_n)_n \subset A$). Dacă A este un spaţiu topologic, $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ net A şi $x \in A$ vom scrie $x_\delta \underset{\delta}{\to} x$ pentru a desemna faptul că $(x_\delta)_\delta$ converge către x.

Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spaţiu cu măsură $\sigma-$ finită şi completă şi $(X, \| \ \|)$ un spaţiu Banach.

Notăm $S(T, X)$ spaţiul vectorial al funcţiilor $\mathcal{T}-$ simple $f : T \to X$ şi $M_X(\mu)$ spaţiul vectorial al funcţiilor $\mu-$ măsurabile $f : T \to X$. În cazul $X = K$ scriem $S(T)$ în loc de $S(T, K)$ şi $M(\mu)$ în loc de $M_K(\mu)$. Notăm $M_+(\mu) = \{u : T \to \overline{\mathbb{R}}_+ \mid u$ este $\mu-$ măsurabilă$\}$.

O funcţie $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se numeşte $\mu-$ seminormă funcţională (pe scurt seminormă funcţională) dacă are proprietăţile (pentru orice $u, v \in M_+(\mu)$ şi pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}_+$):

(i) Dacă $u(t) = 0$ $\mu - a.p.t.$ atunci $\rho(u) = 0$.

(ii) $\rho(u) \leq \rho(v)$ pentru orice $u, v \in M_+(\mu)$ astfel încât $u \leq v$.

(iii) $\rho(u+v) \leq \rho(u) + \rho(v)$.

(iv) $\rho(\alpha u) = \alpha\rho(u)$.

Dacă ρ are, în plus, proprietatea reciprocă a lui (i), adică "Dacă $\rho(u) = 0$ atunci $u(t) = 0$ $\mu - a.p.t.$", ρ se numeşte $\mu-$ normă funcţională (pe scurt normă funcţională).

Vom lucra cu norme funcţionale în această teză precizând atunci când vorbim despre seminorme funcţionale.

Vom scrie $\rho(A)$ în loc de $\rho(\varphi_A)$ pentru orice $A \in \mathcal{T}$. Deci $\rho(T) > 0$.

Spunem că norma funcţională ρ are proprietatea Riesz-Fischer dacă, pentru orice şir $(u_n)_n \subset M_+(\mu)$, avem $\rho\left(\sum\limits_n u_n\right) \leq \sum\limits_n \rho(u_n)$.

Spunem că norma funcţională ρ are proprietatea lui Fatou dacă, pentru orice şir crescător $(u_n)_n \subset M_+(\mu)$, avem $\rho(u) = \sup\limits_n \rho(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n)$, unde $u = \sup\limits_n u_n$ (punctual) (notăm $u_n \uparrow u$). Dacă ρ are proprietatea lui Fatou atunci ρ are şi proprietatea Riesz-Fischer.

Spunem că norma funcţională ρ este saturată dacă există un şir $(T_n)_n \subset \mathcal{T}$ (care poate fi presupus crescător sau disjunct) cu proprietatea că $\bigcup\limits_n T_n = T$ şi astfel încât $\mu(T_n) < \infty$ şi $\rho(T_n) < \infty$ pentru orice n.

Spunem că norma funcţională ρ este de tip absolut continuu dacă, pentru orice şir descrescător $(u_n)_n \subset M_+(\mu)$ cu proprietatea că $\rho(u_1) < \infty$ şi $\inf\limits_n u_n = 0$ (punctual) (notăm $u_n \downarrow 0$), avem $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n) = \inf\limits_n \rho(u_n) = 0$.

Fie ρ o normă funcţională. Putem construi spaţiul vectorial

$$\mathcal{L}_\rho(X) = \{f \in M_X(\mu) \mid \rho|f| < \infty\}$$

(scriem $\rho|f| \overset{def}{=} \rho(|f|)$). Remarcăm că $\mathcal{L}_\rho(X)$ este seminormat cu seminorma $f \to \rho|f|$. Acesta se numeşte spaţiu Köthe-Bochner seminormat.

Spaţiul nul al seminormei de mai sus este

$$\mathcal{N}_X(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_\rho(X) \mid \rho|f| = 0\} = \{f : T \to X \mid f(t) = 0 \ \mu - a.p.t.\}.$$

Spaţiul normat asociat este $L_\rho(X) \overset{def}{=} \mathcal{L}_\rho(X)/\mathcal{N}_X(\mu)$, normat via $\left\|\tilde{f}\right\| = \rho|f|$ pentru orice reprezentant $f \in \tilde{f}$. Acesta se numeşte spaţiu Köthe-Bochner normat.

Pentru $X = K$ scriem $\mathcal{L}_\rho$ în loc de $\mathcal{L}_\rho(K)$ şi L_ρ în loc de $L_\rho(K)$ (acestea se numesc spaţii Köthe).

Capitolul 2

Spaţii Köthe-Bochner. Proprietăţi de bază

În tot capitolul $(T, \mathcal{T}, \mu)$ este un spaţiu cu măsură $\sigma-$ finită şi completă, X un spaţiu Banach şi $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o normă funcţională.

2.1 Completitudinea spaţiilor Köthe-Bochner. Subspaţii finit dimensionale

Fie $x \in X$. Definim spaţiile $\mathcal{L}_\rho(x) \stackrel{def}{=} \{f \in \mathcal{L}_\rho(X) \mid f(T) \subset Sp(x)\}$, $L_\rho(x) \stackrel{def}{=} \{\tilde{f} \in L_\rho(X) |\ f \in \mathcal{L}_\rho(x)\}$ şi spaţiile $\mathcal{L}_\rho x \stackrel{def}{=} \{\varphi x \mid \varphi \in \mathcal{L}_\rho\}$ şi $L_\rho x \stackrel{def}{=} \{\tilde{f} \in L_\rho(X) \mid f \in \mathcal{L}_\rho x\}$. Avem $\mathcal{L}_\rho(x) = \mathcal{L}_\rho x$ şi $L_\rho(x) = L_\rho x$.

Teorema 2.1. (Completitudinea spaţiului Köthe-Bochner $L_\rho(X)$) *Sunt echivalente:*

1. *ρ are proprietatea Riesz-Fischer.*

2. *L_ρ este spaţiu Banach.*

3. *Pentru orice spaţiu Banach X, $L_\rho(X)$ este spaţiu Banach.*

4. *Există un spaţiu Banach nenul X astfel încât $L_\rho(X)$ este spaţiu Banach.*

5. *Există un spaţiu Banach nenul X şi un element $0 \neq x \in X$ astfel încât $L_\rho(x) = L_\rho x$ este spaţiu Banach.*

6. *Există un spaţiu Banach nenul X şi un subspaţiu închis, nenul $Y \subset X$ astfel încât $L_\rho(Y)$ este spaţiu Banach.*

Remarca 2.2. Echivalenţa 2. $\Leftrightarrow$ 3. din Teorema 2.1 poate fi citită astfel: L_ρ are proprietatea (P) dacă şi numai dacă $L_\rho(X)$ are proprietatea (P) pentru orice spaţiu Banach X. Aici, (P) reprezintă completitudinea. Acest tip de echivalenţă nu este valabil întotdeauna. De exemplu, dacă (P) înseamnă reflexivitatea, este adevărat că dacă $L_\rho(X)$ este reflexiv pentru orice spaţiu Banach X atunci L_ρ este reflexiv (putem lua $X = K$). Reciproca acestei afirmaţii nu este, în general, adevărată. Mai des întâlnită este echivalenţa de tipul: $L_\rho(X)$ are proprietatea (P) dacă şi numai dacă L_ρ şi X au proprietatea (P) (vezi Capitolul 3 şi sfârşitul Capitolului 4 ale acestei teze şi [80]). $\square$

2.2 Topologia convergenţei în $\rho-$ măsură. Relaţia cu topologia canonică

Definiţia 2.3. (vezi [27]) O funcţie $\varphi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ se numeşte $S-$ funcţie dacă are următoarele proprietăţi:

$i)$ Există $0 < a < \infty$ astfel încât $\varphi([0,\infty]) = [0,a]$ şi φ este strict crescătoare.

$ii)$ $\varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$ pentru orice $s, t \in [0,\infty]$.

Definiţia 2.4. Fie $0 < a < \infty$, $f \in M_X(\mu)$ şi φ o $S-$ funcţie. Definim

$$\begin{gathered}
(|f| > a) \stackrel{def}{=} \{t \in T \mid |f|(t) > a\} \text{ şi } \rho(|f| > a) \stackrel{def}{=} \rho((|f| > a)),\\
(|f| \geq a) \stackrel{def}{=} \{t \in T \mid |f|(t) \geq a\} \text{ şi } \rho(|f| \geq a) \stackrel{def}{=} \rho((|f| \geq a)),\\
(a,f) \stackrel{def}{=} a + \rho(|f| > a) \text{ şi } \varphi(a,f) \stackrel{def}{=} \varphi((a,f)),\\
|||f|||_\varphi \stackrel{def}{=} \inf\{\varphi(a,f) \mid a > 0\} < \infty.
\end{gathered}$$

Remarca 2.5. Orice $S-$ funcţie φ generează semimetrica invariantă la translaţii $d_\varphi : M_X(\mu) \times M_X(\mu) \to \mathbb{R}_+$, $d_\varphi(f,g) = |||f-g|||_\varphi$, semimetrică ce defineşte topologia τ_φ pe $M_X(\mu)$. $\square$

Teorema 2.6. *I. Fie $(f_\delta)_{\delta\in\Delta}$ net $M_X(\mu)$, $f \in M_X(\mu)$ şi φ o $S-$ funcţie. Sunt echivalente:*

1. $f_\delta \underset{\delta}{\to} f$ *în* τ_φ.
2. $\rho(|f - f_\delta| > a) \underset{\delta}{\to} 0$ *pentru orice* $0 < a < \infty$.
3. $\rho(|f - f_\delta| \geq a) \underset{\delta}{\to} 0$ *pentru orice* $0 < a < \infty$.

II. Avem $\tau_{\varphi_1} = \tau_{\varphi_2} (\stackrel{def}{=} \tau_m(\rho))$ pentru orice $S-$ funcţii φ_1 şi φ_2.

Definiţia 2.7. 1. Numim $\tau_m(\rho)$ topologia convergenţei în $\rho-$ măsură.

2. Dacă $f_\delta \underset{\delta}{\to} f$ în $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ spunem că $(f_\delta)_\delta$ converge la f în $\rho-$ măsură şi scriem $f_\delta \underset{\delta}{\overset{\rho}{\to}} f$ (în particular $f_n \underset{n}{\overset{\rho}{\to}} f$ pentru şiruri).

Teorema 2.8 arată că grupul topologic semimetrizabil $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ nu este separat.

Teorema 2.8. *Închiderea mulţimii* $\{0\}$ *în* $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ *este spaţiul vectorial* $\mathcal{N}_X(\mu)$.

Exemplul următor arată că $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ nu este un spaţiu vectorial topologic.

Exemplul 2.9. Fie $(T, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$ (spaţiul cu măsură discretă). Fie $X = K$. Definim norma funcţională $\rho : M_+(card) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\rho(u) = \sup\{u(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Considerăm funcţia $f \in M(\mu)$, $f(n) = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Rezultă că $\left(\left|\frac{1}{n}f\right| > 1\right) = \{n+1, n+2, ...\}$, deci şirul $\left(\frac{1}{n}f\right)_n$ nu converge în $\rho-$ măsură la 0. $\square$

Pentru a studia posibila structură de spaţiu vectorial topologic a lui $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ introducem spaţiul vectorial $M_{\max} = \{f \in M_X(\mu) \mid \rho(|f| > n) \underset{n}{\to} 0\}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Observăm că $M_{\max} = \{f \in M_X(\mu) \mid \rho(|f| > a) \xrightarrow[a\to\infty]{} 0\}$, unde $a \in (0, \infty)$.

Teorema 2.10. 1. *Grupul aditiv topologic* $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ *are proprietatea că, pentru orice* $a \in K$ *şi pentru orice subspaţiu vectorial* $M \subset M_X(\mu)$, *aplicaţia* $T_a : M \to M$, $T_a(f) = af$ *este continuă.*

2. *Considerând pe* $M_{\max}$ *topologia indusă de* $\tau_m(\rho)$ *acesta devine un subspaţiu vectorial topologic. Dacă* $M \subset M_X(\mu)$ *este un subspaţiu vectorial atunci el este un subspaţiu vectorial topologic dacă şi numai dacă* $M \subset M_{\max}$ *(considerăm pe* M *topologia indusă de* $\tau_m(\rho)$*).*

Remarca 2.11. 1. În Exemplul 2.9, $f \notin M_{\max}$.

2. Dacă $\mu(T) < \infty$ şi $\rho = \| \|_1$ atunci $M_{\max} = M_X(\mu)$. $\square$

Exemplul 2.12 arată că grupul topologic semimetrizabil $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ nu este complet.

Exemplul 2.12. Fie $(T, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$, $X = K$ şi $\rho : M_+(card) \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\rho(u) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^2} & \text{dacă } \{n \in \mathbb{N} \mid u(n) \neq 0\} \text{ este finită} \\ \infty & \text{dacă } \{n \in \mathbb{N} \mid u(n) \neq 0\} \text{ este infinită.} \end{cases}$$

Fie φ o $S-$ funcţie. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ notăm $A_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ şi considerăm şirul $(f_n)_n \subset M(\mu)$, $f_n = \varphi_{A_n}$. Dacă $m > n$ avem $|||f_m - f_n|||_\varphi \leq \varphi\left(\sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i^2}\right)$. De aici rezultă că $(f_n)_n$ este un şir Cauchy. Însă nu există $f \in M(\mu)$ astfel încât $f_n \xrightarrow[n]{\rho} f$. $\square$

În cele ce urmează studiem legătura dintre topologia $\tau(\rho)$ a spaţiului Köthe-Bochner $\mathcal{L}_\rho(X)$ şi topologia $\tau_m^i(\rho)$ indusă pe $\mathcal{L}_\rho(X)$ de topologia convergenţei în $\rho-$ măsură $\tau_m(\rho)$.

Teorema 2.13. *Avem incluziunea $\mathcal{L}_\rho(X) \subset M_{\max}$. Deci $\mathcal{L}_\rho(X)$ cu topologia $\tau_m^i(\rho)$ este un spaţiu vectorial topologic.*

Teorema 2.14. *Avem $\tau_m^i(\rho) \subset \tau(\rho)$, i.e. topologia convergenţei în $\rho-$ măsură este mai slabă decât topologia de spaţiu Köthe-Bochner.*

Exemplul 2.15. Considerăm ipotezele din Exemplul 2.12. Şirul $(f_n)_n$ de acolo este Cauchy în $\tau(\rho)$, dar nu există $f \in \mathcal{L}_\rho$ astfel încât $f_n \xrightarrow[n]{} f$ în $\tau(\rho)$. Prin urmare $\mathcal{L}_\rho$ şi L_ρ nu sunt complete (deoarece ρ nu are proprietatea Riesz-Fischer, vezi Teorema 2.1). $\square$

Închiderile spaţiilor nule ale spaţiilor vectoriale topologice $(\mathcal{L}_\rho(X), \tau(\rho))$ şi $(\mathcal{L}_\rho(X), \tau_m^i(\rho))$ sunt egale, i.e. $\overline{\{0\}} = \mathcal{N}_X(\mu)$ (închiderea în ambele topologii). Aşadar putem considera $L_\rho(X) = \mathcal{L}_\rho(X)/\mathcal{N}_X(\mu)$ în raport cu cele două topologii. Considerăm $q\tau_m^i(\rho) =$ topologia factor a lui $\tau_m^i(\rho)$. Atunci $(L_\rho(X), q\tau_m^i(\rho))$ este un spaţiu vectorial topologic, metrizabil, topologia sa fiind mai slabă decât topologia de spaţiu Köthe-Bochner (dată de normă).

2.3 Convergenţa şirurilor

Definiţia 2.16. Spunem că şirul $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ este Cauchy în $\rho-$ măsură dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că pentru orice $m \geq n(\varepsilon)$, $n \geq n(\varepsilon)$ şi pentru orice $0 < a < \infty$, avem $\rho(|f_m - f_n| > a) < \varepsilon$.

Propoziţia 2.17. *Dacă $(f_n)_n$ este convergent în $\rho-$ măsură atunci $(f_n)_n$ este Cauchy în $\rho-$ măsură.*

Propoziţia 2.18. 1. *Presupunem că $f_n \xrightarrow[n]{\rho} f$ şi $f = g$ $\mu - a.p.t.$ Atunci $f_n \xrightarrow[n]{\rho} g$.*

2. *Dacă $f_n \xrightarrow[n]{\rho} f$ şi $f_n \xrightarrow[n]{\rho} g$ atunci $f = g$ $\mu - a.p.t.$*

Propoziţia 2.19. *Dacă $f_n \xrightarrow[n]{} f$ şi $f_n \xrightarrow[n]{} g$ în topologia de spaţiu Köthe-Bochner a lui $\mathcal{L}_\rho(X)$ atunci $f = g$ $\mu - a.p.t.$*

Definiţia 2.20. Fie $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ un şir şi fie $f \in M_X(\mu)$.

1. Spunem că şirul $(f_n)_n$ converge $\rho-$ aproape uniform la f (scriem $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f$) dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $A_\varepsilon \in \mathcal{T}$ astfel încât $\rho(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $(f_n)_n$ converge uniform la f pe $T \setminus A_\varepsilon$.

2. Spunem că $(f_n)_n$ este $\rho-$ aproape uniform Cauchy dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $A_\varepsilon \in \mathcal{T}$ astfel încât $\rho(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $(f_n)_n$ este uniform Cauchy pe $T \setminus A_\varepsilon$.

Propoziţia 2.21. (Completitudinea convergenţei $\rho-$ aproape uniforme) *Şirul $(f_n)_n$ este $\rho-$ aproape uniform convergent dacă şi numai dacă este $\rho-$ aproape uniform Cauchy.*

Propoziţia 2.22. *Dacă $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ şi $f \in M_X(\mu)$ sunt astfel încât $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f$ atunci $f_n \xrightarrow[n]{} f$ $\mu - a.p.t.$ şi $f_n \xrightarrow[n]{\rho} f$.*

Remarca 2.23. Reciprocele implicaţiilor care apar în Propoziţia 2.22 nu sunt, în general, adevărate. Pentru implicaţia $(f_n \xrightarrow[n]{} f \ \mu - a.p.t.) \Rightarrow (f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f)$ putem argumenta astfel: în Exemplele 2.12 şi 2.15 şirul $(f_n)_n$ converge peste tot la funcţia constantă egală cu 1, dar nu converge $\rho-$ aproape uniform. De asemenea, implicaţia $(f_n \xrightarrow[n]{\rho} f) \Rightarrow (f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f)$ nu este, în general, adevărată, după cum vom vedea la Remarca 2.37. $\square$

Corolarul 2.24. *Fie $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ şi fie $f \in M_X(\mu)$.*

1. *Dacă $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f$ şi $f = g$ $\mu - a.p.t.$ atunci $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} g$.*
2. *Dacă $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f$ şi $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} g$ atunci $f = g$ $\mu - a.p.t.$*

Corolarul 2.25. *Fie $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ şi fie $f \in M_X(\mu)$. Sunt echivalente:*

1. $f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f$.
2. *$(f_n)_n$ este $\rho-$ aproape uniform Cauchy şi $f_n \xrightarrow[n]{} f$ $\mu - a.p.t.$*

Teorema 2.26. *Presupunem că ρ are proprietatea Riesz-Fischer. Pentru orice şir $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ care este Cauchy în $\rho-$ măsură există un subşir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ şi o funcţie $f \in M_X(\mu)$ astfel încât $f_{n_k} \xrightarrow[k]{\rho u} f$ (deci $f_{n_k} \xrightarrow[k]{} f$ $\mu - a.p.t.$ şi $f_{n_k} \xrightarrow[k]{\rho} f$).*

Teorema 2.27. (Analog al Teoremei Slutsky) *Presupunem că ρ are proprietatea Riesz-Fischer. Atunci spaţiul semimetrizabil $(M_X(\mu), \tau_m(\rho))$ este complet.*

Putem construi norma funcţională ρ_T care are proprietatea Riesz-Fischer şi este cea mai mare normă funcţională mai mică decât ρ cu această proprietate.

Definiţia 2.28. (vezi [27], [139]) Definim norma funcţională $\rho_T : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ via

$$\rho_T(u) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(u_n) \;\middle|\; u_n \in M_+(\mu),\, u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right\}.$$

Folosind ρ_T obţinem anumite rezultate din Teorema 2.26 pentru orice normă funcţională ρ.

Corolarul 2.29. *Pentru orice şir $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ care este Cauchy în $\rho-$ măsură există $f \in M_X(\mu)$ şi un subşir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ cu proprietatea că $f_{n_k} \underset{k}{\to} f$ $\mu - a.p.t.$*

Propoziţia 2.30. *Presupunem că ρ are proprietatea Riesz-Fischer. Fie $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ şi fie $f \in M_X(\mu)$.*

1. Dacă $f_n \xrightarrow[n]{\rho} f$ atunci există un subşir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ cu proprietatea că $f_{n_k} \xrightarrow[k]{\rho u} f$ (deci $f_{n_k} \underset{k}{\to} f$ $\mu - a.p.t.$).

2. Presupunem că $(f_n)_n \subset \mathcal{L}_\rho(X)$, $f \in \mathcal{L}_\rho(X)$ şi $f_n \underset{n}{\to} f$ în topologia de spaţiu Köthe-Bochner a lui $\mathcal{L}_\rho(X)$. Atunci există un subşir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ astfel încât $f_{n_k} \xrightarrow[k]{\rho u} f$ (deci $f_{n_k} \underset{k}{\to} f$ $\mu - a.p.t.$ şi $f_{n_k} \xrightarrow[k]{\rho} f$).

Corolarul 2.31. *Fie $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ şi fie $f \in M_X(\mu)$.*

1. Dacă $f_n \xrightarrow[n]{\rho} f$ atunci există un subşir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ astfel încât $f_{n_k} \underset{k}{\to} f$ $\mu - a.p.t.$

2. Presupunem că $(f_n)_n \subset \mathcal{L}_\rho(X)$, $f \in \mathcal{L}_\rho(X)$ şi $f_n \underset{n}{\to} f$ în topologia de spaţiu Köthe-Bochner a lui $\mathcal{L}_\rho(X)$. Atunci există un subşir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ astfel încât $f_{n_k} \underset{k}{\to} f$ $\mu - a.p.t.$
3. Pentru orice subspaţiu închis, nenul $Y \subset X$, $\mathcal{L}_\rho(Y)$ este închis în $\mathcal{L}_\rho(X)$ şi $L_\rho(Y)$ este închis în $L_\rho(X)$.

Teorema 2.32. (Analog al Teoremei lui Egorov) *Presupunem că $\mu(T) < \infty$, ρ este de tip absolut continuu şi $\rho(T) < \infty$. Atunci, pentru orice şir $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$, avem echivalenţa:*

$$f_n \underset{n}{\to} f \;\; \mu - a.p.t. \Leftrightarrow f_n \xrightarrow[n]{\rho u} f.$$

Remarca 2.33. În general convergenţa $\rho-$ aproape uniformă nu este topologică. □

Exemplul 2.34. Fie $(T, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, unde $\mu(\phi) = 0$ şi, pentru orice $\phi \neq A \subset \mathbb{N}$, $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} card(A \cap \{n\})$. Fie $X = K$ şi fie $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\rho(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)$. Evident ρ este de tip absolut continuu şi $\rho(\mathbb{N}) = \infty$. Considerăm şirul $(f_n)_n \subset M(\mu)$, $f_n = \varphi_{A_n}$, unde $A_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ pentru orice n. Evident $f_n \underset{n}{\to} f = \varphi_{\mathbb{N}}$, dar $(f_n)_n$ nu converge în $\rho-$ măsură către f. □

Remarca 2.35. Din exemplul precedent putem extrage următoarele:

1. Convergenţa $\mu - a.p.t.$ nu o implică pe cea în $\rho-$ măsură.
2. Teorema 2.32 nu este adevărată dacă $\rho(T) = \infty$. $\square$

Exemplul 2.36. Fie $T = [0,1]$, $\mathcal{T} = \sigma-$ algebra mulţimilor măsurabile Lebesgue ale intervalului $[0,1]$, $\mu =$ măsura Lebesgue pe $[0,1]$, $X = K$ şi fie $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\rho(u) = \int u d\mu$.

$a)$ Convergenţa în $\mathcal{L}_\rho$ nu o implică pe cea $\rho-$ aproape uniformă.

Definim, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi pentru orice $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$, mulţimea $E_n^i = \left[\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right]$ şi funcţia $f_n^i = \varphi_{E_n^i}$. Considerăm şirul de funcţii $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{L}_\rho$ definit astfel: $\varphi_1 = f_1^1$, $\varphi_2 = f_2^1$, $\varphi_3 = f_2^2$, $\varphi_4 = f_3^1$, $\varphi_5 = f_3^2$, $\varphi_6 = f_3^3, \ldots$. Avem $\varphi_m \underset{m}{\to} 0$ în $\mathcal{L}_\rho$, dar, pentru orice $t \in [0,1]$, şirul $(\varphi_m(t))_m$ este divergent. Aceasta arată că afirmaţia "$\varphi_m \underset{m}{\to} 0$ $\mu - a.p.t.$" este falsă, deci la fel este şi afirmaţia "$\varphi_m \underset{m}{\xrightarrow{\rho u}} 0$".

$b)$ Convergenţa $\rho-$ aproape uniformă nu o implică pe cea în $\mathcal{L}_\rho$.

Fie $(f_n)_n \subset \mathcal{L}_\rho$ construit în cele ce urmează: $f_n(t) = n$ dacă $0 \le t < \dfrac{1}{n}$ şi $f_n(t) = 0$ dacă $\dfrac{1}{n} \le t \le 1$.

Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ pentru orice $t \in (0,1]$, deci $f_n \underset{n}{\to} 0$ $\mu - a.p.t.$ Conform Teoremei lui Egorov (cea clasică) $f_n \underset{n}{\xrightarrow{\rho u}} 0$. Pe de altă parte $f_n \underset{n}{\not\to} 0$ în $\mathcal{L}_\rho$. $\square$

Remarca 2.37. 1. Punctul $b)$ din Exemplul 2.36 arată că topologia convergenţei în $\rho-$ măsură $\tau_m^i(\rho)$ pe $\mathcal{L}_\rho(X)$ este strict mai slabă decât topologia de spaţiu Köthe-Bochner $\tau(\rho)$ a lui $\mathcal{L}_\rho(X)$ şi implicaţia "$(f_n \underset{n}{\to} f$ $\mu - a.p.t.)\Rightarrow(f_n \underset{n}{\to} f$ în $\mathcal{L}_\rho(X))$" este, în general, falsă.

2. Şirul $(f_n)_n$ de la punctul $a)$ din ultimul exemplu converge în topologia de spaţiu Köthe-Bochner a lui $\mathcal{L}_\rho$ şi nu converge $\mu - a.p.t.$ Aşadar:

$i)$ $(f_n)_n$ converge în $\rho-$ măsură (conform Teoremei 2.14) şi nu converge $\rho-$ aproape uniform. Deci implicaţia "$(f_n \underset{n}{\xrightarrow{\rho}} f)\Rightarrow(f_n \underset{n}{\xrightarrow{\rho u}} f)$" este, în general, falsă.

$ii)$ Implicaţiile "$(f_n \underset{n}{\to} f$ în $\mathcal{L}_\rho) \Rightarrow (f_n \underset{n}{\to} f$ $\mu - a.p.t.)$" şi "$(f_n \underset{n}{\xrightarrow{\rho}} f)\Rightarrow(f_n \underset{n}{\to} f$ $\mu - a.p.t.)$" sunt, în general, false. $\square$

Exemplul 2.38. Considerăm scenariul din Exemplul 2.36. Un punct de acumulare al mulţimii $\mathcal{L}_\rho$ în $(M(\mu), \tau_m(\rho))$ este $f : [0,1] \to K$, $f(0) = 0$ şi $f(t) = \dfrac{1}{t}$ dacă $0 < t \le 1$. Mai exact $f_n \underset{n}{\xrightarrow{\rho}} f$, unde, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = 0$ dacă $0 \le t < \dfrac{1}{n}$ şi $f_n(t) = \dfrac{1}{t}$ dacă $\dfrac{1}{n} \le t \le 1$. Cum $\rho(f) = \infty$ rezultă că $f \notin \mathcal{L}_\rho$, deci $\mathcal{L}_\rho$ nu este închis în $(M(\mu), \tau_m(\rho))$. $\square$

Capitolul 3

Spaţii Köthe-Bochner cu structuri speciale

Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spaţiu cu măsură $\sigma-$ finită şi completă, X un spaţiu Banach şi $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o normă funcţională.

3.1 Spaţii Köthe-Bochner care sunt algebre Banach cu unitate

Definiţia 3.1. (vezi [51]) Spunem că X este o algebră Banach cu unitate dacă X este o algebră nenulă cu unitatea e şi operaţia de înmulţire de pe X, $(x, y) \to xy$ este continuă.

Remarca 3.2. (vezi [5], [51]) Această definiţie este puţin mai generală decât cea clasică deoarece nu impunem condiţiile $\|xy\| \le \|x\| \|y\|$ şi $\|e\| = 1$. $\square$

Pentru orice f, $g : T \to X$ şi pentru orice $\alpha \in K$ definim punctual $f + g : T \to X$ şi $\alpha f : T \to X$. Dacă X este o algebră Banach definim în mod similar $fg : T \to X$. Pentru orice element $x \in X$ definim funcţia constantă $\underline{x} : T \to X$, $\underline{x}(t) = x$ pentru orice $t \in T$.

Definiţia 3.3. (vezi [25], [27]) Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spaţiu cu măsură completă (măsura μ poate să nu fie $\sigma-$ finită). Spunem că spaţiul L_ρ este spaţiu Köthe care este şi algebră Banach cu unitate dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1. L_ρ este spaţiu Banach.
2. $\underline{1} \in \mathcal{L}_\rho$.

3. Pentru orice $f, g \in \mathcal{L}_\rho$ avem $fg \in \mathcal{L}_\rho$.

4. Există o constantă $A > 0$ cu proprietatea că $\rho|fg| \leq A\rho|f|\rho|g|$ pentru orice f, $g \in \mathcal{L}_\rho$.

Presupunem că $(X, \|\ \|)$ este o algebră Banach cu unitatea e astfel încât $\|xy\| \leq A\,\|x\|\,\|y\|$ pentru orice $x, y \in X$. Notăm cu $|||\ |||$ norma de pe L_ρ şi cu $|||\ |||_X$ norma de pe $L_\rho(X)$.

Definiţia 3.4. Spunem că $L_\rho(X)$ este spaţiu Köthe-Bochner care este şi algebră Banach cu unitate dacă:

1. $(L_\rho(X), |||\ |||_X)$ este un spaţiu Banach.
2. $\underline{e} \in \mathcal{L}_\rho(X)$.
3. Pentru orice $f, g \in \mathcal{L}_\rho(X)$ avem $fg \in \mathcal{L}_\rho(X)$.
4. Există o constantă $B > 0$ astfel încât $\rho|fg| \leq B\rho|f|\rho|g|$ pentru orice $f, g \in \mathcal{L}_\rho(X)$.

Teorema 3.5. *Sunt echivalente:*

1. $(L_\rho(X), |||\ |||_X)$ *este un spaţiu Köthe-Bochner care este şi algebră Banach cu unitate.*
2. $(L_\rho, |||\ |||)$ *este un spaţiu Köthe care este şi algebră Banach cu unitate.*
3. $L_\rho(X)$ *şi* $L^\infty(X, \mu)$ *sunt spaţii Banach echivalente.*
4. L_ρ *şi* $L^\infty(\mu)$ *sunt spaţii Banach echivalente.*

Exemplul 3.6. (Forma spaţiilor Köthe-Bochner de şiruri $l_\rho(l_r)$ care sunt algebre Banach cu unitate) Considerăm spaţiul cu măsură discretă $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$ şi spaţiul Köthe

$$l^\infty = \{x = (x_n)_n \mid x_n \in K, \sup_n |x_n| < \infty\}$$

(pe l^∞ avem norma $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$).

Fie $\rho, r : M_+(card) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ două norme funcţionale. Orice $f \in l_\rho(l_r)$ poate fi identificat cu o matrice scalară infinită $f \equiv (x_{mn})_{m,n}$.

Pentru a putea vorbi despre algebre Banach cu unitate în cazul spaţiilor Köthe-Bochner $l_\rho(l_r)$ este necesar ca spaţiul Köthe l_r să fie echivalent cu l^∞, i.e. $l_r = l^\infty$ cu norme echivalente.

Conform Teoremei 3.5, în cazul în care l_r este echivalent cu l^∞, un spaţiu Köthe-Bochner $l_\rho(l_r)$ este algebră Banach cu unitate dacă şi numai dacă l_ρ şi l^∞ sunt spaţii Banach echivalente.

Aşadar $l_\rho(l_r) \equiv \{(x_{mn})_{m,n} \subset K \mid \sup_{m,n} |x_{mn}| < \infty\}$.

Pe $l_\rho(l_r)$ avem o normă $\|\ \|$ cu proprietatea că există $0 < L \leq M$ astfel încât

$$L \sup_{m,n} |x_{mn}| \leq \|(x_{mn})_{m,n}\| \leq M \sup_{m,n} |x_{mn}|.$$

□

3.2 Spaţii Köthe-Bochner care sunt spaţii Hilbert

Acest paragraf se bazează pe articolul [30].

În acest paragraf presupunem, în plus, că ρ este saturată.

Definiţia 3.7. Spunem că $L_\rho(X)$ este spaţiu Köthe-Bochner care este şi spaţiu Hilbert dacă:

1. $L_\rho(X)$ este spaţiu Banach.

2. Există un produs scalar $(\cdot|\cdot)$ pe $L_\rho(X)$ cu proprietatea că, pentru orice $\tilde{f} \in L_\rho(X)$, avem $\rho|f| = \left\|\tilde{f}\right\| = \sqrt{(\tilde{f}|\tilde{f})}$.

Definiţia 3.8. (vezi [27]) Numim funcţie pondere, o funcţie $w \in M_+(\mu)$ cu proprietatea că $\mu(\{t \in T \mid w(t) = 0\}) = \mu(\{t \in T \mid w(t) = \infty\}) = 0$.

Teorema 3.9. *Sunt echivalente:*

1. $L_\rho(X)$ *este spaţiu Hilbert.*

2. L_ρ *şi* X *sunt spaţii Hilbert.*

Exemplul 3.10. (Forma spaţiilor Köthe-Bochner de şiruri $l_\rho(l_r)$ care sunt spaţii Hilbert) Considerăm două norme funcţionale ρ, $r : M_+(card) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ astfel încât $l_\rho(l_r)$ este spaţiu Hilbert. Prin urmare există funcţiile pondere $u, v : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ (deci $u \equiv (a_n)_n$ şi $v \equiv (b_n)_n$, unde $0 < a_n < \infty$, $0 < b_n < \infty$ pentru orice n) cu proprietatea că $l_\rho(l_r) \equiv \Big\{(x_{mn})_{m,n} \subset K \;\Big|\; \sum\limits_{m,n} a_m b_n |x_{mn}|^2 < \infty\Big\}$.

Pe $l_\rho(l_r)$ avem norma $\|(x_{mn})_{m,n}\| = \left(\sum\limits_{m,n} a_m b_n |x_{mn}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ şi produsul scalar $((x_{mn})_{m,n}, (y_{mn})_{m,n}) = \sum\limits_{m,n} a_m b_n x_{mn} \overline{y}_{mn}$. $\square$

În continuare vom da două exemple de spaţii Köthe-Bochner $l_\rho(l_r)$, unde ρ şi r sunt norme funcţionale ρ, $r : M_+(card) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ astfel încât, sau l_ρ, sau l_r nu este spaţiu Hilbert şi identitatea paralelogramului nu este satisfăcută.

Exemplul 3.11. Considerăm $\rho(u) = \sup\limits_n u(n)$ şi $r(u) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u(n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ pentru orice $u \in M_+(card)$. Deci $l_\rho = l^\infty$, $l_r = l^2$ şi l^∞ nu este spaţiu Hilbert. Fie $f, g : \mathbb{N} \to l^2$,

$f(m) = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{m}, 0, 0, ...)$ (i.e. $f \equiv (x_{mn})_{m,n}$, unde $x_{mn} = \dfrac{1}{n}$ dacă $n \leq m$ şi $x_{mn} = 0$ dacă $n > m$),

$g(m) = (0, 0, ..., 0, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, ...)$ (i.e. $g \equiv (y_{mn})_{m,n}$, unde $y_{mn} = 0$ dacă $n \leq m$ şi $y_{mn} = \dfrac{1}{n}$ dacă $n > m$).

Avem $2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 2\dfrac{\pi^2}{3} - 2 \neq \dfrac{\pi^2}{3} = \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2$. □

Exemplul 3.12. Fie $\rho(u) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u(n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ şi $r(u) = \sup_n u(n)$ pentru orice $u \in M_+(card)$. Deci $l_\rho = l^2$ şi $l_r = l^\infty$. Considerăm $f, g : \mathbb{N} \to l^\infty$,

$f(m) = (\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, ..., \frac{1}{2m}, 0, 0, ...)$ (i.e. $f \equiv (x_{mn})_{m,n}$, unde $x_{mn} = \dfrac{1}{m+n}$ dacă $n \leq m$ şi $x_{mn} = 0$ dacă $n > m$),

$g(m) = (0, 0, ..., 0, \frac{1}{2m+1}, \frac{1}{2m+2}, ...)$ (i.e. $g \equiv (y_{mn})_{m,n}$, unde $y_{mn} = 0$ dacă $n \leq m$ şi $y_{mn} = \dfrac{1}{m+n}$ dacă $n > m$).

Avem $2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = \dfrac{7\pi^2}{12} - 4 \neq \dfrac{\pi^2}{3} - 2 = \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2$. □

3.3 Spaţii Köthe-Bochner care sunt spaţii hilbertabile

Rezultatele din acest paragraf sunt publicate în articolul [30].

Presupunem din nou că ρ este saturată.

Definiţia 3.13. Spunem că $(X, \| \|)$ este hilbertabil dacă există o normă $||| \, |||$ pe X care este echivalentă cu $\| \|$ şi $(X, ||| \, |||)$ este spaţiu Hilbert.

Teorema 3.14. *Considerăm următoarele afirmaţii:*

1. $L_\rho(X)$ *este hilbertabil.*
2. L_ρ *şi* X *sunt hilbertabile.*

Atunci 1. $\Rightarrow$ 2. *Implicaţia* 2. $\Rightarrow$ 1. *este adevărată în cazul în care* L_ρ *este tare hilbertabil (i.e. există o normă funcţională* $\rho_1 : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *astfel încât* ρ_1 *este echivalentă cu* ρ *şi* L_{ρ_1} *este spaţiu Hilbert).*

3.4 Aproximarea spaţiilor Köthe-Bochner $L_\rho(X)$ în cazul în care X are bază Schauder

Acest paragraf este bazat pe articolul [29].

Presupunem că X are baza Schauder $(e_n)_{n\geq 1}$. Pentru orice n definim proiecţia canonică $P_n : X \to X$, $P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Este cunoscut faptul că $(P_n)_{n\geq 1}$ este un şir mărginit, i.e. $\sup_n \|P_n\|_o = M < \infty$ (M se numeşte constanta bazei Schauder $(e_n)_n$). Pentru orice funcţie $f : T \to X$ definim $f_n : T \to X$, $f_n(t) = (P_n \circ f)(t)$.

Remarca 3.15. Dacă X este un spaţiu Banach de şiruri, în multe cazuri avem:

a) $e_n \in X$ pentru orice n, unde $e_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$, cu 1 pe poziţia a $n-$a.

b) $(e_n)_{n\geq 1}$ este bază Schauder pentru X.

În acest caz vom spune că $(e_n)_n$ este baza Schauder canonică a lui X. □

Teorema 3.16. *Fie $f \in \mathcal{L}_\rho(X)$. Avem scrierea unică $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ (convergenţă punctuală), unde $a_i \in \mathcal{L}_\rho$ pentru orice i.*

Lema 3.17. (vezi [80]) *Dacă ρ este de tip absolut continuu, $f \in \mathcal{L}_\rho(X)$, $(f_n)_n \subset M_X(\mu)$ astfel încât $f_n \underset{n}{\to} f$ $\mu - a.p.t.$ şi există o constantă $c > 0$ cu proprietatea că $|f_n| \leq c|f|$ $\mu - a.p.t.$ pentru orice n atunci $f_n \underset{n}{\to} f$ în $\mathcal{L}_\rho(X)$ (în particular dacă ρ este de tip absolut continuu atunci $S(T, X) \cap \mathcal{L}_\rho(X)$ este dens în $\mathcal{L}_\rho(X)$).*

Teorema 3.18. (Teorema de Aproximare) *Dacă ρ este de tip absolut continuu atunci $f_n \underset{n}{\to} f$ în $\mathcal{L}_\rho(X)$ pentru orice $f \in \mathcal{L}_\rho(X)$.*

Remarca 3.19. Condiţia "ρ de tip absolut continuu" nu poate fi eliminată din teorema precedentă după cum arată următorul contraexemplu. □

Contraexemplul 3.20. Considerăm $(T, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$. Fie $\rho : M_+(card) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\rho(u) = \sup_n u(n)$, care nu este de tip absolut continuu. Fie $X = l^2$ cu baza Schauder canonică. Fie $f \in l_\rho(X)$, $f(m) = e_m$. Atunci $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, $a_i = \varphi_{\{i\}}$, $f_n = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, deci $\rho|f - f_n| = 1$ pentru orice n. □

Exemplul 3.21. (Exemplu concret) Considerăm spaţiul cu măsură discretă $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$. Fie norma funcţională $\rho : M_+(card) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\rho(u) = \|u\|_1$, care este de tip absolut continuu. Fie X un spaţiu Lorentz de şiruri definit după cum urmează

Considerăm un şir $w = (w_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ astfel încât $w_n \downarrow 0$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$.

Fie $1 \leq p < \infty$. Definim norma funcţională $\rho_1 : M_+(card) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\rho_1(u) = \sup \left(\sum_{n=1}^{\infty} u(\pi(n))^p w_n \right)^{\frac{1}{p}}$, supremumul fiind considerat după toate bijecţiile $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Este cunoscut faptul că ρ_1 are proprietatea Riesz-Fischer (vezi [27]).

Fie spaţiul Köthe $l_{\rho_1} \overset{def}{=} d(w,p) = \{u : \mathbb{N} \to K \mid \rho_1|u| < \infty\}$. Deoarece ρ_1 are proprietatea Riesz-Fischer rezultă că $d(w,p)$ este spaţiu Banach. Numim $d(w,p)$ spaţiu Lorentz de şiruri (vezi [27]). Pentru acest spaţiu $(e_n)_n$ este bază Schauder. În plus $\|e_n\| = w_1^{\frac{1}{p}}$ pentru orice n.

Cum $d(w,p) \subset c_0$ putem calcula norma în $d(w,p)$ după următoarea formulă: $\|u\| = \rho_1|u| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|u(n)|^*)^p w_n \right)^{\frac{1}{p}}$, unde $(|u(n)|^*)_n$ este rearanjarea descrescătoare a şirului $(|u(n)|)_n$.

Fie $X = d(w,p)$ cu $1 \leq p < \infty$ arbitrar fixat şi $w = (w_n)_n$, $w_n = \dfrac{1}{n}$.

Considerăm spaţiul Köthe-Bochner de şiruri $l_\rho(d(w,p))$.

Fie $t \in K$ cu $|t| < 1$.

Definim funcţia $f : \mathbb{N} \to d(w,p)$, $f(m) = a_m = (a_{m,n})_{n \geq 1}$, unde, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $a_{m,n} = 0$ dacă $1 \leq n \leq m$ şi $a_{m,n} = t^n$ dacă $n > m$.

Avem $\rho|f - f_n| \leq n|t|^{n+1} \dfrac{1}{(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}}(1-|t|)} \underset{n}{\to} 0$.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Căutăm un nivel critic pentru n astfel încât să avem $\rho|f - f_n| < \varepsilon$.

Este suficient să avem $n|t|^{n+1} \dfrac{1}{(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}}(1-|t|)} < \varepsilon$.

După câteva calcule obţinem că este suficient să avem $n > \dfrac{2|t|^2}{(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}}(1-|t|)^3} \cdot \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.

Aplicăm formula obţinută pe un caz numeric concret.

Fie $t = \dfrac{1}{2}$, $p = 2$ şi $\varepsilon = 0,01 = \dfrac{1}{100}$.

Avem $\dfrac{2|t|^2}{(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}}(1-|t|)^3} \cdot \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 = \dfrac{800}{\sqrt{3}} - 1 \approx 460,88021$.

Aşadar, dacă $n \geq 461$, avem $\rho|f - f_n| < \dfrac{1}{100}$. □

Remarca 3.22. Calculul nu este foarte precis şi, de aceea, se obţine un nivel critic pentru n prea mare. Dacă lucrăm direct, pentru $n \geq 70$, avem $\rho|f - f_n| < \dfrac{1}{100}$. □

Capitolul 4

Dualul unui spaţiu Köthe-Bochner

4.1 Preliminarii

Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spaţiu cu măsură $\sigma-$ finită şi completă.

Definiţia 4.1. (vezi [27]) Fie $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o seminormă funcţională. Definim seminorma funcţională asociată lui ρ, $\rho' : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\rho'(u) = \sup \left\{ \int uvd\mu \,\middle|\, v \in M_+(\mu),\ \rho(v) \leq 1 \right\}.$$

Avem următoarea teoremă.

Teorema 4.2. (vezi [27]) *Fie $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o seminormă funcţională. Sunt echivalente:*

1. *ρ este normă funcţională saturată.*
2. *ρ' este normă funcţională saturată.*

Următoarea teoremă este prezentată într-o variantă uşor diferită faţă de [41]. Vom folosi, în cele ce urmează, abrevierea RNP pentru proprietatea Radon-Nikodym.

Teorema 4.3. (Teorema de Localizare) *Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spaţiu cu măsură finită (măsura μ poate să nu fie completă) şi Y un spaţiu Banach. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *Y are RNP în raport cu $(T, \mathcal{T}, \mu)$.*

2. *Pentru orice măsură $\sigma-$ aditivă $m : \mathcal{T} \to Y$ cu variaţie mărginită astfel încât $m \prec \mu$ şi pentru orice $A \in \mathcal{T}$ cu $\mu(A) > 0$ există $\mathcal{T} \ni B \subset A$ cu proprietatea că $\mu(B) > 0$ şi există $h_B \in \mathcal{L}^1(Y, \mu_B)$ astfel încât $m_B = h_B \mu_B$.*

Fie $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o normă funcţională saturată (deci ρ' este normă funcţională saturată) şi X un spaţiu Banach.

4.2 Calculul normei în $L_{\rho'}(X')$

Definim, pentru orice funcţii $\mu-$ măsurabile $f : T \to X$, $g : T \to X'$, funcţia $\mu-$ măsurabilă $(f,g) : T \to K$, $(f,g)(t) = g(t)(f(t))$.

Teorema 4.4. *Fie $f : T \to X$, $g : T \to X'$ două funcţii $\mu-$ măsurabile.*

1. *Avem* $\int |(f,g)|d\mu \leq \int |f||g|d\mu \leq \rho|f|\rho'|g|$.

2. *Dacă (f,g) este $\mu-$ integrabilă avem* $\left|\int (f,g)d\mu\right| \leq \int |(f,g)|d\mu \leq \int |f||g|d\mu \leq \rho|f|\rho'|g|$.

3. *Dacă (f,g) este $\mu-$ integrabilă pentru orice $f \in \mathcal{L}_\rho(X)$ (de exemplu dacă $g \in \mathcal{L}_{\rho'}(X')$ afirmaţia este adevărată) avem*

$$\sup\left\{\left|\int (f,g)d\mu\right| \;\middle|\; f \in \mathcal{L}_\rho(X),\ \rho|f| \leq 1\right\} = \sup\left\{\int |(f,g)|d\mu \;\middle|\; f \in \mathcal{L}_\rho(X),\ \rho|f| \leq 1\right\} \leq \rho'|g|.$$

4. *Presupunem că $g \in \mathcal{L}_{\rho'}(X')$. Definim $T_g : L_\rho(X) \to K$, $T_g(\tilde{f}) = \int (f,g)d\mu$ pentru orice reprezentant $f \in \tilde{f}$ (definiţia este corectă). Atunci T_g este liniară şi continuă şi, în plus, avem $\|T_g\|_o \leq \rho'|g|$.*

Teorema următoare ne arată că, în anumite situaţii, la punctul 3. din Teorema 4.4 avem egalitate.

Teorema 4.5. (Calculul normei în $L_{\rho'}(X')$) *Presupunem că ρ' este de tip absolut continuu. Atunci, pentru orice $g \in \mathcal{L}_{\rho'}(X')$, calculăm norma lui $\tilde{g}$ în $L_{\rho'}(X')$ astfel:*

$$\|\tilde{g}\| = \rho'|g| = \sup\left\{\left|\int (f,g)d\mu\right| \;\middle|\; f \in \mathcal{L}_\rho(X),\ \rho|f| \leq 1\right\} = \sup\left\{\int |(f,g)|d\mu \;\middle|\; f \in \mathcal{L}_\rho(X),\ \rho|f| \leq 1\right\}.$$

4.3 Scufundarea lui $L_{\rho'}(X')$ în $(L_\rho(X))'$

În cele ce urmează vom utiliza Teoremele 4.4 şi 4.5 pentru a scufunda pe $L_{\rho'}(X')$ în $(L_\rho(X))'$. Avem nevoie, pentru acest lucru, de câteva pregătiri.

Pentru orice $\tilde{g} \in L_{\rho'}(X')$ definim $H_{\tilde{g}} : L_\rho(X) \to K$, $H_{\tilde{g}}(\tilde{f}) = \int (f,g)d\mu$ pentru orice reprezentanţi $g \in \tilde{g}$, $f \in \tilde{f}$.

Fie acum $\tilde{g} \in L_{\rho'}(X')$ şi fie $g \in \tilde{g}$. Conform Teoremei 4.4, $H_{\tilde{g}}(\tilde{f}) = T_g(\tilde{f})$ pentru orice $\tilde{f} \in L_\rho(X)$.

Teorema 4.6. (Scufundarea lui $L_{\rho'}(X')$ în $(L_\rho(X))')$ 1. *Pentru orice $\tilde{g} \in L_{\rho'}(X')$ funcţionala $H_{\tilde{g}} : L_\rho(X) \to K$,*

$$H_{\tilde{g}}(\tilde{f}) = \int (f, g) d\mu$$

(pentru orice reprezentanţi $f \in \tilde{f}$, $g \in \tilde{g}$) este liniară şi continuă şi

$$\|H_{\tilde{g}}\|_o \leq \|\tilde{g}\|.$$

2. *Dacă ρ' este de tip absolut continuu atunci, pentru orice $\tilde{g} \in L_{\rho'}(X')$, avem*

$$\|H_{\tilde{g}}\|_o = \|\tilde{g}\|.$$

Aşadar aplicaţia liniară $\Omega : L_{\rho'}(X') \to (L_\rho(X))'$, $\Omega(\tilde{g}) = H_{\tilde{g}}$ este o izometrie. Spunem că $L_{\rho'}(X')$ este scufundat în $(L_\rho(X))'$ (via Ω).

4.4 Identificarea dualului unui spaţiu Köthe-Bochner cu spaţiul Köthe-Bochner asociat

Teorema 4.6 arată că, în cazul în care ρ' este de tip absolut continuu, spaţiul $L_{\rho'}(X')$ se scufundă în $L_\rho(X)$ (via Ω). Întrebarea firească ce se pune este dacă Ω este surjecţie (i.e. bijecţie) devenind astfel un izomorfism liniar şi izometric (identificare între $L_{\rho'}(X')$ şi $(L_\rho(X))'$).

Notaţie. Vom scrie

$$(L_\rho(X))' \equiv L_{\rho'}(X')$$

pentru a nota faptul că Ω este bijecţie. În acest caz spaţiile $(L_\rho(X))'$ şi $L_{\rho'}(X')$ sunt "identice".

Următoarea teoremă prezintă un caz în care $(L_\rho(X))' \equiv L_{\rho'}(X')$.

Teorema 4.7. *Presupunem că X' are RNP şi normele funcţionale ρ şi ρ' sunt de tip absolut continuu. Atunci*

$$(L_\rho(X))' \equiv L_{\rho'}(X').$$

Un caz particular când Teorema 4.7 se aplică este cel al spaţiilor Lebesgue-Bochner. Mai exact fie $1 < p < \infty$ şi fie q conjugatul lui p, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Fie $\rho = \| \ \|_p$. Atunci $\rho' = \| \ \|_q$ şi ρ şi ρ' sunt norme funcţionale saturate, de tip absolut continuu. Deci avem următorul corolar.

Corolarul 4.8. *Presupunem că X' are RNP. Fie $1 < p < \infty$ şi fie q conjugatul lui p, $1 < q < \infty$. Atunci $(L^p(X,\mu))' \equiv L^q(X',\mu)$.* □

Teorema următoare este "un fel de reciprocă" pentru Teorema 4.7, mai exact pentru Corolarul 4.8.

Considerăm spaţiul cu măsură (finită şi completă) $([0,1], \Sigma, \lambda)$, unde $\Sigma = \sigma-$ algebra mulţimilor măsurabile Lebesgue ale intervalului $[0,1]$, iar $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}_+$ este măsura Lebesgue pe $[0,1]$.

Teorema 4.9. *Presupunem că X are următoarea proprietate: există $1 \leq p < \infty$ astfel încât $(L^p(X,\lambda))' \equiv L^q(X',\lambda)$, unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci X' are RNP.*

Teorema 4.10. (Teoremă de sinteză) *Fie X un spaţiu Banach. Sunt echivalente:*

1. *X' are RNP.*

2. *Pentru orice spaţiu cu măsură $\sigma-$ finită şi completă $(T, \mathcal{T}, \mu)$ şi pentru orice normă funcţională saturată $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ cu proprietatea că ρ şi ρ' sunt de tip absolut continuu avem*

$$(L_\rho(X))' \equiv L_{\rho'}(X').$$

4.5 Reflexivitatea spaţiilor Köthe-Bochner

Teorema 4.11. *Sunt echivalente:*

1. *$L_\rho(X)$ este reflexiv.*
2. *L_ρ şi X sunt reflexive.*

Capitolul 5

Operatori liniari şi continui pe spaţii Köthe-Bochner

Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spaţiu cu măsură $\sigma-$ finită şi completă şi $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o normă funcţională.

Notăm $\mathcal{T}_\rho = \{A \in \mathcal{T} \mid \rho(A) < \infty\}$. Se observă imediat că $\mathcal{T}_\rho$ este un inel de mulţimi.

5.1 Generalizarea noţiunilor de variaţie şi semivariaţie

Fie X, E, F spaţii Banach nenule astfel încât $X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$.

Pentru orice $A \subset T$ notăm $\mathcal{E}_E(\rho, A) = \{f : T \to E \mid f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i,\ A_i \in \mathcal{T}_\rho$ mulţimi mutual disjuncte, $x_i \in E$ şi $A_i \subset A$ pentru orice $i\}$. Dacă $A = T$ notăm $\mathcal{E}_E(\rho, T) \overset{def}{=} \mathcal{E}_E(\rho)$.

În cazul $E = K$ scriem $\mathcal{E}(\rho, A)$ în loc de $\mathcal{E}_K(\rho, A)$ şi $\mathcal{E}(\rho)$ în loc de $\mathcal{E}_K(\rho)$.

Fie $m : \mathcal{T}_\rho \to X$ astfel încât $m(\phi) = 0$ şi fie $A \subset T$.

Definiţia 5.1. (Definiţie fundamentală) 1. Dacă $f \in \mathcal{E}_E(\rho, A)$ astfel încât $\rho|f| \leq 1$ spunem că f este $(\rho, E, A)-$ definită.

2. Definim $(\rho, (E, F))-$ variaţia lui m pe mulţimea A ca fiind elementul $\overline{m}_{\rho,(E,F)}(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$, unde $\overline{m}_{\rho,(E,F)}(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|m(A_i)(x_i)\| \;\middle|\; f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i \text{ este } (\rho, E, A)- \text{ definită} \right\}$.

3. Definim $(\rho, (E, F))-$ semivariaţia lui m pe mulţimea A ca fiind elementul $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$, unde $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(A) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} m(A_i)(x_i) \right\| \;\middle|\; f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i \text{ este } (\rho, E, A)- \text{ definită} \right\}$.

Remarca 5.2. În cazul $X \equiv \mathcal{L}(K, X)$, i.e. $E = K$, $F = X$ avem, pentru orice $A \subset T$,

$$\overline{m}_{\rho,(K,X)}(A) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|m(A_i)\| \;\middle|\; f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}\alpha_i \text{ este } (\rho, K, A)-\text{ definită} \right\}.$$

□

Teorema 5.3. (Invarianţa variaţiei relativ la scufundare) *Pentru orice scufundare* $X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ *şi pentru orice* $A \subset T$ *avem* $\overline{m}_{\rho,(E,F)}(A) = \overline{m}_{\rho,(K,X)}(A)$.

Vom nota $\overline{m}_\rho \overset{def}{=} \overline{m}_{\rho,(E,F)}$ pentru orice scufundare $X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ şi vom spune $\rho-$ variaţie în loc de $(\rho, (E, F))-$ variaţie.

5.2 Proprietăţi ale $\rho-$ variaţiei şi ale $(\rho, (E, F))-$ semivariaţiei

Presupunem că $X \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$.

1. $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(\phi) = \overline{m}_\rho(\phi) = 0$.

2. Pentru orice $A \subset B \subset T$ avem $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(A) \leq \widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(B)$ şi $\overline{m}_\rho(A) \leq \overline{m}_\rho(B)$.

3. Pentru orice $A \subset T$ avem $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(A) = 0 \Leftrightarrow \overline{m}_\rho(A) = 0 \Leftrightarrow \forall \mathcal{T}_\rho \ni B \subset A$, $m(B) = 0$.

4. Fie $A \in \mathcal{T}_\rho$.

a) Avem implicaţia ($\mu(A) = 0$ şi $m(A) \neq 0$)$\Rightarrow$ ($\mu(A) = 0$ şi $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(A) = \infty$).

b) Se presupune că $\mu(A) = 0$. Atunci: *i*) $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(A) < \infty \Leftrightarrow \widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(A) = 0$.

ii) $\overline{m}_\rho(A) < \infty \Leftrightarrow \overline{m}_\rho(A) = 0$.

Remarca 5.4. Implicaţia de la 4. *a*) nu admite reciprocă. Fie $T = \{a, b\}$ cu $a \neq b$, $E = F = X = K$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(T)$, $\mu \equiv 0$, $\rho \equiv 0$ (deci $\mathcal{T}_\rho = \mathcal{T}$) şi fie $m : \mathcal{T} \to K$, $m(\{a\}) = 1$, $m(\{b\}) = -1$, $m(T) = m(\phi) = 0$. Fie $B \overset{def}{=} \{b\}$. Avem $\mu(B) = 0$ şi $m(B) = -1$, deci, conform proprietăţii 4. *a*), avem că $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(B) = \infty$.

Avem $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(T) = \infty$, $\mu(T) = 0$ şi $m(T) = 0$. □

5. *a*) $\widetilde{m}_{(E,F)} \leq \widetilde{m}_{\| \|_\infty,(E,F)}$ ($\widetilde{m}_{(E,F)}$ este $(E, F)-$ semivariaţia lui m).

b) $\overline{m} \leq \overline{m}_{\| \|_\infty}$ ($\overline{m}$ este variaţia lui m).

6. Fie $A \in \mathcal{P}(T)$. Presupunem că, pentru orice $\mathcal{T} \ni B \subset A$, avem implicaţia: $(\mu(B) = 0) \Rightarrow (m(B) = 0)$. Atunci: *a*) $\widetilde{m}_{(E,F)}(A) = \widetilde{m}_{\| \|_\infty,(E,F)}(A)$.

b) $\overline{m}(A) = \overline{m}_{\| \|_\infty}(A)$.

7. Fie $A \subset T$ şi fie $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{E}_E(\rho, A)$. Atunci: *a)* $\left\| \sum_{i=1}^{n} m(A_i)(x_i) \right\| \leq \widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(A) \rho |f|$, cu excepţia cazului $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(A) = \infty$ şi $\rho|f| = 0$.

b) $\sum_{i=1}^{n} \|m(A_i)\|_o \|x_i\| \leq \overline{m}_\rho(A) \rho |f|$, cu excepţia cazului $\overline{m}_\rho(A) = \infty$ şi $\rho|f| = 0$.

8. Fie $A \in \mathcal{T}_\rho$. Avem implicaţia

$$(\mu(A) \neq 0 \text{ sau } m(A) = 0) \Rightarrow (\|m(A)\|_o \leq \widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(A) \rho(A) \leq \overline{m}_\rho(A) \rho(A)).$$

8′. Pentru orice $A \in \mathcal{T}_\rho$ avem $\|m(A)\|_o \leq \widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(A) \rho(A) \leq \overline{m}_\rho(A) \rho(A)$, cu excepţia cazului $\mu(A) = 0$ şi $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(A) = \infty$.

9. Reamintim că $\tau(\mathcal{T}_\rho) \overset{def}{=} \{A \subset T \mid A \cap B \in \mathcal{T}_\rho \text{ pentru orice } B \in \mathcal{T}_\rho\}$. Dacă m este aditivă atunci $\overline{m}_\rho$ şi $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}$ sunt subaditive pe $\tau(\mathcal{T}_\rho)$. Mai mult $\overline{m}_{\| \|_\infty}$ este aditivă pe $\mathcal{T}$.

Dacă m este $\sigma-$ aditivă atunci $\overline{m}_\rho$ şi $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}$ sunt $\sigma-$ subaditive pe $\tau(\mathcal{T}_\rho)$ (în mod extins). Mai mult $\overline{m}_{\| \|_\infty}$ este $\sigma-$ aditivă pe $\mathcal{T}$.

10. Fie $m, n : \mathcal{T}_\rho \to X$ astfel încât $m(\phi) = n(\phi) = 0$ şi fie $\alpha \in K$.

Atunci: *a)* $\widetilde{(m+n)}_{\rho,(E,F)} \leq \widetilde{m}_{\rho,(E,F)} + \widetilde{n}_{\rho,(E,F)}$ şi $\widetilde{(\alpha m)}_{\rho,(E,F)} = |\alpha| \widetilde{m}_{\rho,(E,F)}$.

b) $\overline{(m+n)}_\rho \leq \overline{m}_\rho + \overline{n}_\rho$ şi $\overline{(\alpha m)}_\rho = |\alpha| \overline{m}_\rho$.

11. Dacă $F = K$ atunci $\overline{m}_\rho = \widetilde{m}_{\rho,(E,F)}$.

12. Presupunem că ρ este de tip absolut continuu, $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(A) < \infty$ pentru orice $A \in \mathcal{T}_\rho$ şi m este aditivă. Atunci m este $\sigma-$ aditivă şi $m \prec \mu$ $(0-0)$.

5.3 Operaţii liniare şi continue pe $\mathcal{L}_\rho(E)$

Fie $m : \mathcal{T}_\rho \to \mathcal{L}(E, F)$ o măsură aditivă.

Definiţia 5.5. 1. Fie $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{E}_E(\rho)$. Definim $\int f dm \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} m(A_i)(x_i) \in F$.

2. Fie $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} \alpha_i \in \mathcal{E}(\rho)$. Definim $\int \varphi dm \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i) \in \mathcal{L}(E, F)$.

Propoziţia 5.6. *Presupunem că $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(T) < \infty$.*

1. *Dacă $(f_n)_n \subset \mathcal{E}_E(\rho)$ este şir Cauchy în $\mathcal{L}_\rho(E)$ atunci $\left(\int f_n dm \right)_n$ este şir Cauchy în F.*

1′. *Dacă $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{E}(\rho)$ este şir Cauchy în $\mathcal{L}_\rho$ atunci $\left(\int \varphi_n dm \right)_n$ este şir Cauchy în $\mathcal{L}(E, F)$.*

2. *Presupunem că* ρ *are proprietatea Riesz-Fischer. Dacă* $(f_n)_n \subset \mathcal{E}_E(\rho)$ *şi* $(g_n)_n \subset \mathcal{E}_E(\rho)$ *sunt şiruri Cauchy în* $\mathcal{L}_\rho(E)$ *şi* $(f_n)_n$ *şi* $(g_n)_n$ *converg* $\mu -$ *a.p.t. către aceeaşi funcţie atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n dm = \lim\limits_{n\to\infty}\int g_n dm$.

2′. *Presupunem că* ρ *are proprietatea Riesz-Fischer. Dacă* $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{E}(\rho)$ *şi* $(\psi_n)_n \subset \mathcal{E}(\rho)$ *sunt şiruri Cauchy în* $\mathcal{L}_\rho$ *şi* $(\varphi_n)_n$ *şi* $(\psi_n)_n$ *converg* $\mu -$ *a.p.t. către aceeaşi funcţie atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\int \varphi_n dm = \lim\limits_{n\to\infty}\int \psi_n dm$.

3. *Dacă* $(f_n)_n \subset \mathcal{E}_E(\rho)$ *şi* $(g_n)_n \subset \mathcal{E}_E(\rho)$ *converg în* $\mathcal{L}_\rho(E)$ *către aceeaşi funcţie atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n dm = \lim\limits_{n\to\infty}\int g_n dm$.

3′. *Dacă* $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{E}(\rho)$ *şi* $(\psi_n)_n \subset \mathcal{E}(\rho)$ *converg în* $\mathcal{L}_\rho$ *către aceeaşi funcţie atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\int \varphi_n dm = \lim\limits_{n\to\infty}\int \psi_n dm$.

În continuare presupunem că ρ este de tip absolut continuu.

Definiţia 5.7. Presupunem că $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(T) < \infty$. Pentru orice $f \in \mathcal{L}_\rho(E)$ (respectiv pentru orice $\varphi \in \mathcal{L}_\rho$) definim $\int f dm \stackrel{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\int f_n dm$ (respectiv $\int \varphi dm = \lim\limits_{n\to\infty}\int \varphi_n dm$), unde $(f_n)_n \subset \mathcal{E}_E(\rho)$ astfel încât $f_n \underset{n}{\to} f$ în $\mathcal{L}_\rho(E)$ (respectiv $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{E}(\rho)$ astfel încât $\varphi_n \underset{n}{\to} \varphi$ în $\mathcal{L}_\rho$).

Fie $U : \mathcal{L}_\rho(E) \to F$ un operator liniar.

Definim $\|U\|_\rho = \sup\left\{ \left\| \sum\limits_{i=1}^n U(\varphi_{A_i} x_i) \right\| \;\middle|\; f = \sum\limits_{i=1}^n \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{E}_E(\rho),\ \rho|f| \le 1 \right\}$ şi $|||U|||_\rho = \sup\left\{ \sum\limits_{i=1}^n \|U(\varphi_{A_i} x_i)\| \;\middle|\; f = \sum\limits_{i=1}^n \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{E}_E(\rho),\ \rho|f| \le 1 \right\}$.

Deoarece ρ este de tip absolut continuu,

$$\|U\|_\rho = \sup\left\{ \|U(f)\| \;\middle|\; f \in \mathcal{L}_\rho(E),\ \rho|f| \le 1 \right\}.$$

Aşadar $\|U\|_\rho \le |||U|||_\rho \le \infty$.

Propoziţia 5.8. 1. *Dacă* $F = K$ *atunci* $\|U\|_\rho = |||U|||_\rho$.

2. *Dacă* $\rho = \| \ \|_1$ *atunci* $\|U\|_\rho = |||U|||_\rho$.

Propoziţia 5.9. 1. $|||U|||_\rho = \sup\left\{ \sum\limits_{i=1}^n \|U(\varphi_{A_i} f)\| \;\middle|\; f \in \mathcal{L}_\rho(E),\ \rho|f| \le 1,\ A_i \in \mathcal{T} \text{ pentru orice } i = 1, 2, ..., n,\ A_i \cap A_j = \phi \text{ pentru orice } i \ne j \right\}$.

2. $|||U|||_\rho = \sup\left\{ \sum_{i=1}^n \|U(\varphi_i x_i)\| \;\middle|\; \varphi_i \in \mathcal{L}_\rho,\ \rho\left|\sum_{i=1}^n \varphi_i\right| \le 1,\ \varphi_i\varphi_j = 0 \text{ pentru orice } i \neq j,\right.$
$\left. x_i \in E,\ \|x_i\| \le 1 \text{ pentru orice } i = 1, 2, ..., n \right\}.$

3. $|||U|||_\rho = \sup\left\{ \sum_{i=1}^n \|U(\varphi_i f)\| \;\middle|\; f \in \mathcal{L}_\rho(E),\ \rho|f| \le 1,\ \varphi_i \text{ sunt funcţii scalare } \mu-\right.$
$\left. \text{măsurabile cu } |\varphi_i| \le 1 \text{ pentru orice } i = 1, 2, ..., n \text{ şi } \varphi_i\varphi_j = 0 \text{ pentru orice } i \neq j \right\}.$

4. $|||U|||_\rho = \sup\left\{ \sum_{i=1}^n \|U(f_i)\| \;\middle|\; f_i \in \mathcal{L}_\rho(E),\ \rho\left|\sum_{i=1}^n f_i\right| \le 1,\ |f_i||f_j| = 0 \text{ pentru orice}\right.$
$\left. i \neq j \right\}.$

Remarca 5.10. Rezultate similare se obţin pentru $\|U\|_\rho$. □

Teorema 5.11. *Există un izomorfism liniar $U \longleftrightarrow m$ între spaţiul vectorial al aplicaţiilor liniare şi continue $U : \mathcal{L}_\rho(E) \to F$ (i.e. $\|U\|_\rho < \infty$) şi spaţiul vectorial al măsurilor $\sigma-$ aditive $m : \mathcal{T}_\rho \to \mathcal{L}(E, F)$ cu $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(T) < \infty$ dat de egalitatea $U(f) = \int f dm$.*

Dacă U şi m sunt ca mai sus atunci $\|U\|_\rho = \widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(T)$ şi $|||U|||_\rho = \overline{m}_\rho(T)$.

Corolarul 5.12. *Există un izomorfism liniar $U \longleftrightarrow m$ între spaţiul vectorial al aplicaţiilor liniare $U : \mathcal{L}_\rho(E) \to F$ cu $|||U|||_\rho < \infty$ şi spaţiul vectorial al măsurilor $\sigma-$ aditive $m : \mathcal{T}_\rho \to \mathcal{L}(E, F)$ cu $\overline{m}_\rho(T) < \infty$ dat de $U(f) = \int f dm$. Dacă U şi m sunt ca mai sus atunci $\|U\|_\rho = \widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(T)$ şi $|||U|||_\rho = \overline{m}_\rho(T)$.*

Acum putem stabili o legătură între rezultatele obţinute în acest capitol şi rezultatele obţinute în capitolul 4.

Teorema 5.13. *Presupunem că ρ şi ρ' sunt de tip absolut continuu şi că E' are RNP. Fie $U : \mathcal{L}_\rho(E) \to K$ un operator liniar şi continuu.*

a) Conform Teoremei 4.7 există o funcţie (unică μ − a.p.t.) $g \in \mathcal{L}_{\rho'}(E')$ astfel încât $U(f) = \int (f, g) d\mu$ pentru orice $f \in \mathcal{L}_\rho(E)$.

b) Conform Teoremei 5.11 există o unică măsură $\sigma-$ aditivă $m : \mathcal{T}_\rho \to E'$ cu $\overline{m}_\rho(T) < \infty$ astfel încât $U(f) = \int f dm$ pentru orice $f \in \mathcal{L}_\rho(E)$.

Atunci $m = g\mu$, i.e. $m(A) = \int_A g d\mu$ pentru orice $A \in \mathcal{T}_\rho$.

Teorema 5.14. *Există o aplicaţie liniară, continuă şi injectivă* $\Omega : \mathcal{L}(\mathcal{L}_\rho(E), F) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}_\rho, \mathcal{L}(E,F))$ *definită astfel: pentru orice* $U \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_\rho(E), F)$ *elementul* $U^* = \Omega(U) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_\rho, \mathcal{L}(E,F))$ *este unic determinat de* $U^*(\varphi)(x) = U(\varphi x)$ *pentru orice* $\varphi \in \mathcal{L}_\rho$ *şi pentru orice* $x \in E$. *Avem* $\|U^*\|_\rho \leq \|U\|_\rho$, *deci* $\|\Omega\|_o \leq 1$.

Vom studia mai precis legătura între U şi U^*.

Teorema 5.15. *Fie* $U \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_\rho(E), F)$ *şi fie* $m : \mathcal{T}_\rho \to \mathcal{L}(E,F)$ *măsura* $\sigma-$ *aditivă care-l defineşte pe* U, *i.e.* $\widetilde{m}_{\rho,(E,F)}(T) < \infty$ *şi* $U(f) = \int f dm$ *pentru orice* $f \in \mathcal{L}_\rho(E)$.

Atunci, dacă $U^* = \Omega(U)$, *avem* $U^*(\varphi) = \int \varphi dm$ *pentru orice* $\varphi \in \mathcal{L}_\rho$ *şi* $\|U^*\|_\rho \leq \|U\|_\rho$, $|||U^*|||_\rho = |||U|||_\rho$.

În continuare notăm $\mathcal{LL}(\mathcal{L}_\rho(E), F) = \{U \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_\rho(E), F) \mid |||U|||_\rho < \infty\}$ şi $\mathcal{LL}(\mathcal{L}_\rho, \mathcal{L}(E,F)) = \{H \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_\rho, \mathcal{L}(E,F)) \mid |||H|||_\rho < \infty\}$.

Conform rezultatelor precedente avem injecţia liniară şi continuă $\mathcal{V} : \mathcal{LL}(\mathcal{L}_\rho(E), F) \to \mathcal{LL}(\mathcal{L}_\rho, \mathcal{L}(E,F))$, $\mathcal{V}(U) = \Omega(U)$. Vom arăta că $\mathcal{V}$ este bijecţie.

Teorema 5.16. *Aplicaţia* $\mathcal{V} : \mathcal{LL}(\mathcal{L}_\rho(E), F) \to \mathcal{LL}(\mathcal{L}_\rho, \mathcal{L}(E,F))$, $\mathcal{V}(U) = \Omega(U) = U^*$ *este bijecţie.*

Pentru orice $U \in \mathcal{LL}(\mathcal{L}_\rho(E), F)$ *există o unică măsură* $\sigma-$ *aditivă* $m : \mathcal{T}_\rho \to \mathcal{L}(E,F)$ *cu proprietatea că* $\overline{m}_\rho(T) < \infty$ *şi astfel încât* $U(f) = \int f dm$, $U^*(\varphi) = \int \varphi dm$ *pentru orice* $f \in \mathcal{L}_\rho(E)$ *şi pentru orice* $\varphi \in \mathcal{L}_\rho$.

În plus $\overline{m}_\rho(T) = |||U|||_\rho = |||U^*|||_\rho < \infty$.

Definiţia 5.17. Un operator liniar şi continuu $V : \mathcal{L}_\rho \to \mathcal{L}(E,F)$ se numeşte $(\rho, E, F)-$ natural dacă există un operator liniar şi continuu $U : \mathcal{L}_\rho(E) \to F$ astfel încât $V(\varphi)(x) = U(\varphi x)$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{L}_\rho$ şi pentru orice $x \in E$ (cu alte cuvinte $V = U^*$ sau echivalent, $V \in \Omega(\mathcal{L}(\mathcal{L}_\rho(E), F))$).

Teorema 5.18. *Un operator liniar şi continuu* $V : \mathcal{L}_\rho \to E'$ *este* $(\rho, E, K)-$ *natural dacă şi numai dacă* $|||V|||_\rho < \infty$.

În continuare vom studia un caz particular important. Cu această ocazie vom prezenta şi două exemple caracteristice.

Considerăm $(T, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$ şi un spaţiu Banach X. Fie $\rho : M_+(card) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o normă funcţională cu proprietatea Riesz-Fischer. Putem defini spaţiile Köthe-Bochner de şiruri $l_\rho(X)$.

Presupunem că $\mathcal{T}_\rho = \{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ este finită}\}$.

Această condiţie este îndeplinită dacă $\rho = \| \ \|_p$, $1 \leq p < \infty$.

Teorema 5.19. *Pentru orice operator liniar şi continuu $U : l_\rho \to F$ avem că $|||U|||_\rho < \infty$ dacă şi numai dacă $(U(e_m))_m \in l_{\rho'}(F)$.*

În continuare presupunem că $F = K$, iar E este un spaţiu Banach. Prin urmare $\mathcal{L}(l_\rho(E), F) = l_\rho(E)' = \mathcal{LL}(l_\rho(E), K)$, $\mathcal{L}(l_\rho, \mathcal{L}(E, K)) = \mathcal{L}(l_\rho, E')$ şi $\mathcal{LL}(l_\rho, \mathcal{L}(E, K)) = \mathcal{LL}(l_\rho, E')$.

Am văzut mai sus că $V \in \mathcal{L}(l_\rho, E')$ este $(\rho, E, K)-$ natural dacă şi numai dacă $V \in \mathcal{LL}(l_\rho, E')$, i.e. $|||V|||_\rho < \infty$.

Considerând Teoremele 5.18 şi 5.19 obţinem următoarea teoremă.

Teorema 5.20. *Fie $V : l_\rho \to E'$ un operator liniar şi continuu. Atunci V este $(\rho, E, K)-$ natural dacă şi numai dacă $(V(e_m))_m \in l_{\rho'}(E')$.*

Considerăm cazul particular: $E = l^2$ şi $\rho = \| \ \|_2$, deci $E' \equiv E = l^2$ şi $\rho' = \rho$.

Exemplul 5.21. (Exemplu de operator $V : l^2 \to (l^2)' \equiv l^2$ care nu este $(\| \ \|_2, l^2, K)-$ natural)

Fie V dat de matricea $(a_{pn})_{p,n}$, unde $a_{pn} = 0$ dacă $p \neq n$ şi $a_{pp} = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$.

Atunci $V(x = (x_n)_n) \equiv \left(\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}\right)_n$. Avem că V este liniar, continuu şi nu este $(\| \ \|_2, l^2, K)-$ natural.

□

Exemplul 5.22. (Exemplu de operator $V : l^2 \to (l^2)' \equiv l^2$ care este $(\| \ \|_2, l^2, K)-$ natural şi are proprietatea că $\|V\|_{\| \ \|_2} < |||V|||_{\| \ \|_2} < \infty$)

Ideea este să considerăm operatori "finit dimensionali". Anume, pentru un operator liniar şi continuu $V : l^2 \to (l^2)'$, matricea generatoare $(a_{pn})_{p,n}$ are proprietatea că $a_{pn} = 0$ dacă $p \geq 3$ sau $n \geq 3$ (doar a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} pot fi nenuli).

Atunci, pentru orice $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...) \in l^2$, avem $V(\varphi) \equiv (a_{11}\varphi_1 + a_{12}\varphi_2, a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2, 0, ..., 0, ...)$.

Avem $\|V\|_{\| \ \|_2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 + (a_{12} - a_{21})^2} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2}\right)$ şi $|||V|||_{\| \ \|_2} = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2}$.

Fie $a_{11} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 4$.

Atunci $\|V\|_{\| \ \|_2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{10} + \sqrt{50}\right) < \sqrt{30} = |||V|||_{\| \ \|_2}$. □

Capitolul 6

Elemente de cea mai bună aproximare în spaţii Köthe-Bochner

6.1 Schemă generală pentru mulţimi proximinale

Acest paragraf este bazat pe articolul [28].

Definiţia 6.1. (vezi [10], [134]) Fie $(X, \| \ \|)$ un spaţiu normat şi fie $\phi \neq A \subset X$, $A \neq X$ o mulţime închisă. Pentru orice $x \in X \setminus A$ definim mulţimea (posibil vidă)

$$\mathcal{P}_A(x) = \{a \in A \mid \|x - a\| = dist(x, A)\},$$

unde $dist(x, A) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}$ este distanţa între x şi A. Un element $a \in \mathcal{P}_A(x)$ se numeşte element de cea mai bună aproximare a lui x pe mulţimea A. Mulţimea închisă A $(\phi \neq A \subset X,\ A \neq X)$ se numeşte proximinală în X dacă $\mathcal{P}_A(x) \neq \phi$ pentru orice $x \in X \setminus A$ (dacă X se subînţelege spunem că A este proximinală).

Remarca 6.2. *(vezi [10], [134])* 1. Dacă X este un spaţiu normat şi $A \subset X$ este un subspaţiu (vectorial) finit dimensional atunci A este mulţime proximinală.

2. Dacă X este un spaţiu reflexiv atunci orice mulţime convexă şi închisă $\phi \neq A \subset X$, $A \neq X$ este proximinală. □

6.1.1 O metodă pentru a găsi mulţimi proximinale

Schemă generală. Fie un şir descrescător de spaţii Banach $(X_n, ||| \ |||_n)$ $(X_{n+1} \subset X_n$ pentru orice $n)$ cu proprietatea că $X_\infty \overset{def}{=} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n \neq \{0\}$. Presupunem că, pentru orice $x \in X_\infty$, şirul $(|||x|||_n)_n$ este crescător. Definim $X \stackrel{def}{=} \{x \in X_\infty \mid \sup\limits_n |||x|||_n < \infty\}$ şi presupunem că $X \neq \{0\}$. Menţionăm că incluziunea $X \subset X_\infty$ este, în general, strictă.

Pentru orice $x \in X$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim $\|x\|_n \stackrel{def}{=} |||x|||_n$ şi $\|x\| \stackrel{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} |||x|||_n = \sup\limits_n |||x|||_n$. Obţinem normele $\| \;\|$ şi $\| \;\|_n$ pe X şi avem $\| \;\|_n \leq \| \;\|_{n+1} \leq \| \;\|$ (deci şirul $(\| \;\|_n)_n$ este crescător) cu $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x\|_n = \sup\limits_n \|x\|_n$ pentru orice $x \in X$. Presupunem că $(X_n, ||| \;|||_n)$ sunt spaţii reflexive.

Fie $\phi \neq A \subset X$, $A \neq X$ astfel încât A este convexă, mărginită în $(X, \| \;\|)$ (deci A este mărginită în toate $(X_n, ||| \;|||_n)$) şi închisă (deci slab închisă) în $(X, \| \;\|)$ şi în toate $(X_n, ||| \;|||_n)$.

Teorema 6.3. *În condiţiile din* ***Schema generală*** *A este proximinală în $(X, \| \;\|)$.*

Caz particular al Schemei generale: Spaţiile Köthe. Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spaţiu cu măsură $\sigma-$ finită şi completă şi fie $(\rho_n)_n$ un şir crescător de norme funcţionale, $\rho_n : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (i.e. $\rho_n \leq \rho_{n+1}$ pentru orice n). Presupunem că ρ_n are proprietatea Riesz-Fischer pentru orice n. Obţinem şirul descrescător de spaţii Banach $(X_n)_n$, unde $X_n = L_{\rho_n}$ cu norma $||| \;|||_n \stackrel{def}{=} \| \;\|_{\rho_n}$ pentru orice n ($\left\|\tilde{f}\right\|_{\rho_n} = \rho_n|f|$ pentru orice $f \in \tilde{f}$). Presupunem că $X_\infty \stackrel{def}{=} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n \neq \{0\}$.

Definim norma funcţională $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\rho(u) = \sup\limits_n \rho_n(u)$. Se observă că ρ are proprietatea Riesz-Fischer, deci $(X, \| \;\|) = (L_\rho, \| \;\|_\rho)$ este spaţiu Banach, unde $X = \{\tilde{f} \in X_\infty \Big| \sup\limits_n \left\|\tilde{f}\right\|_{\rho_n} < \infty\}$.

Presupunem că toate spaţiile $(L_{\rho_n}, \| \;\|_{\rho_n})$ sunt reflexive.

Fie $0 < M < \infty$ şi fie $A \subset \{\tilde{f} \in L_\rho \Big| \left\|\tilde{f}\right\|_\rho \leq M\}$ o mulţime convexă, închisă în L_ρ şi închisă în toate spaţiile L_{ρ_n}.

Observăm că sunt îndeplinite condiţiile din **Schema generală** luând $(X_n, ||| \;|||_n)$, X_∞, X, $\| \;\|_n$, $\| \;\|$ şi A ca mai sus.

6.1.2 Aplicaţii

Modelul spaţiilor $L^p(\mu)$

Acesta este un caz particular pentru modelul spaţiilor Köthe.

Teorema 6.4. *Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spaţiu cu măsură finită (i.e. $\mu(T) < \infty$) şi fie $0 < M < \infty$. Atunci orice mulţime convexă $A \subset \{\tilde{f} \in L^\infty(\mu) \Big| \left\|\tilde{f}\right\|_\infty \leq M\}$, care este închisă în toate*

$L^p(\mu)$, $1 \le p \le \infty$, *este proximinală în* $L^\infty(\mu)$.

Remarca 6.5. Subliniem faptul că există mulţimi A care posedă proprietăţile enumerate în Teorema 6.4.

1. Fie $A = \left\{ \tilde{f} \in L^\infty(\mu) \;\middle|\; \left\| \tilde{f} \right\|_\infty \le M \right\}$.
2. Fie $H \in \mathcal{T}$ cu $\mu(H) > 0$. Considerăm

$$A = \left\{ \tilde{f} \in L^\infty(\mu) \;\middle|\; \left\| \tilde{f} \right\|_\infty \le M, \, \widetilde{\varphi_H f} = 0 \right\}.$$

$\square$

Modelul spaţiilor Lorentz de şiruri

Fie $1 \le p < \infty$ şi $w = (w_n)_n$ un şir de numere reale astfel încât $w_n > 0$ pentru orice n, $(w_n)_n$ este descrescător, $w \in c_0$ (i.e. $w_n \underset{n}{\to} 0$) şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$. De exemplu putem lua $w_n = \dfrac{1}{n}$.

Reamintim că $d(w,p) = \{x = (x_n)_n \;\Big|\; \sup\limits_\pi \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_{\pi(n)}|^p w_n \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$, supremumul fiind considerat după toate bijecţiile $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Se cunoaşte că $(d(w,p), \| \, \|_{w,p})$ este un spaţiu Banach cu norma

$$\|x\|_{w,p} = \sup_\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{\pi(n)}|^p w_n \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Norma lui $d(w,p)$ se calculează de cele mai multe ori folosind rearanjarea descrescătoare a unui şir de numere reale, pozitive, convergent către 0 (vezi Capitolul 3).

De acum înainte fixăm w.

Teorema 6.6. *Fie* $0 < M < \infty$. *Orice mulţime convexă* $A \subset \{x \in d(w,1) \mid \|x\|_{w,1} \le M\}$, *care este închisă în toate spaţiile* $d(w,p)$, $1 \le p < \infty$, *este proximinală în* $d(w,1)$.

Remarca 6.7. Există mulţimi care să îndeplinească cerinţele din Teorema 6.6.

1. Fie $A = \{x \in d(w,1) \mid \|x\|_{w,1} \le M\}$.
2. Fie $A = \{x = (x_n)_n \in d(w,1) \mid \|x\|_{w,1} \le M$ şi $x_{2n} = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}\}$. $\square$

6.2 Mulţimi proximinale în spaţii Köthe-Bochner de şiruri

Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spaţiu cu măsură $\sigma-$ finită şi completă, $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o normă funcţională şi fie X un spaţiu Banach.

Definiţia 6.8. (vezi [27]) O mulţime nevidă $A \subset L_\rho(X)$ se numeşte solidă dacă, pentru orice $\tilde{f} \in A$, pentru orice reprezentant $f \in \tilde{f}$ şi pentru orice $g \in M_X(\mu)$ cu proprietatea că $\|g(t)\| \le \|f(t)\|$ $\mu - a.p.t.$, avem $\tilde{g} \in A$.

Considerăm $\phi \neq H \in \mathcal{T}$. Definim proiecţia $P_H : L_\rho(X) \to L_\rho(X)$, $P_H(\tilde{f}) = \widetilde{\varphi_H f}$. Se observă că, sau $P_H = 0$, sau $\|P_H\|_o = 1$ şi, în cazul în care $A \subset L_\rho(X)$ este solidă, avem că $P_H(A) \subset A$ (dacă $\tilde{f} \in A$, $f \in \tilde{f}$ şi $g \in P_H(\tilde{f})$ avem $|g| \le |f|$ $\mu - a.p.t.$, deci $\tilde{g} \in A$).

Teorema 6.9. *Presupunem că există un şir $(T_n)_n \subset \mathcal{T}$, $(T_n)_n$ crescător (i.e. $T_n \subset T_{n+1}$) cu $\bigcup\limits_n T_n = T$ astfel încât $P_{T_n}(L_\rho(X))$ este reflexiv pentru orice n. Presupunem, de asemenea, că ρ este de tip absolut continuu şi ρ are proprietatea lui Fatou.*

Fie $A \subset L_\rho(X)$, $\phi \neq A \neq L_\rho(X)$ o mulţime solidă, convexă, mărginită şi închisă. Atunci A este proximinală.

Un rezultat aparent mai general este dat de teorema următoare.

Teorema 6.10. *Lucrăm în ipotezele Teoremei 6.9. Fie $P : L_\rho(X) \to L_\rho(X)$ un proiector cu proprietatea că $P(A) \subset A$ şi $P(L_\rho(X))$ este solidă (de exemplu putem lua $P = P_H$, unde $H \in \mathcal{T}$).*

Atunci $P(A)$ este proximinală.

Aplicăm Teorema 6.9 pentru spaţiile Köthe de şiruri l_ρ.

Teorema 6.11. *Considerăm spaţiul cu măsură discretă $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$ şi $\rho : M_+(card) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o normă funcţională de tip absolut continuu şi cu proprietatea lui Fatou. Dacă $A \subset l_\rho$, $\phi \neq A \neq l_\rho$ este solidă, convexă, mărginită şi închisă atunci A este proximinală.*

Remarca 6.12. Rezultatul din Teorema 6.11 este valabil şi pentru spaţii Köthe-Bochner de şiruri în cazul în care X este reflexiv. $\square$

Capitolul 7

Aplicaţii. Direcţii de cercetare

7.1 Divergenţele Tsallis şi Rényi pentru polinoamele Jacobi generalizate

Acest paragraf este bazat pe articolul [131].

Fie $p = (p_1, ..., p_n)$ o distribuţie de probabilitate $\left(p_i \geq 0 \text{ şi } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$.

Definiţia 7.1. (vezi [142], [143]) Definim entropia Tsallis discretă pentru distribuţia de probabilitate p via

$$\mathcal{S}^T(p) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log^T(p_i),$$

unde $\log^T$ este logaritmul Tsallis definit prin

$$\log^T(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} - 1}{\alpha - 1} & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Definiţia 7.2. (vezi [142]) Definim divergenţa Tsallis discretă via

$$\mathcal{D}^T(p) = n^{\alpha-1}\left(-\log^T\left(\frac{1}{n}\right) - \mathcal{S}^T(p)\right).$$

Definiţia 7.3. (vezi [119], [124]) Definim entropia Rényi discretă via

$$\mathcal{S}^R(p) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha} \right)$$

pentru orice $\alpha \in (0, \infty) \setminus \{1\}$.

Definiţia 7.4. (vezi [119]) Definim divergenţa Rényi discretă via

$$\mathcal{D}^R(p) = \log n - \mathcal{S}^R(p).$$

Mergând pe ideile din articolele [75] şi [93] vom defini un şir de polinoame Jacobi generalizate $q_n(x) = k_n x^n + ...$, $k_n > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (i.e. $\int_{-1}^{1} q_m(x) q_n(x) w(x) dx = \delta_{mn}$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, unde δ_{mn} este simbolul lui Kronecker şi $w(x) \overset{def}{=} (1-x)^u (1+x)^v h(x)$ pentru orice $x \in [-1, 1]$; aici $u, v > -1$ şi h este o funcţie reală, analitică şi strict pozitivă pe intervalul $[-1, 1]$).

Definim $K_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i(x) q_i(y)$.

Punând $x = y$ în formula precedentă găsim a $n-$a funcţie Christoffel $\lambda_n(x) \overset{def}{=} \dfrac{1}{K_n(x, x)}$.

Considerăm distribuţia de probabilitate $\psi_n(x) = (\psi_{n,1}(x), ..., \psi_{n,n}(x))$, unde $\psi_{n,j}(x) = \lambda_n(x) q_{j-1}^2(x)$ pentru orice $j = 1, 2, ..., n$.

În continuare ne propunem să studiem comportamentul asimptotic al divergenţei Tsallis $\mathcal{D}^T(\psi_n(x))$ (respectiv al divergenţei Rényi $\mathcal{D}^R(\psi_n(x))$) când n tinde la ∞ pentru orice $x \in (-1, 1)$.

De acum înainte în acest paragraf, dacă $x = \cos\theta \in (-1, 1)$, presupunem că $\theta \in (0, \pi)$.

Teorema 7.5. *Presupunem că $\alpha \geq 0$. Limita $\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}^T(\psi_n(x))$ există pentru orice $x = \cos\theta \in (-1, 1)$. Notăm $\mathcal{D}_\infty^T(x) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \mathcal{D}^T(\psi_n(x))$.*

Teorema 7.6. *Limita $\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}^R(\psi_n(x))$ există pentru orice $x = \cos\theta \in (-1, 1)$. Notăm $\mathcal{D}_\infty^R(x) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \mathcal{D}^R(\psi_n(x))$.*

7.2 Spaţii Köthe-Bochner definite de o funcţie de entropie

Fie $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un spaţiu cu măsură $\sigma-$ finită şi completă şi fie X un spaţiu Banach.

Definiţia 7.7. (vezi [19]) O funcţie $E : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se numeşte quasi-funcţie de entropie pe $(T, \mathcal{T}, \mu)$ dacă are următoarele proprietăţi:

1. $E(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0$ (absolut continuitate în raport cu μ).
2. $E(A) \leq E(B)$ pentru orice $A, B \in \mathcal{T}$ astfel încât $A \subset B$ (monotonie).
3. Există $c \geq 1$ astfel încât $E(A \cup B) \leq c\,(E(A) + E(B))$ pentru orice $A, B \in \mathcal{T}$.
4. $E\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim\limits_{i\to\infty} E(A_i) = \sup\limits_i E(A_i)$ pentru orice şir crescător $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{T}$.

Dacă în proprietatea 3., $c = 1$ spunem că E este funcţie de entropie.

În cele ce urmează considerăm o funcţie de entropie E.

Considerăm o familie $(A_t)_{t\in[0,\infty)} \subset \mathcal{T}$ care este descrescătoare: $0 \leq s < t \Rightarrow A_t \subset A_s$. Rezultă că funcţia $h : [0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $h(t) = E(A_t)$ este descrescătoare.

Putem calcula integrala Lebesgue (notăm $\lambda \overset{def}{=}$ măsura Lebesgue pe $[0, \infty)$)

$$\int h d\lambda \overset{def}{=} \int_0^{\infty} h(t)dt \leq \infty \tag{7.1}$$

(dacă intervalul $\{t \in [0, \infty) \mid h(t) = \infty\}$ are lungime strict pozitivă integrala de la (7.1) este automat egală cu ∞).

Definim $\rho_E : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\rho_E(u) = \int_0^{\infty} E(\{t \in T \mid u(t) > s\})ds. \tag{7.2}$$

Definiţia 7.8. Fie $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o funcţie. Spunem că ρ este quasi-normă funcţională dacă îndeplineşte proprietăţile (pentru orice u, $v \in M_+(\mu)$ şi pentru orice $\alpha \in [0, \infty)$):

1. $\rho(u) = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0\ \mu - a.p.t.$
2. $u \leq v \Rightarrow \rho(u) \leq \rho(v)$.
3. Există $c \geq 1$ astfel încât $\rho(u + v) \leq c\,(\rho(u) + \rho(v))$.
4. $\rho(\alpha u) = \alpha\rho(u)$ (folosim convenţia $0 \cdot \infty = 0$).

Pentru orice quasi-normă funcţională ρ definim spaţiul $\mathcal{L}_\rho(X) = \{f \in M_X(\mu) \mid \rho|f| < \infty\}$. Acesta se numeşte spaţiu quasi-Köthe-Bochner şi este quasi-seminormat cu quasi-seminorma $f \to \rho|f|$. Spaţiul nul al acestei quasi-seminorme este $\mathcal{N}_X(\mu)$. Ca în cazul spaţiilor Köthe-Bochner definim spaţiul quasi-Köthe-Bochner $L_\rho(X) = \mathcal{L}_\rho(X)/\mathcal{N}_X(\mu)$. Acesta este quasi-normat cu quasi-norma $\tilde{f} \to \left\|\tilde{f}\right\| = \rho|f|$ pentru orice reprezentant $f \in \tilde{f}$.

Definiţia 7.9. Spunem că quasi-norma funcţională $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ are proprietatea lui Fatou dacă, pentru orice şir crescător $(u_n)_n \subset M_+(\mu)$, avem $\rho(u) = \sup\limits_n \rho(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n)$, unde $u = \sup\limits_n u_n$ (punctual) (notăm $u_n \uparrow u$).

Teorema 7.10. *Funcţia ρ_E este quasi-normă funcţională cu proprietatea lui Fatou.*

Teorema 7.11. *Funcţia ρ_E este normă funcţională dacă şi numai dacă E este tare subaditivă (i.e. pentru orice A, $B \in \mathcal{T}$ avem $E(A \cup B) + E(A \cap B) \leq E(A) + E(B)$).*

Putem defini spaţiul quasi-Köthe-Bochner quasi-seminormat

$$\mathcal{L}_{\rho_E}(X) = \{f : T \to X \mid f \text{ este } \mu- \text{ măsurabilă şi } \rho_E|f| < \infty\}.$$

Teorema 7.12. *Spaţiul quasi-seminormat $\mathcal{L}_{\rho_E}(X)$ este spaţiu vectorial topologic. Un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii pentru topologia de spaţiu vectorial topologic a lui $\mathcal{L}_{\rho_E}(X)$ este format din toate mulţimile $V(\varepsilon)$ când ε parcurge $(0, \infty)$, unde $V(\varepsilon) = \{f \in \mathcal{L}_{\rho_E}(X) \mid \rho_E|f| < \varepsilon\}$.*

Se pune problema dacă spaţiul $\mathcal{L}_{\rho_E}(X)$ este trivial. Vom vedea că, atunci când $E(T) < \infty$, spaţiul $\mathcal{L}_{\rho_E}(X)$ nu este trivial. Mai precis avem următoarea teoremă.

Teorema 7.13. *Dacă $E(T) < \infty$ avem incluziunea*

$$\mathcal{B}_X(\mu) \subset \mathcal{L}_{\rho_E}(X),$$

unde $\mathcal{B}_X(\mu)$ este spaţiul vectorial al tuturor funcţiilor $f : T \to X$ care sunt $\mu-$ măsurabile şi mărginite.

În general spaţiul vectorial topologic $\mathcal{L}_{\rho_E}(X)$ nu este separat. Avem $\overline{\{0\}} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \{f \in \mathcal{L}_{\rho_E}(X) \mid \rho_E|f| = 0\} = \{f : T \to X \mid f(t) = 0 \ \mu - a.p.t.\}$.

Spaţiul separat asociat este $L_{\rho_E}(X) = \mathcal{L}_{\rho_E}(X)/\overline{\{0\}}$. Acesta este quasi-normat cu quasi-norma $\tilde{f} \to \left\|\tilde{f}\right\| \overset{def}{=} \rho_E|f|$ pentru orice reprezentant $f \in \tilde{f}$ şi se numeşte spaţiu quasi-Köthe-Bochner quasi-normat.

Exemple

Fie $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie cu următoarele proprietăţi:

1. $\varphi(0) = 0$.
2. $\varphi(t) > 0$ pentru orice $t > 0$.
3. φ este crescătoare.

Considerăm $n \in \mathbb{N}$ arbitrar fixat.

Fie $T = [0,1]^n$. Pe T considerăm norma euclidiană notată $\| \ \|$.

Pentru orice $\delta > 0$ definim $\mu^{\delta,*} : \mathcal{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\mu^{\delta,*}(A) = \begin{cases} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(diam(I_k)\right) \ \middle| \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \right. & \\ \left. I_k \text{ intervale diadice}, \ diam(I_k) < \delta \right\} & \text{dacă există astfel de intervale} \\ \infty & \text{altfel.} \end{cases}$$

Definim măsura exterioară Hausdorff generalizată relativ la φ, $\mu^* : \mathcal{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\mu^*(A) = \lim_{\delta \to 0} \mu^{\delta,*}(A)$.

Fie $\mathcal{T} = \{A \subset T \mid A \text{ este } \mu^*- \text{ măsurabilă}\}$. Notăm $\mu = \mu^*|_{\mathcal{T}}$.

Am obţinut aşadar spaţiul cu măsură finită şi completă $(T, \mathcal{T}, \mu)$.

Exemplul 7.14. Fie $E_\varphi : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$E_\varphi(A) = \begin{cases} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(diam(I_k)\right) \ \middle| \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \right. & \\ \left. I_k \text{ intervale diadice} \right\} & \text{dacă există astfel de intervale} \\ \infty & \text{altfel.} \end{cases}$$

Se observă că E_φ este funcţie de entropie.

În plus, pentru orice mulţimi A, $B \in \mathcal{T}$, avem $E_\varphi(A \cup B) + E_\varphi(A \cap B) \le E_\varphi(A) + E_\varphi(B)$ (vezi [19]). Aşadar ρ_{E_φ} este normă funcţională, deci obţinem spaţiile Köthe-Bochner $\mathcal{L}_{\rho_{E_\varphi}}(X)$ şi $L_{\rho_{E_\varphi}}(X)$. □

În continuare vom considera cazuri particulare de funcţii φ cu proprietăţile de mai sus.

Exemplul 7.15. (Spaţii Köthe-Bochner de tip Shannon-Fefferman) Fie $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) = -x \log x$ dacă $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ şi $\varphi(x) = \frac{1}{e}$ dacă $x \ge \frac{1}{e}$.

Ca mai sus definim funcţia de entropie E_φ şi spaţiile Köthe-Bochner $\mathcal{L}_{\rho_{E_\varphi}}(X)$ şi $L_{\rho_{E_\varphi}}(X)$. Spunem că acestea sunt spaţii Köthe-Bochner de tip Shannon-Fefferman. □

Exemplul 7.16. (Spaţii Köthe-Bochner de tip Tsallis) Fie $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(x) = -x \log^T(x)$ dacă $x \in \left[0, \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$ şi $\varphi(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ dacă $x \ge \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ (reamintim că $\log^T(0) = 0$, deci $\varphi(0) = 0$).

Ca mai sus definim funcţia de entropie E_φ şi spaţiile Köthe-Bochner $\mathcal{L}_{\rho_{E_\varphi}}(X)$ şi $L_{\rho_{E_\varphi}}(X)$. Spunem că acestea sunt spaţii Köthe-Bochner de tip Tsallis. □

Exemplul 7.17. (Funcţia de entropie definită de o normă funcţională) Fie $r : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o normă funcţională cu proprietatea lui Fatou. Aceasta defineşte o funcţie de entropie $E_r : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definită via $E_r(A) = r(A)$.

Ca mai sus definim quasi-norma funcţională ρ_{E_r} şi spaţiile quasi-Köthe-Bochner $\mathcal{L}_{\rho_{E_r}}(X)$ şi $L_{\rho_{E_r}}(X)$. □

Întrebările naturale care se pot pune sunt:

1. Ce condiţii trebuie impuse lui r astfel încât ρ_{E_r} să fie normă funcţională?

2. Există vreo legătură între spaţiul quasi-Köthe-Bochner $L_{\rho_{E_r}}(X)$ şi spaţiul Köthe-Bochner $L_r(X)$?

Remarcă finală. Am reuşit să legăm între ele teorii diferite: spaţii funcţionale, optimizare, entropie. Avem în vedere şi o legătură cu teoria fractalilor pe care am început-o în [45].

Bibliografie

[1] S. Abe, *Axioms and uniqueness theorem for Tsallis entropy*, Phys. Lett. A 271 (2000), 74–79.

[2] A.Y. Abul-Magd, *Nonextensive random-matrix theory based on Kaniadakis entropy*, Physics Letters A 361 (2007), 450–454.

[3] M.D. Acosta, A. Kamińska, M. Mastylo, *The Daugavet property in rearrangement invariant spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 367 (2015), 4061–4078.

[4] D.R. Adams, L.I. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Springer, Berlin, 1996.

[5] G.R. Allan, *Introduction to Banach Spaces and Algebras*, Oxford University Press, 2011 (pregătită pentru publicare de H.G. Dales).

[6] A. Almeida, *Inversion of the Riesz potential operator on Lebesgue spaces with variable exponent*, Fract. Calc. Appl. Anal. 6 (2003), 311–327.

[7] A.I. Aptekarev, J.S. Dehesa, A. Martínez-Finkelshtein, *Asymptotics of orthogonal polynomial's entropy*, J. Comput. Appl. Math. 233 (2010), 1355–1365.

[8] A.I. Aptekarev, J.S. Dehesa, A. Martínez-Finkelshtein, R. Yañez, *Discrete entropies of orthogonal polynomials*, Constr. Approx. 30 (2009), 93–119.

[9] A.I. Aptekarev, J.S. Dehesa, P. Sánchez-Moreno, D.N. Tulyakov, *Rényi entropy of the infinite well potential in momentum space and Dirichlet-like trigonometric functionals*, J. Math. Chem. 50 (2012), 1079–1090.

[10] V. Barbu, T. Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Spaces (fourth edition)*, Springer, 2010.

[11] R. Beattie, H.-P. Butzmann, *Convergence Structures and Applications to Functional Analysis*, Springer-Science+Bussines Media, B.V., 2002.

[12] M. Beenamol, S. Prabavathy, J. Mohanalin, *Wavelet based seismic signal de-noising using Shannon and Tsallis entropy*, Computers and Mathematics with Applications 64 (2012), 3580–3593.

[13] G.M. Bosyk, S. Zozor, F. Holik, M. Portesi, P.W. Lamberti, *Comment on "Quantum Kaniadakis entropy under projective measurement"*, Phys. Rev. E 94 (2016), 026103.

[14] V. Buyarov, J.S. Dehesa, A. Martínez-Finkelshtein, J. Sánchez-Lara, *Computation of the entropy of polynomials orthogonal on an interval*, SIAM J. Sci. Comput. 26 (2004), 488–509.

[15] J.M. Calabuig, E. Jiménez Férnandez, M.A. Juan, E.A. Sánchez Pérez, *Tensor product representation of Köthe-Bochner spaces and their dual spaces*, Positivity 20 (2016), 155–169.

[16] J.M. Calabuig, J. Rodríguez, E.A. Sánchez Pérez, *Multiplication operators in Köthe-Bochner spaces*, J. Math. Anal. Appl. 373 (2011), 316–321.

[17] P. Cembranos, J. Mendoza, *Banach Spaces of Vector-Valued Functions*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1997.

[18] J. Cerda, *Lorentz capacity spaces*, AMS Contemp. Math. 445 (2007), 49–55.

[19] J. Cerda, H. Coll, J. Martín, *Entropy function spaces and interpolation*, J. Math. Anal. Appl. 304 (2005), 269–295.

[20] J. Cerda, H. Hudzik, M. Mastylo, *Geometric properties in Köthe-Bochner spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 120 (1996), 521–533.

[21] J. Cerda, J. Martín, P. Silvestre, *Capacitary function spaces*, Collect. Math. 62 (2011), 95–118.

[22] F. Chapeau-Blondeau, A. Delahaies, D. Rousseau, *Tsallis entropy measure of noise-aided information transmission in a binary channel*, Physics Letters A 375 (2011), 2211–2219.

[23] S. Chen, R. Pluciennik, *A note on H-points in Köthe-Bochner spaces*, Acta Math. Hungar. 94 (2002), 59–66.

[24] I. Chiţescu, *Finitely Purely Atomic Measures: Coincidence and Rigidity Properties*, Rend. Cont. Circ. Mat. Palermo 50 (2001), 455–476.

[25] I. Chiţescu, *Köthe spaces that are Banach algebras whith unit*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.R. 18 (66) (1976), 269–271.

[26] I. Chiţescu, *Köthe spaces that are Hilbert spaces*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.R. 18 (66) (1976), 25–29.

[27] I. Chiţescu, *Spaţii de Funcţii*, Ed. Şt. Encicl., Bucureşti, 1983.

[28] I. Chiţescu, V. Preda, **R.-C. Sfetcu**, *Polya-type best approximation of convex sets*, acceptat pentru publicare la J. Nonlinear Conv. Anal.

[29] I. Chiţescu, **R.-C. Sfetcu**, O. Cojocaru, *Approximation of Köthe-Bochner spaces $L_\rho(X)$ in case X has a Schauder basis*, Romanian Journal of Information Science and Technology 18 (2015), 69–78.

[30] I. Chiţescu, **R.-C. Sfetcu**, O. Cojocaru, *Köthe-Bochner spaces that are Hilbert spaces*, Carpathian J. Math. 33 (2017), 153–160.

[31] B. Collins, I. Nechita, *Random quantum channels II: Entanglement of random subspaces, Rényi entropy estimates and additivity problems*, Adv. Math. 226 (2011), 1181–1201.

[32] R. Cristescu, *Analiză Funcţională, Ed. III*, Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1979.

[33] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Approximate identities in variable L^p spaces*, Math. Nachr. 280 (2007), 256–270.

[34] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Convergence in measure of approximate identities in variable Lebesgue spaces*, Anal. Appl. 13 (2015), 413–418.

[35] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Convergence in variable Lebesgue spaces*, Publ. Mat. 54 (2010), 441–459.

[36] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J.M. Martell, C. Pérez, *The boundedness of classical operators on variable L^p spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31 (2006), 239–264.

[37] E.M.F. Curado, P. Tempesta, C. Tsallis, *A new entropy based on a group-theoretical structure*, Ann. Phys. 366 (2016), 22–31.

[38] S. Curilef, A.R. Plastino, A. Plastino, *Tsallis'maximum entropy ansatz leading to exact analytical time dependent wave packet solutions of a nonlinear Schrödinger equation*, Physica A 392 (2013), 2631–2642.

[39] J. Déscloux, *Approximations in L^p and Chebyshev Approximations*, J. Soc. Indust. Appl. Math. 11 (1963), 1017–1026.

[40] J.C. Díaz, P. Domański, *Reflexive operators with domain in Köthe spaces*, manuscripta math. 97 (1998), 189–204.

[41] J. Diestel, J.J. Uhl Jr., *Vector Measures. Survey 15*, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1977.

[42] J. Dieudonné, *Sur les espaces de Köthe*, J. d'Analyse Math. 1 (1951), 81–115.

[43] N. Dinculeanu, *Vector Measures*, Pergamon Press, New York, 1967.

[44] P.G. Dodds, B. de Pagter, *Normed Köthe spaces: A non-commutative viewpoint*, Indag. Math. 25 (2014), 206–249.

[45] D. Dumitru, L. Ioana, **R.-C. Sfetcu**, F. Strobin, *Topological version of generalized (infinite) iterated function systems*, Chaos, Solitons & Fractals 71 (2015), 78–90.

[46] H. Duru, A. Kitover, M. Orhon, *Multiplication operators on vector-valued function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), 3501–3513.

[47] H. Dutta, B. Surrender Reddy, *Computation of the Köthe-Toeplitz dual of some sets of sequences of fuzzy numbers*, New Mathematics and Natural Computation 7 (2011), 63–70.

[48] R.A. Fefferman, *A theory of entropy in Fourier analysis*, Adv. Math. 30 (1978), 171–201.

[49] S. Furuichi, *Information theoretical properties of Tsallis entropies*, J. Math. Phys. 47 (2006), 023302.

[50] S. Furuichi, F.-C. Mitroi, *Mathematical inequalities for some divergences*, Physica A 391 (2012), 388–400.

[51] A. Ghika, *Analiză Funcţională*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1967.

[52] J.L. Gonzalez, E.L. de Faria, M.P. Albuquerque, M.P. Albuquerque, *Nonadditive Tsallis entropy applied to the Earth's climate*, Physica A 390 (2011), 587–594.

[53] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, C. Zălinescu, *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, Springer-Verlag, New York, Inc. 2003.

[54] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer Science+Business Media, LLC, 2008.

[55] K.A. Grasse, *Mapping properties that preserve convergence in measure on finite measure spaces*, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), 1116–1123.

[56] N.E. Gretsky, J.J. Uhl Jr., *Bounded linear operators into vector-valued Banach function spaces*, Indag. Math. (Proceedings) 77 (1974), 457–462.

[57] N.E. Gretsky, J.J. Uhl Jr., *Bounded linear operators on Banach function spaces of vector-valued functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 167 (1972), 263–277.

[58] M. Hayashi, *Limiting behavior of relative Rényi entropy in a non-regular location shift family*, Ann. Inst. Stat. Math. 62 (2010), 547–569.

[59] H. Hudzik, R. Kaczmarek, *Monotonicity characteristic of Köthe-Bochner spaces*, J. Math. Anal. Appl. 349 (2009), 459–468.

[60] H. Hudzik, A. Kamińska, M. Mastylo, *On the dual of Orlicz-Lorentz space*, Proc. Am. Math. Soc. 130 (2002), 1645–1654.

[61] G. Isac, V. Postolică, *The Best Approximation and Optimization in Locally Convex Spaces*, Peter Lang, Frankfurt am Main, Berlin, Bern, New York, Wien, 1993.

[62] M. Jauregui, C. Tsallis, *New representations of π and Dirac delta using the nonextensive-statistical-mechanics $q-$ exponential function*, J. Math. Phys. 51 (2010), 063304.

[63] A. Kamińska, K. Leśnik, Y. Raynaud, *Dual spaces to Orlicz-Lorentz spaces*, Stud. Math. 222 (2014), 229–261.

[64] A. Kamińska, B. Turett, *Rotundity in Köthe spaces of vector-valued functions*, Can. J. Math. 41 (1989), 659–675.

[65] J. Kawabe, *The bounded convergence in measure theorem for nonlinear integral functionals*, Fuzzy Sets and Systems 271 (2015), 31–42.

[66] A.A. Khan, C. Tammer, C. Zălinescu, *Set-valued Optimization: An Introduction with Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2015.

[67] M. Khandaqji, F. Awawdeh, *Uniform convexity of Köthe-Bochner function spaces*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis 24 (2008), 385–390.

[68] G. Köthe, *Neubergründung der Theorie der vollkommenen Räume*, Math. Nachr. 4 (1951), 70–80.

[69] G. Köthe, O. Toeplitz, *Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen*, Journal de Crelle 171 (1934), 193–226.

[70] B. Kripke, *Best Approximations with Respect to Nearby Norms*, Numer. Math. 6 (1964), 103–105.

[71] T. Kühn, *Entropy numbers in sequence spaces with an application to weighted function spaces*, J. Approx. Theory 153 (2008), 40–52.

[72] T. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, L. Skrzypczak, *Entropy Numbers of Embeddings of Weighted Besov Spaces*, Constr. Approx. 23 (2006), 61–77.

[73] T. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, L. Skrzypczak, *Entropy Numbers of Embeddings of Weighted Besov Spaces II*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 49 (2006), 331–359.

[74] T. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, L. Skrzypczak, *Entropy Numbers of Embeddings of Weighted Besov Spaces III*, Math. Z. 255 (2007), 1–15.

[75] A.B. Kuijlaars, K.T.-R. McLaughlin, W. Van Assche, M. Vanlessen, *The Riemann-Hilbert approach to strong asymptotics for orthogonal polynomials on* $[-1,1]$, Adv. Math. 188 (2004), 337–398.

[76] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, John Wiley & Sons, Inc. 1974.

[77] E.K. Lenzi, R.S. Mendes, L.R. da Silva, *Statistical mechanics based on Rényi entropy*, Physica A 280 (2000), 337–345.

[78] N. Leonenkoa, O. Seleznjev, *Statistical inference for the $\varepsilon-$ entropy and the quadratic Rényi entropy*, Journal of Multivariate Analysis 101 (2010), 1981–1994.

[79] F. Li, P. Li, D. Han, *Continuous framings for Banach spaces*, J. Funct. Anal. 271 (2016), 992–1021.

[80] P.-K. Lin, *Köthe-Bochner Function Spaces*, Springer Science+Business Media, LLC, 2004.

[81] P.-K. Lin, *Stability of some properties in Köthe-Bochner function spaces*, in: Function Spaces, the fifth conference, Pure and Applied Math. vol. 213, Marcel Dekker, Inc. (2000), pp. 347–357.

[82] P.-K. Lin, H. Sun, *Extremity in Köthe-Bochner function spaces*, J. Math. Anal. Appl. 218 (1998), 136–154.

[83] P.-K. Lin, W. Zhang, B. Zheng, *Corrigendum to "Stability of ball proximinality" [J. Approx. Theory 183 (2014), 72–81]*, J. Approx. Theory 205 (2016), 149–152.

[84] P.-K. Lin, W. Zhang, B. Zheng, *Stability of ball proximinality*, J. Approx. Theory 183 (2014), 72–81.

[85] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[86] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *On the complemented subspaces problem*, Israel J. Math. 9 (1971), 213–269.

[87] D.S. Lubinsky, *A new approach to universality limits involving orthogonal polynomials*, Ann. Math. 170 (2009), 915–939.

[88] J. Lukes, L. Pick, D. Pokorny, *On geometric properties of the spaces $L^{p(x)}$*, Rev. Mat. Complut. 24 (2011), 115–130.

[89] W.A.J. Luxemburg, *Banach Function Spaces. Thesis*, Delft Institute of Technology, Assen, Netherlands, 1955.

[90] W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen, *Notes on Banach function spaces*, Indag. Math. Note I (1963)-Note XVI (1965).

[91] A. Macedo-Filho, D.A. Moreirac, R. Silva, L.R. da Silva, *Maximum entropy principle for Kaniadakis statistics and networks*, Physics Letters A 377 (2013), 842–846.

[92] M. Maldonado, J. Prada, *Weighted shift operators on Köthe spaces*, Math. Nachr. 279 (2006), 188–197.

[93] A. Martínez-Finkelshtein, P. Nevai, A. Peña, *Discrete entropy of generalized Jacobi polynomials*, J. Math. Anal. Appl. 431 (2015), 99–110.

[94] A. Martínez-Finkelshtein, J.F. Sánchez-Lara, *Shannon entropy of symmetric Pollaczek polynomials*, J. Approx. Theory 145 (2007), 55–80.

[95] M. Mastylo, E.A. Sánchez Pérez, *Köthe dual of Banach lattices generated by vector measures*, Monatsh. Math. 173 (2014), 541–557.

[96] M. Mastylo, Y. Sawano, H. Tanaka, *Morrey-type space and its Köthe dual space*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2016) doi:10.1007/s40840-016-0382-7.

[97] J. Mendoza, *Proximinality in* $L^p(\mu, X)$, J. Approx. Theory 93 (1998), 331–343.

[98] J. Mendoza, T. Pakhrou, *Best simultaneous approximation in* $L^1(\mu, X)$, J. Approx. Theory 145 (2007), 212–220.

[99] V.V. Mykhaylyuk, M.M. Popov, *On sums of narrow operators on Köthe function spaces*, J. Math. Anal. Appl. 404 (2013), 554–561.

[100] A. Nekvinda, *Hardy-Littlewood maximal operator on* $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$, Mathematical Inequalities & Applications 7 (2004), 255–265.

[101] P. Nevai, *Géza Freud, orthogonal polynomials and Christoffel functions. A case study*, J. Approx. Theory 48 (1986), 3–167.

[102] E.T. Ordman, *Convergence almost everywhere is not topological*, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 182–183.

[103] K. Ourabah, A.H. Hamici-Bendimerad, M. Tribeche, *Quantum entanglement and Kaniadakis entropy*, Phys. Scr. 90 (2015), 045101.

[104] K. Ourabah, A.H. Hamici-Bendimerad, M. Tribeche, *Quantum Kaniadakis entropy under projective measurement*, Phys. Rev. E 92 (2015), 032114.

[105] K. Ourabah, M. Tribeche, *Reply to "Comment on «Quantum Kaniadakis entropy under projective measurement»"*, Phys. Rev. E 94 (2016), 026104.

[106] T. Pakhrou, *Best simultaneous approximation in $L^{\infty}(\mu, X)$*, Math. Nachr. 281 (2008), 396–401.

[107] N.S. Papageorgiou, *On best approximations in the Lebesgue-Bochner space $L^1(X)$*, Tamkang J. Math. 24 (1993), 303–307.

[108] N. Papanastassiou, C. Papachristodoulos, *$p-$ convergence in measure of a sequence of measurable functions and corresponding minimal elements of c_0*, Positivity 13 (2009), 243–253.

[109] N. Phuong-Các, *On Dieudonné's paper "Sur les espaces de Köthe"*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 62 (1966), 29–32.

[110] G. Polya, *Sur un algorithme toujours convergent pour obtenir les polynomes de meilleure approximation de Tchébychef pour une fonction continue quelconque*, C.R. 157 (1913), 840-843.

[111] P.G. Popescu, V. Preda, E.I. Sluşanki, *Bounds for Jeffreys-Tsallis and Jensen-Shannon-Tsallis divergences*, Physica A 413 (2014), 280–283.

[112] V. Preda, *The Student distribution and the principle of maximum entropy*, Ann. Inst. Stat. Math. 34 (1982), 335-338.

[113] V. Preda, C. Bălcău, *Entropy optimization with applications*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 2011.

[114] V. Preda, C. Bălcău, *On maxentropic reconstruction of countable Markov chains and matrix scaling problems*, Stud. Appl. Math. 111 (2003), 85-100.

[115] V. Preda, S. Dedu, C. Gheorghe, *New classes of Lorentz curves by maximizing Tsallis entropy under mean and Gini equality and inequality constraints*, Physica A 436 (2015), 925–932.

[116] V. Preda, S. Dedu, M. Sheraz, *New measure selection for Hunt-Devolder semi-Markov regime switching interest rate models*, Physica A 407 (2014), 350–359.

[117] V. Preda, S. Dedu, M. Sheraz, *Second order entropy approach for risk models involving truncation and censoring*, Proceedings of the Romanian Academy 17 (2016), 195–202.

[118] V. Preda, M. Sheraz, *Risk-neutral densities in entropy theory of stock options using Lambert function and a new approach*, Proceedings of the Romanian Academy 16 (2015), 20–27.

[119] J.C. Principe, *Information Theoretic Learning. Rényi's Entropy and Kernel Perspectives*, Springer Science+Business Media, LLC, 2010.

[120] N. Randrianantoanina, *Complemented copies of* l^1 *and Pelczynski's property* (V^*) *in Bochner function spaces*, Canad. J. Math. 48 (1996), 625–640.

[121] N. Randrianantoanina, E. Saab, *The complete continuity property in Bochner function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), 1109–1114.

[122] T.S.S.R.K. Rao, *Approximation properties for spaces of Bochner integrable functions*, J. Math. Anal. Appl. 423 (2015), 1540–1545.

[123] Y. Raynaud, *On duals of Calderon-Lozanovskij intermediate spaces*, Stud. Math. 124 (1997), 9–36.

[124] A. Rényi, *On measures of entropy and information*, in: Proc. 4th Berkeley Symp., Mathematical and Statistical Probability, Berkeley, CA: Univ. Calif. Press, Vol. 1 (1961), pp. 547–561.

[125] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton, New Jersey, 1970.

[126] C.A. Rogers, *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, 1970.

[127] G. Rubinštein, *On an Extremal Problem in a Normed Linear Space*, Siberian Math. J. 6 (1965), 711–714 (in Russian).

[128] F.B. Saidi, D. Hussein, R. Khalil, *Best simultaneous approximation in* $L^p(I, E)$, J. Approx. Theory 116 (2002), 369–379.

[129] E.A. Sánchez Pérez, *Asymptotic domination of operators on Köthe function spaces and convergence of sequences*, Math. Nachr. 279 (2006), 1709–1722.

[130] V. Schwämmle, C. Tsallis, *Two-parameter generalization of the logarithm and exponential functions and Boltzmann-Gibbs-Shannon entropy*, J. Math. Phys. 48 (2007), 113301.

[131] **R.-C. Sfetcu**, *Tsallis and Rényi divergences of generalized Jacobi polynomials*, Physica A 460 (2016), 131–138.

[132] T. Shintani, T. Ando, *Best Approximants in L^1- space*, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. 33 (1975/1976), 33–39.

[133] P. Silvestre, *Capacitary function spaces and applications. Thesis*, Barcelona, 2011.

[134] I. Singer, *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1970.

[135] G. Sinnamon, *Monotonicity in Banach function spaces*, Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Praha: Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, (2007), 205–240.

[136] M.A. Smith, *Product of Banach spaces that are uniformly rotund in every direction*, Pacific J. Math. 73 (1977), 215–219.

[137] H. Suyari, M. Tsukada, *Tsallis differential entropy and divergences derived from the generalized Shannon-Khinchin axioms*, in: Proceedings of the 2009 IEEE international conference on Symposium on Information Theory (ISIT), ser. ISIT'09, vol. 1. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 2009, pp. 149–153.

[138] M. Talagrand, *Weak Cauchy sequences in $L^1(E)$*, Amer. J. Math. 106 (1984), 703–724.

[139] D. Tomescu, *Construction of a function seminorm having the Riesz-Fischer property*, Bull. Math. Soc. Sci. R.S.R. 24 (72) (1980), 209–213.

[140] H. Triebel, *Entropy numbers in function spaces with mixed integrability*, Rev. Mat. Complut. (2011), 169–188.

[141] B. Trivellato, *The minimal k-entropy martingale measure*, Int. J. Theor. Appl. Finance 15 (2012), 1250038.

[142] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*, Springer Science+Business Media, LLC, 2009.

[143] C. Tsallis, *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*, J. Stat. Phys. 52 (1988), 479–487.

[144] G. Wilk, Z. Wlodarczyk, *Example of a possible interpretation of Tsallis entropy*, Physica A 387 (2008), 4809–4813.

[145] X. Wu, *Maximal distributional chaos of weighted shift operators on Köthe sequence spaces*, Czech. Math. J. 64 (2014), 105–114.

[146] X. Wu, P. Zhu, *Li-Yorke chaos of backward shift operators on Köthe sequence spaces*, Topology and its Applications 160 (2013), 924–929.

[147] Lin Yu, *Dual spaces of weak Orlicz-Hardy spaces for vector-valued martingales*, J. Math. Anal. Appl. 437 (2016), 71–89.

[148] A.C. Zaanen, *Integration*, North Holland Publishing Co. Amsterdam, 1967.

[149] C. Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2002.