UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
ŞCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ

Modele stocastice în actuariat. Contribuţii teoretice şi aplicaţii

Rezumat

Coordonator ştiinţific:
Prof. Dr. Preda Vasile

Student doctorand:
Robe-Voinea
Elena-Graţiela

BUCUREŞTI
2016

Cuprins

Capitolul 1

Introducere

Principalul obiectiv al cercetării propus în cadrul programului şcolii doctorale a constat în studierea unor extensii ale unor modele stocastice referitoare la daunele agregate şi totodată implementarea acestora prin intermediul mai multor aplicaţii practice.
Aceste modele au fost extinse de la cazul unidimensioal la cazul multidimensional, cu includerea totodată a unor dependenţe cu scopul de a veni în ajutorul actuarilor pentru a realiza o analiza cât mai realistă în ceea ce priveşte scenariile de asigurări.
În opinia mea, studiul acestor modele reprezintă un punct de plecare pentru teoria repartiţiilor daunelor cumulate (agregate) şi deschide totodată o varietate de direcţii de cercetare pe care alţi viitori tineri cercetători le-ar putea urma.
Obiectivele operaţionale ale cercetării mele au fost:

- Extinderea către cazul multidimensional a modelului colectiv bidimensional introdus de Jin and Ren [14], pentru studierea daunelor compuse în situaţia în care mai multe tipuri de daune afectează simultan un portofoliu de asigurări. Varianta simplă pentru modelul colectiv multidimensional a fost studiată de Sundt [29].

- Descrierea câtorva tehnici folosite pentru a determina repartiţia compusă precum: metoda convoluţiilor, simulare, calcule bazate pe repartiţii aproximate şi metode de inversiune, care includ de asemenea metoda Tranformatei Fourier Rapide, (TFE), şi în plus studierea modului în care aceste metode interacţionează cu noile modele colective create cu scopul obţinerii repartiţiei compuse a daunelor unui portofoliu de asigurări pentru o perioadă de timp dată. Pentru mai multe detalii despre aceste metode a se vedea Klugmann [17], în timp ce pentru metoda TFR vezi Bühlmann [3], Grubel şi Hermesmeier [8] şi Embrechts [7].

- O comparaţie între aceste tehnici menţionate anterior cu scopul de a găsi calea optimă.

- Ne-am îndreptat de asemenea atenţia asupra aşa numitelor metode alternative cu scopul simplificării calculelor şi totodată a reducerii timpului de calcul, unde am detaliat aspecte precum: o varietate de erori pe care aceste metode le implică dar şi o comparaţie între simulare şi metodele recursive. Pentru mai multe detalii asupra acestor tipuri de erori a se vedea Klugman [17], Grubel şi Hermesmeier [8], [9], precum şi Sundt şi Vernic [33].

- Un studiu de caz folosind metoda Monte Carlo cu scopul de a demonstra utilitatea şi aplicabilitatea acestei metode în domeniul ingineriei, mai precis în industria construcţiilor de nave. A se vedea mai multe detalii în Dorp şi Duffey [6] şi Kolic Calic [18], şi pentru detalii mult mai generice Storch şi Lin, [27], şi Winston [37], Dlugokecki et al. [5].

Rezultatele originale din această teză au fost acceptate şi publicate in 4 jurnale internaţionale cotate ISI şi anume:

1. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, Raluca Vernic, On a multivariate aggregate claims model with multivariate Poisson counting distribution, *Proceedings of the Romanian Academy, Series A*, ISSN: 1454-9069, (cotat CNCSIS **A**, ID =789, and ISI indexed), **2015-IF=1.658**, acceptat

2. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, Raluca Vernic, Another appproach to the evaluation of a certain multivariate compound distribution *Analele Universitatii "Ovidius" Constanta, seria Matematica*, ISSN 1224-1784, E-ISSN 1844-0835. (cotat CNCSIS **A**, ID =31, ISI indexed), **2015-IF= 0.383**, acceptat.

3. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, Raluca Vernic, Fast Fourier Transform for multivariate aggregate claims, *Computational and Applied Mathematics, Springer International Publishing*, 2016, DOI 10.1007/s40314-016-0336-6, Print ISSN 0101-8205, Online ISSN 1807-0302. (ISI indexed), **2016-IF=0.802**.

4. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, Raluca Vernic, On the recursive evaluation of a certain multivariate compound distribution, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, Springer International Publishing*, 2016,. (ISI indexed), **2016-IF=0.250**, acceptat.

In plus, pe periodata studiilor doctorale au fost de asemenea participări cu prezentare la următoarele conferinţe:

1. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, Raluca Vernic, Fast Fourier Transforms for Bivariate aggregate losses. A Matlab application, *The 16th Conference of Romanian Society of Statistics and Probabilities, SPSR* , April 26, 2013, The Bucharest University of Economic Studies, Bucharest, Romania.

2. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, Raluca Vernic, Fast Fourier transform for Multivariate aggregate losses, *The 17th Conference of Romanian Society of Statistics and Probabilities, SPSR* , April 25, 2014, The University of Bucharest, Romania.

3. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, Exponential tilting for computing multivariate compound distributions using the Fast Fourier Transform, *22nd Conference on Applied and Industrial Mathematics - CAIM 2014* , September 18-22, 2014, University of Bacău, Romania, Abstracts, pp. 38.

4. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, Raluca Vernic, What if different types of lcaims simultaneously affect an insurance portofolio?, *The 18th Conference of Romanian Society of Statistics and Probabilities,SPSR*, May 8, 2015, University of Bucharest, Romania.

5. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, Raluca Vernic, On the recursive evaluation of a certain multivariate compound distribution, *The 8th Congress of Romanian Mathematicians*, June 28 - July 1, 2015, "Alexandru Ioan Cuza" University of Iasi, Romania, Abstracts, pp. 120.

6. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, On the recursive evaluation of a certain multivariate compund distribution , *Scientific PhD Students Session of the PhD School of Mathematics*, June 22, 2015, University of Bucharest, Romania.

7. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, Raluca Vernic, A recursive procedure for a compound risk model with compound-type severity distributions, *The 12th Balkan Conference on Operational Research BALCOR*, September 9-13, 2015, "Romanian Naval Academy", Constanta, Romania.

8. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, Raluca Vernic, Risk analysis based on the Monte Carlo method for a ship design project, *The 19th Conference of Romanian Society of Statistics and Probabilities, SPSR*, May 27, 2016, Technical University of Civil engineering, Bucharest, Romania.

9. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, *Scientific PhD Students Session of the PhD School of Mathematics*, June 21, 2016, University of Bucharest, Romania.

10. **Elena-Gratiela Robe-Voinea**, Raluca Vernic, Multivariate aggregate claims evaluation using the Fast Fourier Transform, *13éme Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées]*, August 25-29, 2016, "Alexandru Ioan Cuza" University of Iasi, Romania.

Capitolul 2

Noţiuni preliminare

2.1 Modele colective

2.1.1 Cazul unidimensional

Modelul colectiv în cazul unidimensional poate fi scris astfel:

$$S = \sum_{j=0}^{N} U_j, \tag{2.1}$$

unde S reprezintă o variabilă aleatoare pentru pierderile agregate, N numărul de daune, $U_0 = 0$ şi $(U_j)_{j\geq 1}$ costurile daunelor, independente identic repartizate (i.i.r.), care sunt de asemenea independente de N vezi [11].
Repartiţia lui S se numeşte compusă, în timp ce repartiţia lui N se numeşte repartiţie de numărare.

2.1.2 Cazul bidimensional

Modeul colectiv în cazul bidimensional poate fi scris astfel:

$$(S_1, S_2) = \left(\sum_{l=1}^{N_1} U_l, \sum_{j=1}^{N_2} V_j \right), \tag{2.2}$$

unde S_1 reprezintă pierderile agregate de tipul I, S_2 pierderile agregate de tipul II, U_l costurile daunelor de tipul I, (i.i.r.), V_j costurile daunelor de tip II, (i.i.r.), N_1 numărul de daune de tipul I, N_2 numărul de daune de tipul II. Aici N_1 şi U_l sunt indepenente, în timp ce N_2, V_j sunt de asemenea independente.
Recent, [14] a introdus un model colectiv bidimensional pentru studiul daunelor

agregate în cazul în care mai multe tipuri de daune afectează simultan un portofoliu de asigurări (cum ar fi inundaţii, furtuni sau cutremure).
Modelul este următorul:

$$(S_1, S_2) = \left(\sum_{i=1}^{N_1} U_i + \sum_{k=1}^{N_3} L_k, \sum_{j=1}^{N_2} V_j + \sum_{k=1}^{N_3} Q_k \right), \tag{2.3}$$

unde N_1 reprezintă numărul de accidente care cauzează doar daune de tipul I, N_2 reprezintă numărul de accidente care cauzează doar daune de tipul II şi N_3 reprezintă numărul de accidente care afectează toate tipurile de daune. Vectorul de daune (N_1, N_2, N_3) are funcţia de probabilitate $p(n_1, n_2, n_3) = P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, N_3 = n_3)$; $(U_i)_{i \leq 1}$ şi $(V_j)_{j \leq 1}$ sunt independente între ele şi independente faţa de numărul de daune(N_1, N_2, N_3) şi de daunele $(L_k, Q_k)_{k \leq 1}$, în acelaşi timp daunele $(L_k, Q_k)_{k \leq 1}$ sunt independente între ele, identic repatizate şi independente faţa de numărul de daune (N_1, N_2, N_3) şi de vectorii U_i şi V_j.

2.1.3 Cazul multidimensional

Modelul colectiv în cazul multidimensional poate fi scris astfel:

$$(S_1, ..., S_m) = \left(\sum_{i=1}^{N_1} U_{1i}, ..., \sum_{i=1}^{N_m} U_{mi} \right) \tag{2.4}$$

unde N_k este numărul de daune de tip k iar $(U_{ki})_{i \leq 1}$ costurile acestora, care sunt (i.i.r.) şi independente faţa de numărul de daune. [14] a obţinut recursii pentru cazul bidimensional (2.3) sub incidenţa a trei tipuri de ipoteze referitoare la structura de dependenţă dintre numerele de daune; modele rezultate au fost numite A, B şi C, asemeni celor similare din [11]. Ei au folosit de asemenea TFR ca şi metodă alternativă.

Observaţie 2.1 *Reamintim că o repartiţie aparţine clasei $R_1(a, b)$ dacă funcţia sa de probabilitate satisface recursia*

$$\Pr(N = n) = \left(a + \frac{b}{n} \right) \Pr(N = n - 1), \forall n \geq 1,$$

pentru anume constante $a, b \in \mathbb{R}$ (pentru detalii în ceea ce priveşte clasele R_k a se vedea de exemplu, [28] sau [33]).

Există mai multe tehnici folosite pentru determinarea repartiţiei compuse pentru valoarea pierderilor agregate precum: metoda convoluţiilor, recursivitate, simulare, calculul cu repartiţii aproximate şi metode de inversiune, care includ de asemenea TFR. Metoda recursivă şi metoda TFR vor fi studiate pe larg în continuare împreună cu modul în care acestea interacţionează cu modelele colective pentru a obţinerea repartiţiei compuse pentru un portofoliu de asigurări.

Capitolul 3

Recursii pentru modele compuse multidimensionale

3.1 Introducere

Considerăm următorul model compus multidimensional

$$(S_1, ..., S_m) = \left(\sum_{i=0}^{N_1} U_{1l} + \sum_{k=0}^{N_0} L_{1k}, ..., \sum_{l=0}^{N_m} U_{ml} + \sum_{k=0}^{N_0} L_{mk} \right), \tag{3.1}$$

unde $m \geq 2$ este numărul diferitelor tipuri de daune ce afectează portofoliul, S_k daunele compuse de tip k, N_k numărul de daune de tip k, N_0 numărul de daune comune (spre exemplu accidente care produc toate cele m tipuri de daune). Fiecare dintre aceste daune $(U_{jl})_l \geq 1$ sunt pozitive, independente şi identic repartizate (i.i.r) ca şi variabila aleatoare (v.a.) $U_j, 1 \leq j \leq m$, independente de numărul de daune precum şi de celelalte daune, inclusiv de $(L_{1k}, ..., L_{mk})$. Vectorii aleatori $(L_{1k}, ..., L_{mk})_{k \leq 1}$ sunt pozitivi, (i.i.r.) ca şi vectorul generic $(L_1, ..., L_m)$, şi independenţi de numărul de daune. Evident, $U_{j0} = L_{j0} = 0, \forall j$. În cele ce urmează, folosim o notaţie boldată pentru a nota următorii vectori astfel, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)$ sau $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m)$. Vom lucra cu variabile aleatoare discrete şi dacă repartiţia valorii daunelor este de tip continuu, aceasta ar trebui discretizată folosind, de exemplu, metoda rotunjirilor, a se vedea [17]. Dacă f este o funcţie de probabilitate ((f.p.)), vom nota cu f^{*n} a n-a convoluţie corespunzătoare repartiţiei sumei a n v.a. (i.i.r.) având (f.p.) f; a se nota faptul că $f^{*1} = f$ şi, prin convenţie, $f^{*0}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$. Fie $f_{\mathbf{S}}$ (f.p.) a lui $\mathbf{S}$, f_j (f.p.) a lui U_j,$j = \overline{1, m}$, f_0 (f.p.) a lui $\mathbf{L}$, şi p (f.p.) a lui $\mathbf{N} = (N_0, ..., N_m)$.

Atunci din [17], obţinem cu uşurinţă

$$f_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \sum_{n_0 \geq 0, ..., n_m \geq 0} p(n_0, ..., n_m) \sum_{k=0}^{x} \prod_{j=1}^{m} f_j^{*n_j}(k_j) f_0^{*n_0}(\mathbf{x} - \mathbf{k}), \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \tag{3.2}$$

unde $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$, în timp ce $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ şi diferenţa **x-k** se iau componentă cu componentă. De reţinut că datorită convoluţiilor din (3.2), $f_{\mathbf{S}}$ poate fi greu de evaluat şi poate să dureze foarte mult, prin urmare au fost dezvoltate metodele alternative, dintre care metoda recursivă are un rol important în matematica actuarială. Reamintim faptul că repartiţia lui **N** se mai numeşe şi repartiţie de numărare, în timp ce repartiţia lui **S** se mai numeşte şi compusă. Prin urmare să notăm (f.p.) a vectorului aleator discret **X** cu $f_{\mathbf{X}}$ şi funcţia generatoare a probabilităţilor ((f.g.p.)) cu $g_{\mathbf{X}}$; reamintim faptul că

$$g_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \stackrel{def}{=} E\left[\prod_{j=1}^{m} t_j^{X_j}\right].$$

În plus, ca şi proprietate pentru (f.g.p.), avem că

$$g_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \sum_{x \geq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^{m} t_i^{x_i} \tag{3.3}$$

şi în mod clar, $g_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{0})$.

Propoziţie 3.1 *Conform ipotezelor din modelul (3.1), (f.g.p.) a lui **S** este dată de*

$$g_{\boldsymbol{S}}(\mathbf{t}) = g_{\boldsymbol{N}}(g_{\boldsymbol{L}}(\mathbf{t}), g_{U_1}(t_1), ..., g_{U_m}(t_m)). \tag{3.4}$$

3.2 Evaluare recursivă: primul caz, corespunzător modelului B

Această secţiune are la bază articolul [21].
În cele ce urmează, vom prezenta o recursie pentru a evalua repartiţia modelului (3.1) atunci când numărul de daune **N** urmează o repartiţie Poisson multidimensională. În cazul bidimensional când $m = 2$, a fost recent prezentată o recursie în [14]. Recursia noastră o extinde pe aceasta pentru un m general. În cazul mai simplu unidimensional ($m = 1$), istoria recursiilor cu repartiţie de numărare de tip Poisson începe în asigurări cu [20] şi [35], şi continuă cu recursii mai complexe pentru repartiţii Poisson mixte compuse discutate în [36], [11] printre alţii, sau, în cazul multidimensional, în [32], etc. În particular, aşa cum am menţionat de la început, dacă **N** urmează o repartiţie Poisson multidimensională $MPo_{m+1}(\lambda, \lambda_0, ..., \lambda_m)$ cu $\lambda > 0, \lambda_j > 0, \forall j$, atunci, din [16] obţinem

$$g_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) = \exp\left\{\lambda\left(\prod_{j=0}^{m} t_j - 1\right) + \sum_{j=0}^{m} \lambda_j(t_j - 1)\right\}. \tag{3.5}$$

Propoziţie 3.2 *În ipotezele modelului (3.1), dacă* $\boldsymbol{N}$ *urmează repartiţia Poisson multidimensională* $MPo_{m+1}(\lambda, \lambda_0, ..., \lambda_m)$*, atunci (f.p.) a lui* $\boldsymbol{S}$ *satisface recursia*

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x}) &= \frac{\lambda_k}{x_k} \sum_{z_k=0}^{x_k} z_k f_k(z_k) f_S(x_1, ..., x_{k-1}, x_k - z_k, x_{k+1}, ..., x_m) + \\ & + \frac{\lambda_0}{x_k} \sum_{z=0}^{\mathbf{x}} z_k f_0(\mathbf{z}) f_s(\mathbf{x}-\mathbf{z}) + \frac{\lambda}{x_k} \sum_{\mathbf{v}=\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \left(\sum_{\mathbf{u}=\mathbf{0}}^{\mathbf{v}} v_k f_i(u_i) f_0(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \right), \end{aligned}$$

$x_k \geq 1, 1 \leq k \leq m$, *cu valoarea de pornire*

$$f_{\mathbf{S}}(\mathbf{0}) = \exp\left\{ \lambda \left(f_0(\mathbf{0}) \prod_{j=1}^{m} f_j(0) - 1 \right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (f_j(0) - 1) + \lambda_0 (f_0(\mathbf{0}) - 1) \right\}. \tag{3.6}$$

3.3 Evaluare recursivă: al doilea caz corespunzător modelului A

Acestă secţiune se bazează pe lucrarea [25].
În acest caz, extindem recursia modelului A din [14] către o variantă multidimensională în ipoteza că repartiţia numărului total de cereri N apartiţine clasei $R_1(a, b)$, pe când, condiţionat de aceasta, repartiţia lui $\mathbf{N}$ este multinomială.
Prin urmare, vom obţine o formulă recursivă corespunzătoare modelului multidimensional A, şi prezentăm un exemplu numeric în cazul tridimensional $m = 3$ făcând câteva observaţii referitoare la ordinea calculelor.
Corespunzător modeului A din Jin and Ren [14], considerăm următoarele ipoteze suplimentare asupra modelului (3.1):

A1 Prima se referă la numărul total de cereri $N = N_0 + N_1 + ... + N_m$, a cărui (f.p.) se presupune a satisface o recursie de tip Panjer

$$\Pr(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) \Pr(N = n - 1), \forall n \geq 1,$$

pentru nişte constante $a, b \in \mathbb{R}$ (pentru detalii asupra clasei Panjer a se vedea [19] sau [33]);

A2 A doua se referă la repartiţia condiţionată a lui $\mathbf{N}$ fiind dat $N = n$, care se presupune a fii multinomială $Mnom(n; p_1, ..., p_m)$ de parametrii $n \in \mathbb{N}$ şi $p_1, ..., p_m \in (0, 1)$ astfel încât $p_0 := 1 - \sum_{i=1}^{m} p_i \in (0, 1)$. Reamintim ca (vezi, e.g., [16]), $n = \sum_{i=0}^{m} n_i$,

$$\Pr(N_0 = n_0, N_1 = n_1, ..., N_m = n_m | N = n) = \frac{n!}{\prod_{i=0}^{m} n_i!} \prod_{i=0}^{m} p_i^{n_i}.$$

Mai mult, notând cu $\mathbb{E}$ operatorul medie pe baza formulei (f.g.p.) a repartiţiei multinomiale (vezi, e.g., [16]), (f.g.p.)-ul lui $\mathbf{N}$ devine

$$g_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{m} n_j^{N_j} \middle| N\right]\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{m} p_j n_j\right)^N\right] = g_N\left(\sum_{j=0}^{m} p_j n_j\right).$$

Din Propoziţia 2.1 din [21], avem că pentru modelul general (3.1), (f.g.p.)-ul lui $\mathbf{S}$ este dat de

$$g_{\mathbf{S}}(\mathbf{t}) = g_{\mathbf{N}}(g_{\mathbf{L}}(\mathbf{t}), g_{U_1}(t_1), ..., g_{U_m}(t_m)),$$

şi inserând formula lui $g_{\mathbf{N}}$ conduce la următoarea formulă pentru modelul A,

$$g_{\mathbf{S}}(\mathbf{t}) = g_N\left(\sum_{j=1}^{m} p_j g_{Uj}(t_j) + p_0 g_{\mathbf{L}}(\mathbf{t})\right). \tag{3.7}$$

Următoarele formule recursive au fost demonstrate în teză prin două metode alternative: prima se bazează pe proprietăţile (f.g.p.) şi a doua se bazează pe recursiile prezentate în [33]. În continuare, renotăm $f_{\mathbf{L}}$ cu f_0.

Propoziţie 3.3 *În ipotezele (A1-A2) ale modelului (3.1), următoarea valoare de pornire şi formule recursive au loc:*

$$f_{\mathbf{s}}(\mathbf{0}) = g_{\mathbf{S}}(\mathbf{0}) = g_N\left(\sum_{j=1}^{m} p_j f_j(0) + p_0 f_{\mathbf{L}}(\mathbf{0})\right);$$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \;=\; & K\Bigg\{a\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m} p_j \sum_{y_j=1}^{x_j} f_j(y_j) f_{\mathbf{S}}(x_1, ..., x_{j-1}, x_j - y_j, x_{j+1}, ..., x_m) \\ & + p_k \sum_{y_k=1}^{x_k}\left(a + b\frac{y_k}{x_k}\right) f_k(y_k) f_{\mathbf{S}}(x_1, ..., x_{k-1}, x_k - y_k, x_{k+1}, ..., x_m) \\ & + p_0 \sum_{\mathbf{0}<\mathbf{y}\leq\mathbf{x}}\left(a + b\frac{y_k}{x_k}\right) f_{\mathbf{L}}(\mathbf{y}) f_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$x_k \geq 1, x_j \geq 0, \forall j \neq k;$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \;=\; & K\Bigg\{\sum_{j=1}^{m} p_j \sum_{y_j=1}^{x_j}\left(a + b\frac{y_j}{x_+}\right) f_j(y_j) f_{\mathbf{S}}(x_1, ..., x_{j-1}, x_j - y_j, x_{j+1}, ..., x_m) \\ & + p_0 \sum_{\mathbf{0}<\mathbf{y}\leq\mathbf{x}}\left(a + b\frac{y_+}{x_+}\right) f_{\mathbf{L}}(\mathbf{y}) f_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Bigg\}, \ \mathbf{x} > \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

unde $K = \left[1 - a\left(\sum_{j=1}^{m} p_j f_j(0) + p_0 f_{\mathbf{L}}(\mathbf{0})\right)\right]^{-1}$ *şi* $x_+ = \sum_{i=1}^{m} x_i$.

Capitolul 4

Metode alternative

În cele ce urmează avem nevoie de funcţia caracteristică a modelului (3.1) pe care o prezentăm în următoarea propoziţie.

Propoziţie 4.1 *În ipotezele modelului (3.1), funcţia caracteristică a lui* $\mathbf{S}$ *este dată de*

$$\varphi_{\mathbf{S}}(\mathbf{t}) = g_{\mathbf{N}}(\varphi_{\mathbf{L}}(\mathbf{t}), \varphi_{U_1}(t_1), ..., \varphi_{U_m}(t_m)). \tag{4.1}$$

4.1 Transformate Fourier multidimensionale discrete şi algoritmul TFR

Fie $f\left(\mathbf{x}\right)$ o funcţie m-variată definită pentru valorile întregi $x_j = 0, 1, ..., r_j - 1, 1 \leq j \leq m$. Atunci transformata sa Fourier discretă (TFD)$\tilde{f}$ poate fi definită prin (definiţie folosită în Matlab)

$$\tilde{f}(\mathbf{c}) = \sum_{x_1=0}^{r_1-1} ... \sum_{x_m=0}^{r_m-1} f(\mathbf{x}) \exp\left\{-2\pi i \sum_{j=1}^{m} \frac{x_j c_j}{r_j}\right\},\ c_j = 0, ..., r_j - 1,\ 1 \leq j \leq m.$$

Funcţia sa inversă este dată de

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{m} r_j} \sum_{c_1=0}^{r_1-1} ... \sum_{c_m=0}^{r_m-1} \tilde{f}(\mathbf{c}) \exp\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{m} \frac{x_j c_j}{r_j}\right\},\ x_j = 0, ..., r_j - 1,\ 1 \leq j \leq m.$$

Pentru modelul (3.1), următorul algoritm bazat pe TFR şi inversa sa (ITFR) poate fii folosit pentru a obţine o repartiţie aproximativă lui $\mathbf{S}$.

Algoritmul 1

Pas 1. Se fixează punctele de trunchiere pentru v.a. cereri U_j la $r_j, 1 \leq j \leq m$, şi pentru $\mathbf{L}$ la $(r_1, ..., r_m)$. Repartiţiile daunelor astfel trunchiate sunt $\mathbf{f}_j = \{f_j(0), f_j(1), ..., f_j(r_j - 1)\}$ pentru $U_j, 1 \leq j \leq m$, şi $\mathbf{f}_0 = \left[f_0\left(j_1, ..., j_m\right)\right]_{j_1,...,j_m}$

pentru $\mathbf{L}$, unde $0 \leq j_l \leq r_l - 1, 1 \leq l \leq m$. Dacă este nevoie, vectorii obţinuţi $\mathbf{f}_j$ sau tabelul $\mathbf{f}_0$ pot fii completaţi cu 0 astfel încât r_j-urile să fie puteri ale lui 2.

Pas 2. Se aplică TFR unidimensională lui $\mathbf{f}_j$ rezultând vectorul $\tilde{\mathbf{f}}_j, 1 \leq j \leq m$; apoi se aplică TFR multidimensională lui $\mathbf{f}_0$, rezultând tabelul multidimensional $\tilde{\mathbf{f}}_0$.

Pas 3. Folosim formula (4.1) pentru a obţine funcţia caracteristică discretă

$$\tilde{\varphi}_{\mathbf{S}}(\mathbf{j}) = g_{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{f}}_0(\mathbf{j}), \tilde{\mathbf{f}}_1(j_1), ..., \tilde{\mathbf{f}}_m(j_m)), 0 \leq j_l \leq r_l - 1, 1 \leq l \leq m.$$

Pas 4. Se aplică ITFR lui $\tilde{\varphi}_{\mathbf{S}}$ pentru a obţine (f.p.) lui $\mathbf{S}$.

Observaţie 4.2 *Pentru a determina valorile r_j optimale, acestea se pot creşte gradual (e.g., 64, 128, 256 etc.) până când diferenţele dintre soluţiile obţinute pentru valorile r_j curente şi cele anterioare nu mai sunt semnificative. Mai multe detalii asupra erorilor sunt date în secţiunea următoare.*

Revenind la Algoritmul 1, acesta generează în special două tipuri de erori: de discretizare şi de tip "aliasing".

4.2 Tipuri de erori. Exponential tilting

Erorile generate de folosirea TFD (şi în particular de TFR) au fost investigate în special în legătură cu aplicaţiile din analiza armonică (i.e., procesarea semnalelor şi imaginilor) vezi, e.g. [13] şi [1]. În domeniul asigurărilor deşi calculul repartiţiilor cererilor agregate pe baza metodei Fourier începe din 1983 cu [10], abia mai târziu, [8] şi [9] au realizat un studiu detaliat al erorior şi chiar au propus o procedură TFR îmbunătăţită bazată pe o schimbare exponenţială de măsură. Referitor la aceeaşi problemă, [26] a remarcat că "astfel de erori tipice pot fi cruciale pentru rezultatul final, mai ales când se lucrează cu repartiţii heavy-tailed".

4.2.1 Erori de discretizare (aritmetizare)

Sursa acestui tip de erori este alegerea pasului de discretizare h_i, iar soluţii de reducere a lor sunt următoarele:
- evaluarea de limite superioare şi inferioare (poate fi prea pesimistică);
- reducerea succesivă a paşilor până când îmbunătăţirea în repartiţia calculată este suficient de mică.

4.2.2 Erori de tip "aliasing"

Aceasta este o eroare specifică TFD care se datorează trunchierii şi constă în plasarea sub punctul de trunchiere a masei compuse care se află deasupra acestui punct (efectul *wrap-around*). Pe baza convoluţiilor se obţine următoarea limită superioară pentru eroarea AE corespunzătoare modelului nostru :

$$AE\left(\mathbf{S}\right) \leq 1 - F_{\mathbf{S}}\left(\mathbf{r}-\mathbf{1}\right).$$

Pentru a reduce erorile AE se poate proceda astfel :
- Se cresc rezonabil punctele de trunchiere; dacă nu există masă de probabilitate între un punct (mai mic) şi punctul de trunchiere, domeniul gol se completează cu zero;
- Se aplică exponential tilting cu o alegere atentă a parametrilor de tilt-are.

Exponential tilting
Generează o reducere exponenţială a cozii repartiţiei.
Operatorii de tiltare sunt definiţi astfel

$$\begin{aligned} E_{\theta_j}\mathbf{f}_j &= \left[e^{-\theta_j l} f_j\left(l\right)\right]_{0\leq l\leq r_j-1}, 1\leq j\leq m, \\ E_{\theta_1,\dots,\theta_m}\mathbf{f}_0 &= \left[\exp\left\{-\sum_{j=1}^m \theta_j l_j\right\} f_0\left(l_1,\dots,l_m\right)\right]_{0\leq l_j\leq r_j-1, 1\leq j\leq m}, \end{aligned}$$

unde $\theta_j > 0, 1 \leq j \leq m$, sunt parametrii de tiltare.

Algortimul TFR cu exponential tilting : Algoritm 2
Pas 1. Acelaşi ca în Algoritmul 1;
Pas 2. Se tiltează vectorii $\mathbf{f}_j, 1 \leq j \leq m$, şi tabelul multidimensional $\mathbf{f}_0$;
Pas 3. Se aplică TFR pentru a obţine $\widetilde{E_{\theta_j}\mathbf{f}_j}, 1 \leq j \leq m$, şi $\widetilde{E_{\theta_1,\dots,\theta_m}\mathbf{f}_0}$;
Pas 4. Se foloseşte formula (4.1) pentru a obţine funţia caracteristică discretă tiltată a lui $\mathbf{S}$, i.e. o tabelă multidimensională de diminsiuni $r_1 \times \dots \times r_m$;
Pas 5. Se aplică ITFR acestei tabele multidimensionale, apoi se untiltează rezultatul prin $E_{-\theta_1,\dots,-\theta_m}$pentru a obţine (f.p.) a lui

Capitolul 5

Metoda Monte Carlo - studiu de caz particular

O metodă bine cunoscută precum simularea prin Monte Carlo este cel mai adesea folosită pentru analizele de risc atât la începutul, cât şi pe parcursul dezvoltării unui proiect. În acest capitol este prezentată metoda pe un proiect de proiectare navală pentru un tanc chimic petrolier.
Mai întâi este important de ştiut ca principalul obiectiv în timpul realizării unui proiect detaliat de proiectare navală constă în acordarea unei atenţii deosebite aspectului numit risc. Considerând faptul că a construi o navă presupune o mulţime de riscuri, o sarcină importantă este prevenirea lor prin maximizarea probabilităţii şi a consecinţelor evenimentelor pozitive şi în acelaşi timp prin minimizarea probabilităţii şi a consecinţelor evenimentelor negative legate de obiectivele proiectului. Industria construcţiilor navale este de secole un subiect de interes mondial vezi e.g. Hoving [12], Chida şi Davies [4], Briggs Vernon [2] şi implică o serie de aspecte precum cele pe care le vom prezenta în continuare. Construcţia de noi nave presupune costuri substanţiale, consum de materii prime şi materiale, resurse umane importante, precum şi includerea de tehnici şi tehnologii noi specifice. Ca o consecinţă la pornirea unui nou proiect este necesară o analiză de risc pentru a reflecta pe cât mai bine posibil implicaţiile şiurmă rile tuturor factorilor care vor participa la atingerea scopului.

5.1 Simulare Monte Carlo pentru un proiect de proiectare navală

În acest studiu de caz am considerat o mică parte dintr-un proiect de proiectare navală planificată a începe pe 4 Ianuarie, 2016 şi a fi finalizat pe 18 Iulie, 2017 la un cost de $120.000. De menţionat că s-a folosit programul software Primavera Risk Analysis.

5.1.1 Simulare 1

Pentru a modela incertitudinea duratei de execuţie am utilizat o repartiţie uniformă apoi una triunghiulară fixând valorile minim, cel mai probabil şi maxim sub formă de procente. După executarea simulării Monte Carlo, probabilitatea de finalizare la termen a rezultat 90% (triunghi). De asemenea percentila P-80 este acum de 4 Iulie 2017 pentru repartiţia triunghi prin comparaţie cu 30 Mai 2017 pentru repartiţia uniformă. Se observă că dacă alegem repartiţia uniformă probabilitatea de a termina la timp este mai optimistică, de 98%. Aceasta se datorează formei repartiţiei uniforme, dar este de aşteptat ca o repartiţie triunghi să fie mai realistică pentru acest studiu. Costurile acestei simulări sunt aproape similare în ambele cazuri: indiferent dacă se foloseşte repartiţie uniformă sau triunghi există 94% şanse în cazul uniform şi 96% şanse în cazul triunghi de a păstra bugetul iniţial.

5.1.2 Simulare 2

În această parte am folosit un registru de risc. Fiecare risc este definit prin intermediul a cinci atribute precum: probabilitate, planificare, cost, performanţă şi scor. Fiecărui atribut i s-a alocat o scală (mic, mediu, mare) în conformitate cu impactul factorului asupra proiectului. Am considerat următoarele riscuri:

- Schimbarea datelor de intrare
- Plecarea angajaţilor
- Certificarea de clasă
- Baza logistică.

Se observă că în acest caz data P-80 este 18 August, 2017, cu alte cuvinte o întârziere aproape sigură de o lună faţă de data prevăzută de 18 Iulie, 2017; probabilitatea de a termina la timp în acest scenariu este de doar 39%.
Referitor la costuri sunt doar 19% şanse de a termina proiectul cu bugetul iniţial ($120.000), şi o posibilitate P-80 de a avea un cost de $282.448, care înseamnă o diferenţă de $162.488.

Capitolul 6

Concluzii

6.1 Concluzii generale

În această teză de doctorat rezultatele originale au fost prezentate în concordanţă cu studiul repartiţiilor pentru daune agregate pentru un portofoliu de asigurari ce poate conţine poliţe ce pot implica: incendii, inundaţii, cutremure, accidente rutiere, etc.
În principal atenţia a fost axată pe extinderea a două modele bidimensionale către varianta multidimensională, şi, în plus crearea propriului model multidimensional compus, cu dependenţe proprii.
Obiectivul a fost obţinerea unei formule recursive exacte pentru funcţia de probabilitate a repartiţiei compuse în cazul ambelor modele.
De ce am făcut acest lucru, şi ce am vrut să obţinem astfel? Răspunsul este evident, am vrut efectiv să contribuim la îmbunătăţirea ştiinţei actuariale prin ajutarea în acest mod a actuarilor la realizarea unei analize cât mai bune a unui scenariu de asigurări, mai ales pentru cazul când un portofoliu este afectat în mod simultan de mai multe tipuri de daune. Este important să menţionăm aici că toate aceste aspecte au fost demonstrate nu doar prin intermediul metodelor matematice clasice, dar şi prin exemple numerice.
Mai mult, datorită faptului că în ceea ce mă priveşte îmi desfăşor activitatea ca şi inginer planificator în industria construcţiilor de nave, consider că a fost o idee bună să completez teza cu un studiu de caz inspirat din acest domeniu de activitate. În acest fel am vrut să subliniez puternica legătură dintre planificare şi o matematică, afirmând astfel: "Matematica este peste tot!"
Am arătat cât de importantă poate fi o metodă de simulare precum Monte Carlo şi cum ne poate ajuta să realizăm o analiză de risc relevantă a unui proiect de proiectare navală.
În opinia mea cred că realizănd această mixtură dintre teoria stocastică şi viaţa reală am făcut cercetarea mai interesantă şi în mod cert originală.
Este foarte important de menţionat că întreaga cercetare din acestă teză este rezultatul

colaborării strânse cu conducătorul meu Prof. Dr. Vasile Preda şi cu dna. Conf. Dr. Raluca Vernic care, datorită experienţei lor ştiinţifice mi-au coordonat ideile în cel mai bun mod posibil pentru a realiza o muncă eficientă.

Bibliografie

[1] Briggs, W.L. and Henson, V.E. (1995). The DFT: An Owners' Manual for the Discrete Fourier Transform. Siam.

[2] Briggs Vernon, L. (2015). History of Shipbuilding on North River, Plymouth County, Massachusetts: With Genealogies of the Shipbuilders, and Accounts of the Industries Upon Its Tributaries, 1640 to 1872 (Classic Reprint), Forgotten Books.

[3] Bühlmann, H. (1984). Numerical evaluation of the compound Poisson distribution: recursion or fast Fourier transform? Scand. Actuar. J., 116-126.

[4] Chida, T., Davies, O. (2013). The Japanese Shipping and Shipbuilding Industries: A History of their Modern Growth,Bloomsbury Academic Collections.

[5] Dlugokecki, V., Fanguy, D., Hepintstall, L.(2009). Leading the way for midtier shipyards to implement design for production methodologies, Journal of Ship Production, Vol. 25, No. 2, p. 99-108.

[6] Dorp van J.R. ; Duffey, M. R. (1997). Statistical dependence in risk analysis for project networks using Monte Carlo methods, Elsevier International.

[7] Embrechts,P., Grübel R. and Pitts, S. M. (1993). *Some applications of the fast Fourier transform algorithm in insurance mathematics. This paper is dedicated to Professor WS Jewell on the occasion of his 60th birthday*, Stat. Neerl.,59-75, 47.

[8] Grubel, R. and Hermesmeier, R. (1999). Computation of compound distributions I: aliasing errors and exponential tilting. ASTIN Bulletin 29 (2), 197-214.

[9] Grubel, R. and Hermesmeier, R. (2000). Computation of compound distributions II: discretization errors and Richardson extrapolation. ASTIN Bulletin 30 (2), 309-331.

[10] Heckman, P. E. and Meyers, G. G. (1983). The calculation of aggregate loss distributions from claim severity and claim count distributions. Proceedings of the Casualty Actuarial Society LXX, 22-61.

[11] Hesselager, O. (1996a). A recursive procedure for calculation of some mixed compound Poisson distributions. Scandinavian Actuarial Journal, 1, pp. 54-63.

[12] Hoving, A.J.,Wildeman, D.(2012). Nicolaes Witsen and Shipbuilding in the Dutch Golden Age,Texas AM University Press.

[13] Jerri, A.(1992). Integral and discrete transforms with applications and error analysis (Vol. 162). CRC.

[14] Jin, T.,Ren, J. (2014). Recursions and fast Fourier transforms for a new bivariate aggregate claims model. Scandinavian Actuarial Journal, 8, pp. 729-752.

[15] Jin, T., Provost, S.B.,Ren, J. (2016). Recursions and fast Fourier transforms for a new bivariate aggregate claims model. Scandinavian Actuarial Journal, 3, pp. 216-245.

[16] Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1997). Discrete Multivariate Distributions. Wiley, New York.

[17] Klugman, S.A.,Panjer, H.H.,Willmot, G.E. (2004). Loss Models: From Data to Decisions, 2nd edn, Wiley-Interscience. Hoboken.

[18] Kolic, D., Fafandjel, N., Calic, B.(2010).Determining how to apply the design for production concept in shipyards through risk analysis, Engineering Review, 30-1, 63-72.

[19] Panjer, H. H. (1981). Recursive evaluation of a family of compound distributions, ASTIN Bull., 12(1), 22-26.

[20] Panjer, H.H. (1990). The aggregate claims distribution and stop-loss reinsurance. Transactions of the Society of Actuaries, 32, pp. 523-545

[21] Robe-Voinea, E.G. and Vernic, R. (2015a). On a multivariate aggregate claims model with multivariate Poisson counting distribution. To appear in Proceedings of the Romanian Academy - Series A.

[22] Robe-Voinea, E.G. and Vernic, R.(2015b). On the recursive evaluation of a certain multivariate compound distribution. 8th Congress of Romanian Mathematicians, June 28-July 1, 2015, "Alexandru Ioan Cuza" University of Iasi.

[23] Robe-Voinea, E.G. and Vernic, R. (2015b). Another approach to the evaluation of a certain multivariate compound distribution. To appear in Analele Ştiintifice ale Universitatii Ovidius

[24] Robe-Voinea, E.G. and Vernic, R.,(2016). Fast Fourier Transform for multivariate aggregate claims, *Computational and Applied, Springer International Publishing*, DOI 10.1007/s40314-016-0336-6, Print ISSN 0101-8205, Online ISSN 1807-0302.

[25] Robe-Voinea, E.G. and Vernic, R. (2015c). On the recursive evaluation of a certain multivariate compound distribution. To appear in Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series), Springer International Publishing.

[26] Schaller, P. and Temnov, G. (2008). Efficient and precise computation of convolutions: applying FFT to heavy tailed distributions. Computational Methods in Applied Mathematics 8 (2), 187-200.

[27] Storch, R.L., Lim, S.(1999).Improving flow to achieve lean manufacturing in shipbuilding, Production Planning and Control, Vol. 10, No.2, p.127-137.

[28] Sundt, B. (1992). On some extensions of Panjer's class of counting distributions. ASTIN Bulletin 22, 1, 61-80.

[29] Sundt, B.(1999). On multivariate Panjer recursions. ASTIN Bulletin, 29, 1, 29-45.

[30] Sundt, B.(2000a). Multivariate compound Poisson distributions and infinite divisibility. ASTIN Bull. 30, 305-308.

[31] Sundt, B.(2000b). On multivariate Vernic recursions. ASTIN Bull. 30, 111-122.

[32] Sundt, B., Vernic, R.(2004). Recursions for compound mixed multivariate Poisson distributions. Bltter der DGVFM, 26, 4, pp. 665-691.

[33] Sundt, B.,Vernic, R.(2009). Recursions for Convolutions and Compound Distributions with Insurance Applications, EAA Lectures Notes. Springer-Verlag Berlin.

[34] Vernic, R.(1999). Recursive evaluation of some bivariate compound distributions. ASTIN Bull. 29, 315-325.

[35] Williams, R.E.(1980). Computing the probability function for aggregate claims. Proceedings of the Canadian Institute of Actuaries, XI, pp. 39-47.

[36] Willmot, G.E.(1986). Mixed compound Poisson distributions. ASTIN Bulletin, 16, pp. 59-79.

[37] Winston, W.L.(2004) Introduction to Probability Models Operations Research, Vol. 2, 4th edition, Thomson Learning, Canada.