Universitatea Bucureşti

Facultatea de Matematică şi Informatică

Rezumatul tezei de doctorat

Geometrie Conformă pe Varietăţi Hermitiene şi Simplectice

Doctorand:
Alexandra-Iulia Otiman

Coordonator ştiinţific:
Prof. dr. Liviu Ornea

Bucureşti, 2017

Prezentarea tezei şi a rezultatelor originale

Scopul acestei teze este studiul varietăţilor ce admit structuri local confom Kähler (LCK)/ local conform simplectice (LCS), iar rezultatele prezentate sunt incluse în articolele [Ot1], [Ot2] and [AOT].

O structură LCK pe o varietate complexă (M,J) este o metrică Hermitiană g, a cărei doi-formă fundamentală ω satisface relaţia:

$$d\omega = \theta \wedge \omega \tag{1}$$

unde θ este o unu-formă închisă, numită forma Lee a metricii.

Versiune non-metrică a acestei definiţii este aceea în care considerăm o doi-formă nedegenerată, ω, care satisface (1). O astfel de structură se numeşte local conform simplectică (LCS). Ecuaţia (1), pe care o vom numi deseori *ecuaţia LCS* se rescrie mai elegant ca $d_\theta \omega = 0$, unde $d_\theta := d - \theta \wedge \cdot$.

Operatorul d_θ defineşte o coomologie, ca urmare a faptului că θ este o unu-formă închisă. Această coomologie se poate considera pe orice varietate, faţă de orice unu-formă θ. De interes pentru noi va fi coomologia definită de acest operator, când varietatea este LCS/LCK, iar θ este forma Lee a metricii sau a structurii LCS.

Teza are două subiecte principale. Primul vizează generalizarea unor construcţii cunoscute din geometria simplectică şi Kähler la cadrul mai general al geometriei LCK/LCS, în vederea găsirii unor noi exemple de varietăţi cu astfel de structuri conforme. Al doilea se referă la studiul coomologiei Morse-Novikov (numită şi twistată), care este prin definiţie coomologia faţă de operatorul d_θ, definit mai sus. Totodată, această coomolgie, interesantă *per se*, poate să furnizeze informaţii despre natura metricilor LCK sau a structurilor LCS de pe o varietate. Ne vom axa pe suprafeţele complexe înzestrate cu metrici LCK şi pe varietăţile Oeljeklaus-Toma. Primul capitol reprezintă o trecere în revistă a proprietăţilor cunoscute în literatura de specialitate ale varietăţilor LCS/LCK. Discutăm definiţiile echivalente, exemple, clase speciale de varietăţi LCK, precum Vaisman şi varietăţi LCK cu potenţial, paralela LCK vs. LCS. Rezultatele prezentate în acest capitol vor fi folosite ulterior şi sunt singurele necesare pentru a le urmări pe cele originale, din capitolele următoare.

Capitolul 2. Fibrate local conform simplectice. Rezultate principale

În al doilea capitol definim *fibratele local conform simplectice*, un analog al *fibratelor simplectice*, introduse de Guillemin, Sternberg, Weinstein *et al.* ([GLSW], [St], [We]). O expunere foarte amplă despre fibrate simplectice se poate găsi în [MS]. Un fibrat simplectic este o fibrare local trivială, cu fibra varietate simplectică şi cu funcţii de tranziţie ce acţionează ca simplectomorfisme faţă de forma simplectică de pe fibre. Motivaţia studiului acestor obiecte este problema găsirii unei forme simplectice pe spaţiul total al unei asemenea fibrări, generând astfel noi exemple. Generalizarea acestei probleme la cadrul LCS justifică studiul fibratelor care au fibra LCS şi funcţii de tranziţie care invariază forma LCS a fibrei. Vom numi un astfel de obiect *fibrat LCS*.

O construcţie cunoscută a lui Sternberg, numită *forma de cuplaj* (coupling form), oferă condiţii suficiente ca spaţiul total al unei fibrări simplectice să fie simplectic, folosind acţiuni Hamiltoniene ale grupurilor Lie. Ideea construcţiei este de a combina forma simplectică a unei varietăţi pe care avem o acţiune Hamiltoniană a unui grup G cu un fibrat principal de fibră G care esenţialmente este opusul unui fibrat plat, în sensul că admite o conexiune cu o formă de curbură nedegenerată (ceea ce vom numi conexiune grasă, dupa Weinstein). Mai multe detalii despre conexiuni grase se pot găsi în [We].

Rezultatul lui Sternberg şi Weinstein este următorul:

Teorema 0.1: ([St, We]) Fie (F,ω) o varietate simplectică cu o acţiune Hamiltoniană a unui grup G pe F. Dacă $\mu : F \to g^*$ este aplicaţia moment, atunci orice conexiune pe un G-fibrat principal P care este grasă în toate punctele din $\mu(F)$ induce o formă simplectică pe $P \times_G F$.

Extensia la cadrul LCS necesită şi o adaptare a noţiunii de acţiune Hamiltoniană. Acţiunile Hamiltoniene şi procedeul corespunzător de reducere a fost studiat de I. Vaisman, S. Haller, T. Rybicki, R. Gini, L. Ornea, M. Parton, mai recent şi de F. Madani, A. Moroianu şi M. Pilca. Folosim aceste rezultate pentru a demonstra teorema principală a Capitolului 2:

Teorema 0.2: ([Ot1]) Fie (F,ω,θ) o varietate local conform simplectică care nu este global conform simplectică şi fie G un grup Lie care acţionează pe F prin difeomorfisme care invariază pe ω (deci şi pe θ). Dacă acţiunea lui G este twistată Hamiltoniană şi dacă $\mu : F \to g^*$ este aplicaţia moment a acţiunii, atunci orice conexiune pe un G-fibrat principal P care este grasă în toate punctele din $\mu(F)$ induce o formă LCS pe $P \times_G F$.

Studiem câteva exemple de acţiuni twistate Hamiltoniene, precum şi compatibilitatea dintre reducerea spaţiului total şi a fibrei. Demonstrăm următoarele rezultate:

Teorema 0.3: ([Ot1]) Fie $\pi : \overline{M} \to M$ acoperirea minimală a unei varietăţi LCS (M, ω, θ) şi fie Ω forma simplectică de pe $\overline{M}$. Fie G un grup Lie care acţionează pe M invariind ω. Atunci G acţionează twistat Hamiltonian pe M dacă şi numai dacă $\tilde{G}_0$ acţionează Hamiltonian pe $\overline{M}$, unde $\tilde{G}_0$ este componenta conexă a identităţii a acoperirii universale a lui G.

Teorema 0.4: ([Ot1]) Fie G un grup Lie abelian care acţionează twistat Hamiltonian pe varietatea LCS (F, ω, θ) şi P un fibrat principal de fibră G, cu o conexiune grasă în Im μ. Atunci G acţionează twistat Hamiltonian faţă de forma de cuplaj Ω şi presupunând că toate condiţiile pentru a efectua reducerea sunt îndeplinite, relaţia dintre cele două reduceri este:

$$\tilde{\mu}^{-1}(0)/G \simeq P/G \times \mu^{-1}(0)/G.$$

Capitolul 3. Coomologia Morse-Novikov. Rezultate principale

Capitolele 3 şi 4 se ocupă cu studiul coomologiei twistate pe varietăţi LCK/LCS, dar în capitolul al treilea, accentul cade pe suprafeţele complexe LCK, iar în al patrulea capitol, ne concentrăm pe solvvarietăţi LCK, mai ales pe varietăţi Oeljeklaus-Toma. În afara faptului că varietăţile LCK/LCS reprezintă un mediu propice pentru studiul coomologiei twistate, ea poate conduce la rezultate privind natura metricilor LCK.

Punctul de plecare pentru rezultatele din Capitolul 3 l-a constituit articolul [AD], unde autorii caracterizează formele Lee posibile pentru structurile LCK, şi mai general, pentru structurile LCK care *îmblânzesc* structura complexă, pentru următoarele suprafeţe complexe: suprafeţele Inoue $\mathcal{S}^{\pm}$, Kato şi Hopf. În [AD], sunt considerate următoarele două submulţimi ale lui H^1_{dR}:

$$\mathcal{C}(X) = \{[\theta] \in H^1_{dR}(M) \mid \text{există } \ \omega \in \Omega^{1,1}(X), \omega > 0, d_\theta \omega = 0\}$$

$$\mathcal{T}(X) = \{[\theta] \in H^1_{dR}(M) \mid \text{există } \omega \in \Omega^2(X), \omega^{1,1} > 0, d_\theta \omega = 0\}$$

Rezultatul din [AD] care este motivant pentru studiul coomologiei twistate este:

Teorema 0.5: [AD] Fie S o suprafaţă complexă cu model minimal S_0 (i.e. S_0 nu este blow-up-ul unei alte suprafeţe complexe). Atunci:

- Dacă S_0 este o suprafaţă Hopf, atunci $\mathscr{C}(S_0) = \mathscr{T}(S_0) = (-\infty, 0)$.
- Dacă S este Inoue de tip $\mathscr{S}^+_{N,p,q,r,z}$ cu $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, atunci $\mathscr{C}(S) = \emptyset$ şi $\mathscr{T}(S) = \{a_0\}$.
- Dacă S este Inoue de tip $\mathscr{S}^+_{N,p,q,r,z}$ cu $z \in \mathbb{R}$, atunci $\mathscr{C}(S_0) = \mathscr{T}(S_0) = \{a_0\}$.

Aici $H^1_{dR}(S) \simeq \mathbb{R}$ se identifică cu dreapta orientată $(-\infty, \infty)$ şi $a_0 \in H^1_{dR}(S)$ este clasa al cărei fibrat olomorf asociat este fibratul anti-canonic $\mathscr{K}^*_S$.

Reultatul principal din Chapter 3 este :

Teorema 0.6: ([Ot2]) Fie $\mathscr{S}$ o suprafaţă Inoue. Atunci:

- Dacă $\mathscr{S} = \mathscr{S}^0$, atunci $H^i_\theta(\mathscr{S}) = 0$, pentru $i = 0, 1, 4$, $H^2_\theta(\mathscr{S}) \simeq H^3_\theta(\mathscr{S}) \simeq \mathbb{R}$. Din dualitate Poincaré, $H^i_{-\theta}(\mathscr{S}) = 0$, pentru $i = 0, 3, 4$, $H^1_{-\theta}(\mathscr{S}) \simeq H^2_{-\theta}(\mathscr{S}) \simeq \mathbb{R}$ şi $H^i_{t\theta}(\mathscr{S}) = 0$, pentru toţi $i \geqslant 0$ şi $t \neq \pm 1$.
- Dacă $\mathscr{S} = \mathscr{S}^+_{A,p,q,r,z}$ cu $z \in \mathbb{R}$, atunci $H^i_\theta(\mathscr{S}) = 0$, pentru $i = 0, 4$, $H^1_\theta(\mathscr{S}) \simeq H^3_\theta(\mathscr{S}) \simeq \mathbb{R}$, $H^2_\theta(\mathscr{S}) \simeq \mathbb{R}^2$. Din dualitate Poincaré, $H^i_{-\theta}(\mathscr{S}) \simeq H^i_\theta(\mathscr{S})$ şi $H^i_{t\theta}(\mathscr{S}) = 0$, pentru toţi $i \geqslant 0$ şi $t \neq \pm 1$.
- Dacă $\mathscr{S} = \mathscr{S}^+_{A,p,q,r,z}$ cu $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, atunci, pentru că $\mathscr{S}$ este difeomorfă cu $\mathscr{S}^+_{A,p,q,r,z}$, pentru un $z \in \mathbb{R}$, notăm cu θ_1 imaginea lui θ via acest difeomorfism. Acelaşi rezultat ca mai sus se păstrează pentru $\mathscr{S}$ cuθ_1 în loc de θ.
- Dacă $\mathscr{S} = \mathscr{S}^-$, $H^i_\theta(\mathscr{S}) = 0$, pentru $i = 0, 1, 4$, $H^2_\theta(\mathscr{S}) \simeq H^3_\theta(\mathscr{S}) \simeq \mathbb{R}$. Din dualitate Poincaré, $H^i_{-\theta}(\mathscr{S}) = 0$, pentru $i = 0, 3, 4$, $H^1_{-\theta}(\mathscr{S}) \simeq H^2_{-\theta}(\mathscr{S}) \simeq \mathbb{R}$ şi $H^i_{t\theta}(\mathscr{S}) = 0$, pentru toţi $i \geqslant 0$ şi $t \neq \pm 1$,

unde θ este în fiecare caz forma Lee a metricii LCK pusă de Tricerri în [Tr].

Observăm în primul rând distincţia pe care o face coomologia twistată între $\mathscr{S}^+$ şi $\mathscr{S}^-$, deşi coomologia de Rham nu distinge intre cele două.

Am completat în acest fel lista lui Apostolov şi Dloussky cu suprafaţa Inoue $\mathscr{S}^0$ şi obţinem:

Corolarul 0.7: ([Ot2]) $\mathscr{C}(\mathscr{S}^0) = \mathscr{T}(\mathscr{S}^0) = \{[\theta]\}$.

Putem caracteriza în continuare metricile LCK pe $\mathscr{S}^0$:

Corolarul 0.8: ([Ot2]) Forma fundamentală Ω a unei metrici LCK pe $\mathscr{S}^0$ este de forma $\omega + d_\theta \eta$ cu η o unu-formă închisă.

în corolariile de mai sus, (ω, θ) este metrica LCK găsită de Tricerri pe $\mathscr{S}^0$ în [Tr].

Drept consecinţă a acestor rezultate, obţinem că fibratul complex olomorf asociat lui θ este fibratul anticanonic $\mathscr{K}_S^*$ şi că varietăţile Oeljeklaus-Toma (OT) nu admit metrici LCK care sunt d_θ-exact. Instrumentul principal folosit pentru a calcula coomologia Morse-Novikov a lui $\mathscr{S}^0$ şi $\mathscr{S}^\pm$ este o versiune twistată a şirului Mayer Vietoris, descrisă în [HR1]. Însă, prezentăm şi o metodă alternativă ce foloseşte şiruri spectrale, oferind şi o altă demonstraţie a unui rezultat al lui Pajitnov din [P], care afirmă:

Teorema 0.9: ([P]) Fie θ o unu-formă întreagă închisă pe o varietate compactă M. Atunci $H^i_{\alpha\theta}(M) = 0$, pentru orice α astfel încât e^α este transcendent.

Capitolul 4. Solvvarietăţi LCK şi LCS. Rezultate principale

În Capitolul 4, ne punem problema găsirii unor condiţii suficiente pentru a calcula coomologia twistată doar la nivelul algebrei Lie. O solvvarietate este un cât al unui grup rezolubil G la o subgrup discret cocompact Γ, $\Gamma\backslash G$.

Interesul pentru aceste varietăţi provine din faptul că suprafeţele Inoue, dar şi varietăţile OT au şi o structură de solvvarietate (a se vedea [Be], [H], [Kas]). O solvvarietate M poate avea diverse proprietăţi care să determine un izomorfism $H^i_{dR}(M) \simeq H^i_{dR}(\mathfrak{g})$. Acesta este cazul varietăţilor complet rezolubile, iar Hattori arată în [Hat] cum se obţine acest izomorfism. În [Mi], rezultatul lui Hattori este extins la coomologia twistată, atâta timp cât forma faţă de care se consideră coomologia este invariantă la acţiunea grupului G. Un alt context pentru care există izomorfismul $H^i_{dR}(M) \simeq H^i_{dR}(\mathfrak{g})$ este tratat de Mostow în [Mos] şi este mai general, incluzând ş cazul complet rezolubil. Se referă la aşa numita *condiţie Mostow*. Înseamnă următorul lucru:

Definiţia 0.10: O solvvarietate $\Gamma\backslash G$ satisface condiţia Mostov dacă $\mathrm{Ad}(\Gamma)$ şi $\mathrm{Ad}(G)$ au aceeaşi închidere Zariski în $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ (înţelegem aici prin $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ grupul izomorfismelor lineare ale lui $\mathfrak{g}$, care nu sunt neapărat şi morfisme de algebre Lie).

Capitolul 4 începe cu demonstraţia următorului rezultat:

Propoziţia 0.11: ([AOT]) Dacă o solvvarietate $\Gamma\backslash G$ satisface condiţia Mostow, avem $H^i_\theta(M) \simeq H^i_\theta(\mathfrak{g})$, pentru orice unu-formă închisă θ G-invariantă.

Demonstrăm apoi că suprafaţa Inoue $\mathscr{S}^0$ satisface condiţia Mostow, iar calculul coomologiei twistate la nivelul algebrei Lie confirmă rezultatele obţinute în Capitolul 3 fie prin şirul Mayer-Vietoris twistat sau prin şirurui spectrale.

Aşadar, e justificată întrebarea dacă şi varietăţile OT satisfac condiţia Mostow, pentru a calcula în acelaşi mod coomologia twistată (şi implicit şi pe cea de Rham).

Interesante pentru geometria conformă sunt varietăţile OT de parametri $(s, 1)$, despre care s-a demonstrat în [OT] că sunt LCK. Demonstrăm în capitolul 4 că dacă este îndeplinită o anume condiţie tehnică, aceste varietăţi satisfac condiţia Mostow.

Teorema 0.12: ([AOT]) Fie $X(K, U)$ o varietate Oeljeklaus-Toma de tip $(s, 1)$. Dacă nu există nicio extindere intemediară total reală $\mathbb{Q} \subset T \subset K$, atunci $X(K, U)$ satisface condiţia Mostow.

Studiem un exemplu explicit de varietate OT de tip (2,1) care îndeplineşte condiţia tehnică din teorema de mai sus şi îi calculăm coomologia twistată. Încheiem prin a arăta că în orice dimensiune, găsim o varietate OT care satisface condiţia Mostow. Mai precis:

Propoziţia 0.13: Pentru orice $s \geqslant 1$, există o varietate Oeljeklaus-Toma $(s, 1)$ care satisface condiţia Mostow.

Bibliography

[AOT] D. Angella, **A. Otiman**, N. Tardini, *Cohomologies of locally conformally symplectic manifolds and solvmanifolds*, arXiv:1703.05512, acceptat spre publicare în Annals of Global Analysis and Geometry.

[AD] V. Apostolov, G. Dloussky, *Locally Conformally Symplectic Structures on Compact Non-Kähler Complex Surfaces*, Int. Math. Res. Not., **9** (2016), 2717-2747.

[BK1] G. Bande, D. Kotschick, *Moser Stability for locally conformally symplectic structures*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 2419-2424.

[BK2] G. Bande, D. Kotschick, *Contact pairs and locally conformally symplectic structures*, Contemp. Math **542** (2011), 85–95.

[Ba] A. Banyaga, *On the geometry of locally conformal symplectic manifolds*, Infinite Dimensional Lie Groups in Geometry and Representation Theory, 79–91, World Scientific Publishing, 2002.

[BM] G. Bazzoni, J.C. Marrero, *Locally conformal symplectic nilmanifolds with no locally conformal Kähler metrics*, arxiv: 1407.5510.

[Be] F.A. Belgun, *On the metric structure of non-Kähler complex surfaces*, Math. Ann. **317** (2000), 1–40.

[Bog] F. A. Bogomolov, *Classification of surfaces of class* VII_0 *with* $b_2 = 0$, Math. USSR-Izv., **10** (1976), 255–269.

[Bor] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, **126**, Springer-Verlag, New York, 1991.

[Br] M. Brunella, *Locally conformally Kählermetrics on Kato surfaces*, Nagoya Math. J. **202** (2011), 77-81.

[Di] A. Dimca, *Sheaves in Topology*, Springer Verlag, 2004.

[Du] A. Dubickas, *Nonreciprocal units in a number field with an application to OT manifolds*, New York J. Math. **20** (2014), 257–274.

[DO] S. Dragomir, L. Ornea, *Locally conformal Kähler geometry*, Birkhäuser, 1998.

[EM] Y. Eliashberg, E. Murphy, *Making cobordism symplectic*, arXiv:1504.06312, v2.

[F] M. Farber, *Topology of closed one-forms*, Amer. Math. Soc. vol 108, 2004.

[FGG] M. Fernàndez, M. Gotay, A. Gray, *Compact parallelizable four dimensional symplectic and complex manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 1209-1212.

[FP1] A. Fujiki, M. Pontecorvo, *Anti-self-dual bihermitian structures on Inoue surfaces*, J. Differential Geom. **85** (2010), no. 1, 15–71.

[FP2] A. Fujiki, M. Pontecorvo, *Bi-Hermitian metrics on Kato surfaces*, preprint arXiv:1607.00192.

[GO] P. Gauduchon, L. Ornea, *Locally conformally Kähler metrics on Hopf surface*, Ann. lnst. Fourier **48** (4) (1998), 1107-1127.

[GLSW] M. Gotay, R. Lashof, J. Sniatycki, A. Weinstein, *Closed forms on symplectic bundles*, Comment. Math. Helvetici **58** (1983), 617-621.

[GOP] R. Gini, L. Ornea, M. Parton , *Locally conformally Kähler reduction*, J. Reine Angew. Math. **581** (2005) 1-21.

[GOPP] R. Gini, L. Ornea, M. Parton, P. Piccinni, *Reduction of Vaisman structures in complex and quaternionic geometry*, J. Geom. Phys. **56**(2006), 2501-2522.

[Gor] V. V. Gorbatsevich, Symplectic structures and cohomology on some solvmanifolds, *Siberian Math. J.* **44** (2003), no. 2, 260–274, translated from *Sibirsk. Mat. Zh.* **44** (2003), no. 2, 322–342.

[Got] R. Goto, *On the stability of locally conformal Kähler structures*, J. Math. Soc. Japan **66** (2014), no. 4, 1375–1401.

[GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.

[GL] F. Guedira, A. Lichnerowicz, *Géométrie des algèbres de Lie locales de Kirillov*, J. Math. Pures et Appl. **63** (1984), 407–484.

[GLS] V. Guillemin, E. Lerman, S. Sternberg, *Symplectic fibrations and multiplicity diagrams*, Cambridge University Press, 1996.

[HR1] S. Haller and T. Rybicki, *On the group of diffeomorphisms preserving a locally conformal symplectic form*, Ann. Global Anal. and Geom. **17** (1999) 475–502.

[HR2] S. Haller, T. Rybicki, *Integrability of the Poisson algebra on a locally conformal symplectic manifold* Rend. Circ. Mat. Palermo Suppl. **63** (2000), 89-96.

[HR3] S. Haller, T. Rybicki, *Reduction for locally conformal symplectic manifolds*, J. Geom. Phys. **37** (2001), 262-271.

[H] K. Hasegawa, *Complex and Kähler structures on compact solvmanifolds*, J. Symplectic Geom. **3**(2005), no. 4, 749–767.

[Hat] A. Hattori, *Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles*, J.Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1, **8** (1960), 289-331.

[I] M. Inoue, *On surfaces of class* VII_0, Invent. Math. **24** (1974), 269-310.

[Kam] Y. Kamishima, *Note on locally conformal Kähler surfaces*, Geom. Dedicata, **84** (2001), 115–124.

[KO] Y. Kamishima, L. Ornea, *Geometric flow on compact locally conformally Kähler manifolds* Tohoku Math. J. **57** (2) (2005), 201-221.

[Kas] H. Kasuya, *Vaisman metrics on solvmanifolds and Oeljeklaus-Toma manifolds*, Bull. London Math. Soc. **45**(2013), no. 1, 15–26.

[Kat] M. Kato, *Compact complex manifolds containing "global" spherical shells. I*, Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), pp. 45–84, Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978.

[K] K. Kodaira, *On the structure of compact complex analytic spaces*, Amer. J. Math. : I, **86** (1964), 751–798; II, **88** (1966), 682–721; III, **90** (1969), 55–83; IV, **90** (1969), 1048–1066.

[Lee] H.C.Lee, *A kind of even-dimensional differential geometry and its application to exterior calculus*, Amer. J. of Math. **65** (1943), 433-438.

[Lef] J. Lefebvre, *Propriétés du groupe des transformations conformes et du groupe des automorphismes d'une variété localement conformément symplectique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B **268** (1969) A717–A719.

[Ler] E. Lerman, *Contact fiber bundles*, J. Geom. Phys. **49** (1) (2004), 52-66.

[LLMP] M. de León, B, López, J.C. Marrero, E. Padrón, *On the computation of the Lichnerowicz-Jacobi cohomology*, J. Geom. Phys. **44** (2003), 507-522.

[Li] P. Libermann, *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales régulières*, Ann. Mat. Pura. Appl., **36** (1954), 27–120.

[Ma] H. Matsunaga, *Smooth circle group actions on complex surfaces*, Mem. Fac. Sci., Shimane Univ., **14** (1980), 47-54.

[Mi] D.V. Millionshchikov, *Cohomology of solvable Lie algebras, and solvmanifolds* (Russian) Mat. Zametki **77** (2005), no. 1, 67–79; translation in Math. Notes **77** (2005), no. 1-2, 61–71.

[MO] J. Montaldi, J. Ortega, *Symplectic group actions and covering spaces*, Diff. Geom. Appl. **27** (2009), 589-604.

[Mos] G. D. Mostow, *Cohomology of topological groups and solvmanifolds*, *Ann. of Math. (2)* **73** (1961), no. 1, 20–48.

[MS] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[N1] I. Nakamura, *Classification of non-Kähler complex surfaces* (Japanese) Translated in Sugaku Expositions **2** (1989) 209–229. Sugaku **36** (1984), no. 2, 110–124.

[N2] I. Nakamura, *On surfaces of class VII_0 with curves II*, Tohoku J. Math. **42**(1990), 475–516.

[Ne] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer Verlag, 1999.

[No1] S. P. Novikov, *Multi-valued functions and functionals. An analogue of Morse theory*, Soviet Math. Doklady, **24**(1981), 222–226.

[No2] S. P. Novikov, *The Hamiltonian formalism and a multi-valued analogue of Morse theory*, Russian Math. Surveys, **37**(1982), 1–56.

[OPV] L. Ornea, M. Parton, V. Vuletescu, *Holomorphic submersions of locally conformally Kähler manifolds* Ann. Mat. Pura Appl. **193**(5) (2014), 1345-1351.

[OT] K. Oeljeklaus, M. Toma, *Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble,**55** (2005), no. 1, 161–171.

[OV1] L. Ornea, M. Verbitsky, *Structure theorem for compact Vaisman manifolds*, Math. Res. Lett, **10**(2003), 799–805.

[OV2] L. Ornea, M. Verbitsky, *Locally conformally Kähler manifolds with potential*, Math. Annalen **348** (2010), 25–33.

[OV3] L. Ornea, M. Verbitsky, *A report on locally conformally Kähler manifolds*, in "Harmonic Maps and Differential Geometry" Contemp. Math. **542**, 135-150, 2011.

[OV4] L. Ornea, M. Verbitsky, *Automorphisms of locally conformally Kähler manifolds* Math. Res. Lett. **18**(4) (2011), 747-754.

[OV5] L. Ornea, M. Verbitsky, *LCK rank of locally conformally Kähler manifolds with potential*, J. Geom. Phys., **107** (2016), 92–98.

[OV6] L. Ornea, M. Verbitsky, *Hopf surfaces in locally conformally Kähler manifolds with potential*, arXiv:1601.07421.

[OV7] L. Ornea, M. Verbitsky, *Locally conformally Kähler geometry*, in preparation.

[OVV] L. Ornea, M. Verbitsky, V. Vuletescu, *Weighted Bott-Chern and Dolbeault cohomology for LCK manifolds with potential*, preprint arXiv:1504.01501, v2. To appear in J. Math. Soc. Japan.

[Ot1] **A. Otiman**, *Locally conformally symplectic bundles*, arXiv:1510.02770, acceptat spre publicare în J. Symplectic Geometry.

[Ot2] **A. Otiman**, *Morse-Novikov cohomology of locally conformally Kähler surfaces*, arXiv:1609.07675.

[P] A. V. Pazhitnov, *An analytic proof of the real part of Novikov's inequalities*, Soviet Mat. Dokl. **35**(1987), 456–457.

[PV] M. Parton, V. Vuletescu, *Examples of non-trivial rank in locally conformal geometry*, Math. Z. **270**, No. 1-2 (2012), 179–187.

[Ra] M. S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band **68**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

[Ro] S. Roman, *Field Theory*, Springer-Verlag, 2006.

[S+09] *Sage Mathematics Software (Version 6.10)*, The Sage Developers, 2015, `http://www.sagemath.org`.

[Sa] H. Sawai, *Locally conformal Kähler structures on compact solvmanifolds*, Osaka J. Math. **49** (2012), 1087-1102.

[St] S. Sternberg, *Minimal coupling and the symplectic mechanics of a classical particle in the Yang-Mills field*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **74** (12)(1977), 5253-5254.

[Ti] D. Tischler, *On fibering certain foliated manifolds over S^1*, Topology, **9** (1970), 153–154.

[Tr] F. Tricerri, *Some examples of locally conformal Kähler manifolds*, Rend. Dem. Mat. Univers. Politecn. Torino **40** (1) (1982), 81-92.

[Va1] I. Vaisman, *On locally conformal almost Kähler manifolds*, Israel J. Math. **24** (1976), no. 3–4, 338–351.

[Va2] I. Vaisman, *Remarkable operators and commutation formulas on locally conformally Kähler manifolds*, Compos. Math., **40** (1980), no. 3, 277–289.

[Va3] I. Vaisman, *On locally and globally conformal Kählermanifolds*, Trans. AMS **262** (1980), 533–542.

[Va4] I Vaisman, *Generalized Hopf manifolds*, Geom. Dedicata bf 13(1982), no. 3, 231–255.

[Va5] I. Vaisman, *Locally conformal symplectic manifolds*, Int. J. Math. Math. Sci. **8** (3) (1985), 521–536.

[Va6] I. Vaisman, *Coupling Poisson and Jacobi structures on foliated manifolds*, Intern. J. of Geom. Methods in Physics **1** (2004), 607-637.

[Vo] Y. Vorobjev, *Coupling tensors and Poisson geometry near a single symplectic leaf*, Lie algebroids and Related Topics in Diff. Geom. Vol. 54, Banach Center Publ., 2001, 249-274.

[Vu1] V. Vuletescu, *Blowing-up points on locally conformally Kähler manifolds*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **52**(100) (2009), 387–390.

[Vu2] V. Vuletescu, *LCK metrics on OT manifolds versus Kronecker's theorem*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **57** (2014), 225–231.

[YZ] X. Yang, G. Zhao, *A note on the Morse-Novikov cohomology of blow-ups of locally conformal Kähler manifolds*, Bull. Aust. Math. Soc. **91** (2015) 155–166.

[Wa] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, GTM vol. 94, Springer Verlag, 1983.

[We] A. Weinstein, *Fat bundles and symplectic manifolds*, Adv. Math. **37** (1980), 239-250.

[Wei] S. Weintraub, *Galois theory*, Springer Verlag, 2006.