Universitatea din Bucureşti, Facultatea de
Matematică şi Informatică

Categorii Grothendieck, Categorii monoidale si Algebre Frobenius

Doctorand:
Laura Elena Năstăsescu

Conducator de doctorat:
Prof. Dr. Sorin Dăscălescu

O teză prezentată pentru titlul de
Doctor in Matematică

Bucureşti, 2016

Rezumat

Introducere

Categoriile Grothendieck au fost introduse de către Alexander Grothendieck în lucrarea sa [32] publicată în 1957. Scopul său a fost acela de a utilza metodele algebrei omologice pentru studiul fasciculelor. Un studiu sistematic al categoriilor Grothendieck a fost făcut de catre Gabriel în teza sa [28]. Studiul categoriilor Grothendieck a unificat multe teorii în matematică. Exemple relevante de categorii Grothendieck sunt: categoria modulelor stângi peste un inel, categoria fasciculelor cuasi-coerente peste o varietate algebrică, categoria modulelor graduate peste un inel graduat, categoria comodulelor peste o coalgebră, categoria modulelor Doi-Hopf generalizate. La începutul acestei teorii una dintre întrebarile deschise era accea daca orice categorie Grothendieck este echivalentă cu o categorie de module(peste un inel). Răspunsul s-a dovedit a fi negativ. De exemplu este posibil de arătat că anumite categorii de module graduate nu sunt echivalente cu o categorie de module. Totuşi Popescu şi Gabriel au demonstrat în 1964 o teoremă care arată că orice categorie Grothendieck este echivalentă cu o categoria cât a unei categorii de module, de văzut [29]. Mai precis, dacă $\mathcal{A}$ este o categorie Grothendieck cu un generator G, $R = End_{\mathcal{A}}(G)$ este inelul de endomorfisme al lui G şi $Mod(R)$ este categoria de R-module unitare drepte, atunci functorul $T : \mathcal{A} \to Mod(R)$ definit prin $T(X) = Hom_{\mathcal{A}}(G, X)$ pe obiectele $X \in \mathcal{A}$ şi prin $T(f) = Hom_{\mathcal{A}}(G, f) : T(X) \to T(Y)$ pe morfismele $f : X \to Y$ in $\mathcal{A}$ este deplin fidel şi are un adjunct stâng exact S. Demonstraţia iniţiala a fost destul de complicată; în special partea de exactitate a functorului S. Cu scopul de a o simplifica, demonstraţia iniţială a fost revizuită de o serie de autori, printre cele mai elegante şi scurte demonstraţii în ordine cronologică fiind cele ale lui Takeuchi [65], Ulmer [67] si Mitchell [44]. Ultima dintre ele utilizează o lemă ingenioasă, care a rămas în literatură ca lema lui Mitchell, si totodată existenţa a suficiente obiecte injective în orice categorie Grothendieck.

Conceptul de localizare a fost studiat pentru prima dată pentru inele comutative. În acest caz considerăm P un ideal prim într-un inel comutativ. Complementul acestui ideal este notat prin $S_P = R - P$, care este un sistem multiplicativ închis. Putem considera apoi subcategoria localizantă $R-Mod$ notată prin

$$\mathcal{C}_P = \{M \in R - Mod | S_P^{-1}M = 0\}$$

Este uşor de vazut că aceasta este acelaşi lucru cu:

$$\mathcal{C}_P = \{M \in R - Mod | Hom_R(M, E(R/P) = 0\}$$

unde $E(R/P)$ este anvelopa injectivă a lui R/P. Mai mult, categoria cât $R - Mod/\mathcal{C}_P$ este echivalentă cu categoria $R_P - Mod$ a tuturor modulelor stângi peste inelul localizant R_P. Odată cu noţiunea de categorie abeliană a fost introdus si conceptul de teorie de torsiune. Acesta a devenit un instrument puternic pentru studiul categoriilor. O teorie de torsiune ereditară într-o categorie arbitrară abeliană $\mathcal{A}$ este acelaşi lucru cu a avea o subcategorie localizantă $\mathcal{C}$ în $\mathcal{A}$. Mai mult, pentru orice subcategorie localizantă $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$ avem conceptul de categorie cât $\mathcal{A}/\mathcal{C}$. Întrebarea naturală care se studiaza aici este proximitatea dintre orice subcategorie localizantă $\mathcal{C}$ din $\mathcal{A}$ şi subcategoriile localizante de tipul $\mathcal{C}_P$. Cahen a fost primul care a introdus o noţiune de "stabilitate". El a introdus această noţiune pentru o subcategorie localizantă a unei categorii de module peste un inel comutativ. În acest caz o subcategorie localizantă se zice stabilă dacă $\mathcal{C} = \bigcap_{P \in X} \mathcal{C}_P$, pentru o mulţime $X \subseteq Spec(R)$.

Unul dintre scopurile tezei este acela de a revizui teorema Gabriel-Popescu şi generalizarile sale, şi totodata de a introduce o noţiune de stabilitate în cazul general a unei categorii Grothendieck. Un alt scop este acela de a ne uita la exemple speciale de categorii Grothendieck, mai precis categoria coreprezentărilor peste algebre Hopf, şi de a investiga algebrele Frobenius si algebrele simetrice în astfel de categorii. Algebrele Frobenius îsi au originile în studiul întreprins de F.G. Frobenius in teoria reprezentărilor grupurilor finite. Studiul lor a fost iniţiat de Brauer, Nesbitt si Nakayama si apoi continuat de Dieudonne, Eilenberg, Azumaya etc. Algebrele Frobenius au jucat un rol important în teoria algebrelor Hopf, deoarece orice algebra Hopf finit dimensională este Frobenius, inelele de coomologie ale varietaţilor compacte orientate, soluţiile ecuaţiei cuantice Yang-Baxter, polinoamele Jones si teoria câmpurilor cuantice. Este o problema interesantă să înţelegem semnificaţia algebrelor Frobenius în categorii monoidale, altele decât categorii de spaţii vectoriale. Discutăm această problema în cazul categoriei comodulelor peste o algebra Hopf H. Punând nişte condiţii suplimentare lui H, ne uităm de asemenea la algebrele simetrice în această categorie. O atenţie specială este acordată cazului în care H este algebra Hopf kG, unde G este un grup arbitrar; în această situaţie categoria coreprezentărilor peste H este categoria spaţiilor vectoriale G-graduate, iar algebrele în această categorie sunt algebrele G-graduate. O ultimă direcţie de studiu în această teză este legată de algebrele graduate dupa un grup. Teoria algebrelor graduate dupa un grup arbitrar a fost sistematic dezvoltată dupa 1970. Sursele principale de inspiraţie au fost algebrele de polinoame cu graduarea(uzuală) dupa întregi pozitivi, şi algebrele grupale cu graduarea standard dupa grupul considerat. Studiul graduărilor de grupuri pe diverse clase de algebre au fost de interes in algebra comutativă şi necomutativă, algebre Lie şi în teoria reprezentărilor. Suntem interesaţi în graduari pe algebre de polinoame.

Teza este divizată în patru capitole.

Capitolul 1: Categorii Grothendieck. O generalizare a Lemei lui Mitchell.

În 1964 Pierre Gabriel şi Nicolae Popescu au arătat că orice categorie Grothendieck este echivalentă cu o categorie cât a unei categorii de module.

Mai precis dacă:

- $\mathcal{A}$ este o categorie Grothendieck cu un generator G
- $R = End_{\mathcal{A}}(G)$ este inelul endomorfismelor lui G
- $Mod(R)$ este categoria R-modulelor unitare drepte

atunci functorul $T : \mathcal{A} \to Mod(R)$ definit prin:

- $T(X) = Hom_{\mathcal{A}}(G, X)$, unde $X \in \mathcal{A}$
- $T(f) = Hom_{\mathcal{A}}(G, f) : T(X) \to T(Y)$ pe morfismele $f : X \to Y$ în $\mathcal{A}$

este deplin fidel şi are un adjunct exact stâng S.

Ulterior aceasta demonstraţie a fost revizuită de mai mulţi autori; cele mai elegante şi scurte demonstraţii în ordine cronologică fiind cele ale lui Takeuchi, Ulmer si Mitchell.

Scopul nostru în acest capitol este acela de a generaliza lema lui Mitchell iniţiala de la categoria de module la categoria de functori şi de a arata cum o putem utiliza pentru a obţine mai uşor o generalizare a teoremei lui Ulmer despre exactitatea lui S, o generalizare a teoremei Gabriel-Popescu şi o generalizare a lemei Takeuchi.

Vom folosi următoarele notaţii:

- $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck
- $\mathcal{U}$ o mulţime de obiecte ale lui $\mathcal{A}$ $Gen(\mathcal{U}) = \{A \in \mathcal{A} | (\exists) f : \bigoplus_{U_i \in \mathcal{U}} U_i \to A \to 0\}$ o subcategorie plină, preabeliană a lui $\mathcal{A}$ (are nuclee si conuclee)
- $\mathcal{A}_{\mathcal{U}} = \{M \in \mathcal{A} | (\forall)$ morfism $f : \bigoplus_{U \in F} U \to M \in \mathcal{A}$ cu F o submulţime finită a lui $\mathcal{U}$, $Ker(f) \in Gen(\mathcal{U})\}$

Fie $(\mathcal{U}^{op}, Ab)$ categoria definită în modul următor:

- obiecte: functorii aditivi contravarianţi de la $\mathcal{U}$ la categoria Ab a grupurilor abeliene
- morfisme: transformările naturale dintre astfel de functori

$(\mathcal{U}^{op}, Ab)$ este o categorie Grothendieck care are functorii contravarianţi reprezentabili $(h_U)_{U \in \mathcal{U}}$, unde $h_U = Hom_{\mathcal{A}}(-, U)$ formează o familie de generatori de obiecte proiective pentru $(\mathcal{U}^{op}, Ab)$.

Considerăm functorul $T : \mathcal{A} \to (\mathcal{U}^{op}, Ab)$ definit prin:

- $T(X) = Hom_{\mathcal{A}}(-, X)|\mathcal{U}$ pe obiectele $X \in \mathcal{A}$
- $T(f) = Hom_{\mathcal{A}}(-, f)|\mathcal{U} : T(X) \to T(Y)$ pe morfismele $f : X \to Y$ din $\mathcal{A}$

Se ştie deja ca T are un adjunct stâng $S : (\mathcal{U}^{op}, Ab) \to \mathcal{A}$. În particular avem că $S(h_U) = U$ pentru $(\forall) U \in \mathcal{U}$.

Lema 1. *(Generalizarea teoremei lui Mitchell) Considerăm:*

- *$\mathcal{U}$ o mulţime de obiecte ale lui $\mathcal{A}$*
- *A, B obiecte din $\mathcal{A}$ cu $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}}$*

- *M_A un subobiect al lui $T(A)$*
- *$G : M_A \to T(B)$ un morfism în $(\mathcal{U}^{op}, Ab)$*

Vom considera urmatoarele notaţii:

- *$M = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} M_A(U)$*
- *$(\forall) m \in M$ luam $U_m = U \in \mathcal{U}$ pentru care $m \in M_A(U)$*
- *$(\forall) m \in M$, $u_m : U_m \to \bigoplus_{m \in M} U_m$ este injecţia canonică*
- *$\psi : \bigoplus_{m \in M} U_m \to A$ este unicul morfism cu $\psi u_m = m$ pentru $(\forall) m \in M$*
- *$\phi : \bigoplus_{m \in M} U_m \to B$ este unicul morfism cu $\phi u_m = G_U(m)$ pentru $(\forall) m \in M_A(U)$*

Atunci ϕ se factorizează prin $Im(\psi)$.

Avem trei aplicaţii importante, care rezulta direct din Lema lui Mitchell.

Teoremă 2. *(Teorema Ulmer) Functorul $S : (\mathcal{U}^{op}, Ab) \to \mathcal{A}$ este exact dacă şi numai dacă $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{U}}$.*

Teoremă 3. *(Gabriel-Popescu generalizată) Presupunem că $\mathcal{U}$ este o familie de generatori ai lui $\mathcal{A}$. Atunci $T : \mathcal{A} \to (\mathcal{U}^{op}, Ab)$ este un functor deplin fidel al cărui adjunct stâng $S : (\mathcal{U}^{op}, Ab) \to \mathcal{A}$ este exact.*

Corolar 4. *(Lema lui Takeuchi generalizată) Fie A un obiect a lui $\mathcal{A}$, Y_A un subobiect a lui $T(A)$ şi fie $i : Y_A \to T(A)$ morfismul incluziune.*

(i) Dac˘a $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ atunci $S(i)$ este un monomorfism.

(ii) Dacă $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}} \bigcap Gen(\mathcal{U})$, atunci morfismul canonic $\nu_A : ST(A) \to A$ este un izomorfism.

Categorii Grothendieck local stabile

Considerăm:

- $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck
- $\mathcal{C}$ o subcategorie localizantă a lui $\mathcal{A}$
- $t_{\mathcal{C}} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ functorul torsiune

- $T_{\mathcal{C}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ functorul canonic
- $S_{\mathcal{C}} : \mathcal{A}/\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ adjunctul la dreapta al functorului $T_{\mathcal{C}}$.

$$Sp(\mathcal{A}) = \{I \in \mathcal{A} | I \ indecompozabil \ injectiv\}$$

Oricărui obiect injectiv indecompozabil al $Sp(\mathcal{A})$ îi putem asocia subcategoria localizantă:

$$\mathcal{A}_I = \{M \in \mathcal{A} | Hom_{\mathcal{A}}(M, I) = 0\}$$

Definiţie 5. *Un subobiect A al unui obiect $B \in \mathcal{A}$ este ireductibil în B dacă acesta nu poate fi scris ca intersecţia a doua subobiecte strict mai mari ale lui B, sau dacă $A = M \bigcap N$, unde M si N sunt subobiecte ale lui B, atunci $A = M$ sau $B = N$.*

Propoziţie 6. *$\mathcal{A}_I$ este un element ireductibil în $Tors(\mathcal{A})$, unde $Tors(\mathcal{A})$ este mulţimea subcategoriilor localizante.*

Definiţie 7. *(subcategorie stabila) Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck. O subcategorie localizantă $\mathcal{C}$ a lui $\mathcal{A}$ este stabilă dacă există o submulţime Λ a $Sp(\mathcal{A})$ astfel încat*

$$\mathcal{C} = \bigcap_{I \in \Lambda} \mathcal{A}_I$$

În acest caz noi scriem $\mathcal{C}_\Lambda = \mathcal{C}$. Dacă fiecare subcategorie localizantă $\mathcal{C}$ a lui $\mathcal{A}$ este stabilă, atunci categoria $\mathcal{A}$ se numeşte local stabila. Dacă $\mathcal{A} = R - Mod$ este o categorie local stabilă, atunci R este un inel stâng local stabil.

O categorie Grothendieck $\mathcal{A}$ se numeşte **local coireductibila** dacă orice obiect diferit de zero conţine un subobiect coireductibil diferit de zero. Acest lucru este echivalent cu a spune că orice obiect injectiv a lui $\mathcal{A}$ este acoperirea injectivă a unei sume directe de obiecte injective indecompozabile. $\mathcal{A}$ se numeşte **atomică** dacă are două subcategorii localizante şi anume $\{0\}$ şi $\mathcal{A}$. Spunem că $\mathcal{A}$ are **dimensiune Gabriel** dacă orice obiect a lui $\mathcal{A}$ are dimensiune Gabriel (dimensiunea Krull in sensul lui Gabriel).

Utilizând aceste definiţii vom da nişte exemple de categorii Grothendieck local stabile.

Propoziţie 8. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck care verifică una dintre următoarele condiţii:*

- *(i) $\mathcal{A}$ este local coireductibilă*
- *(ii) $\mathcal{A}$ are dimensiune Gabriel*
- *(iii) $\mathcal{A}$ este atomică cu spectrul $Sp(\mathcal{A}) \neq \varnothing$*

Atunci $\mathcal{A}$ este o categorie local stabilă.

Rezultatul principial al acestei secţiuni dă o conexiune între stabilitatea categoriei Grothendieck $\mathcal{A}$ şi stabilitatea subcategoriei $\mathcal{C}$ şi categoriei cât $\mathcal{A}/\mathcal{C}$.

Teoremă 9. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck şi fie $\mathcal{C}$ o subcategorie localizantă a lui $\mathcal{A}$. Atunci $\mathcal{A}$ este local stabilă dacă şi numai dacă $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ sunt local stabile.*

În următoarele secţiuni ale acestui capitol vom considera nişte cazuri particulare de categorii Grothendieck.

Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck local finit generată. Categoria $\mathcal{A}$ este o **V-categorie** dacă orice obiect simplu este injectiv. Teorema principala a acestei secţiuni afirmă că anumite subcategorii localizante ale unei V-categorii sunt stabile. O subcategorie localizantă $\mathcal{C}$ a lui $\mathcal{A}$ este de clasă TTF dacă $\mathcal{C}$ este închisa la produse directe arbitrare.

Fie C o coalgebră peste un corp k. Notăm prin $\mathcal{M}^C$ categoria k-liniară a tuturor C-comodulelor drepte. Bifunctorul Hom în această categorie va fi notat prin $Com_{\mathcal{C}}(-,-)$. Oricărei subcategorii localizante $\mathcal{T}$ a lui $\mathcal{M}^C$ îi putem asocia categoria cât $\mathcal{M}^C/\mathcal{T}$, care este o categorie k-abeliană determinată până la echivalenţa de un functor exact $T : \mathbf{M}^C \to \mathcal{M}^C/\mathcal{T}$. Oricărui C-comodul drept simplu S îi putem asocia anvelopa sa injectivă $E(S)$, care este un obiect injectiv indecompozabil în $\mathcal{M}^C$.

Vom nota prin:

$$\mathcal{T}_{E(S)} = \{M \in \mathcal{M}^C | Com_C(M, E(S)) = 0\}$$

Vom enunţa teorema principală:

Teoremă 10. *Fie $\{S_i | i \in I\}$ un set complet de reprezentanţi a tipurilor de C-comodule simple pâna la un izomorfism. Dacă $\mathcal{T}$ este o subcategorie localizantă a lui $\mathcal{M}^C$, atunci $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in J \subseteq I} \mathcal{T}_{E(S_i)}$, unde $J = \{i \in I | S_i \notin \mathcal{T}\}$. Mai mult de atât, această intersecţie este ireductibilă.*

Algebre Frobenius si algebre simetrice în categorii monoidale

Vom lucra peste un corp k. O algebră finit dimensionala A este Frobenius dacă $A \simeq A^*$ ca A-module stângi(sau echivalent ca A-module drepte). Acesta este un concept important pentru: teoria reprezentărilor, teoria algebrelor Hopf, teoria grupurilor cuantice, teoria topologică a câmpurilor cuantice şi altele.

O caracterizare echivalentă pentru noţiunea de algebră Frobenius a fost dată de către Abrams care a demonstrat că o algebră A este Frobenius $\Leftrightarrow$ există o structură de coalgebră $(A, \delta_A, \varepsilon_A)$ pe spaţiul vectorial A astfel încat comultiplicarea δ_A este un morfism de (A, A)-bimodule. Această definiţie echivalentă a unei algebre Frobenius are sens în orice categorie monoidala, lucru care a permis introducerea conceptului de algebră Frobenius într-o categorie monoidală. Studiul algebrelor Frobenius în categorii monoidale a fost iniţiat de către M. Muger(2003), R. Street(2004) si S. Yamagami(2004). Acesta este un concept important care apare în teoria echivalenţelor Morita a categoriilor tensoriale, în teoria cuantică a câmpurilor conforme şi în altele.

O clasă specială de algebre Frobenius constă din algebrele simetrice. O algebră simetrică este o algebră finit dimensională A astfel încat $A \simeq A^*$ ca (A, A)-bimodule. Algebrele simetrice apar în teoria topologică a câmpului cuantic şi pentru teoria blocurilor algebrelor grupale.

Fie H o algebră Hopf, şi A o algebră finit dimensională în $\mathcal{M}^H$, care este o H-comodul algebră la dreapta. Daca $A \in_A \mathcal{M}^H$ atunci rezultă că dualul său $A^* \in \mathcal{M}_A^H$. De asemenea dacă $A \in \mathcal{M}_A^H$ nu rezultă neapărat că $A^* \in_A \mathcal{M}^H$, dar rezultă că $A^* \in_{A^{(S^2)}} \mathcal{M}^H$, unde $A^{(S^2)}$ este doar A ca algebră şi are H-coacţiunea la dreapta dată de $a \mapsto \sum a_0 \otimes S^2(a_1)$. H-coacţiunea la dreapta a lui A este dată de $\sum a_0 \otimes a_1$. Acum vom da definiţia conceptului de H-Frobenius la stânga, respectiv H-Frobenius la dreapta.

Definiţie 11. *O H-comodul algebra dreaptă finit dimensională A se numeşte*

- *H-Frobenius la stânga dacă $A^{(S^2)} \simeq A^*$ in ${}_{A^{(S^2)}}\mathcal{M}^H$*
- *H-Frobenius la dreapta dacă $A \simeq A^*$ în $\mathcal{M}_A^H$*

Urmatoarea teoremă caracterizează propietatea de a fi H-Frobenius la stânga. Primele patru condiţii echivalente sunt în spiritul celor clasice pentru algebre Frobenius, luând în considerare însa şi H-coacţiunea. Ultima condiţie arată că conexiunea cu conceptul de algebră Frobenius în categoria coreprezentărilor lui H.

Teoremă 12. *Fie A of H-comodul algebră finit dimensională. Urmatoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *A este H-Frobenius la dreapta*

2. *Exista o forma nedegenerată, asociativă şi biliniară $B : A \otimes A \to k$ cu propietatea că $B(b, (h^*S^2) \cdot a) = B((h^*S) \cdot b, a)$ pentru orice a,$b \in A$ şi pentru orice $h^* \in H^*$*

3. *A are un hiperplan $\mathcal{H}$ care nu conţine ideale stângi diferite de zero ale lui A, şi $(h^*S^2) \cdot A \subseteq \mathcal{H}$ pentru orice $h^* \in H^*$ cu $h^*(1) = 0$*

4. *A are un hiperplan $\mathcal{H}$ care nu conţine nici un subobiect diferit de zero a lui $A^{(S^2)}$ în ${}_{A^{(S^2)}}\mathcal{M}^H$, şi $(h^*S^2) \cdot A \subseteq \mathcal{H}$ pentru orice $h^* \in H^*$ cu $h^*(1) = 0$*

5. *$A^{(S^2)}$ este o algebră Frobenius în categoria monoidala $\mathcal{M}^H$*

Avem o teoremă similară pentru noţiunea de H-Frobenius la stânga. De asemenea există o conexiune între conceptul de H-Frobenius la stânga şi conceptul de H-Frobenius la dreapta. Conexiunea este dată de urmatoarea teoremă:

Teoremă 13. *Fie H o algebra Hopf, şi A o H-comodul algebră finit dimensională. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1. *Daca A este H-Frobenius la dreapta, atunci A este H-Frobenius la stânga.*

2. *Dacă antipodul S este injectiv şi A este H-Frobenius la stânga, atunci A este de asemenea H-Frobenius la dreapta.*

În continuare vom particulariza algebra Hopf H la kG, unde G este un grup arbitrar. În acest caz $\mathcal{M}^{kG}$ va fi categoria monoidală a spaţiilor vectoriale G-graduate, şi o algebra în această categorie va fi o algebră G-graduată.

Propoziţie 14. *Fie A o algebră G-graduată finit dimensională, şi fie $\sigma \in G$. Urmatoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *$A(\sigma) \simeq A^*$ în A-gr*

2. *$(\sigma)A \simeq A^*$ în gr-A*

Utilizând echivalenţa de mai sus vom putea da definiţia algebrei Frobenius σ-graduate. Prin urmare spunem că o algebră finit dimensională G-graduată este σ-graduată Frobenius dacă satisface una din condiţiile echivalente din propoziţia de mai sus. În mod clar, Frobenius e-graduat înseamna de fapt Frobenius graduat.

Studiem propietaţi de bază a algebrelor Frobenius σ-graduate şi dăm o serie de caracterizări pentru ele. Unul dintre pricipalele rezultate este:

Teoremă 15. *Fie $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ o algebră G-graduată finit dimensională, şi fie $\sigma \in G$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *A este σ-graduată Frobenius*
2. *$A_\sigma \simeq A_e^*$ ca A_e-module stângi, şi A este σ-fidel la stânga*
3. *$A_\sigma \simeq A_e^*$ ca A_e-module drepte, şi A este σ-fidel la dreapta*

În particular această teoremă dă structura algebrelor Frobenius în categoria spaţiilor vectoriale graduate.

Între algebrele Frobenius există anumite obiecte cu mai multă simetrie: algebrele simetric graduate, care sunt doar algebrele simetrice în categoria sovereign a spaţiilor vectoriale graduate. Spunem că o algebră graduată finit dimensională A este simetric graduată dacă A şi A^* sunt izomorfe ca A la stânga, A la dreapta bimodule graduate. În continuare dăm o teoremă care caracterizează propietatea de a fi simetric graduată.

Teoremă 16. *Fie $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ o algebra G-graduata finit dimensionala. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *A este simetric graduată*
2. *Exista o formă biliniară, simetrică, asociativă si nedegenerată $B : A \times A \to k$ astfel încat $B(r_\tau, r_\mu) = 0$ pentru orice $r_\tau \in A_\tau$ si $r_\mu \in A_\mu$ cu $\tau\mu \neq e$*
3. *Există o aplicaţie liniară $\lambda : A \to k$ cu $\lambda(xy) = \lambda(yx)$ pentru orice x, $y \in A$, $Ker(\lambda)$ să nu conţina ideale stângi graduate diferite de zero, şi $\lambda(x_\sigma y_\tau) = 0$ pentru orice $x_\sigma \in A_\sigma$ şi $y_\tau \in A_\tau$ cu $\sigma\tau \neq e$*

Dintr-un exemplu al lui Eilenberg şi Nakayama este cunoscut faptul că orice algebră semisimplă este simetrică. Luând în considerare, ceea ce se întampla în categoria monoidală a spaţiilor vectoriale, este natural să ne punem întrebarea dacă o algebră finit dimensională graduată semisimplă este simetric graduată. Vom arăta că acesta este într-adevar cazul, atunci când caracteristica corpului nu divide dimensiunea lui A, în particular este întotdeauna adevărat în dimensiune 0. Utilizând structura algebrelor graduate semisimple, distingem o clasă de asemenea obiecte care este simetric graduată; în particular orice algebră graduată semisimplă finit dimensională este simetric graduată în caracteristică 0.

Într-una dintre secţiunile din acest capitol, vom discuta de asemenea conceptul de algebră Frobenius graduată în corelaţie cu functorii Frobenius. Este prezentată la început, o teorema deja cunoscută, care dă o conexiune între algebrele Frobenius şi functorii Frobenius, şi apoi demonstrăm o versiune graduată.

Teoremă 17. *A este graduat Frobenius dacă şi numai dacă functorul uituc $U : A - gr \to k - gr$ este un functor Frobenius.*

În final vom da o nouă demonstraţie a unui rezultat a lui Bergen utilizând functorii Frobenius, care afirmă faptul că dacă H este o algebra Hopf finit dimensională care acţioneaza pe o algebra finit dimensionala A, atunci produsul smash $A\#H$ este Frobenius dacă şi numai dacă A este Frobenius.

Algebrele Frobenius pot fi definite în orice categorie monoidală. Nu este clar cum se poate defini un concept de algebră simetrică într-o categorie monoidală arbitrară. Aratăm că aceasta este posibil în categoria H-comodulelor drepte, unde H este algebra Hopf cosovereign.

Definiţie 18. *(Algebre Hopf cosovereign): o algebră Hopf H cu un caracter u pe H (adică un element grupal al lui H^* sau, echivalent un morfism de algebre $u : H \to k$), astfel încât*

$$S^2(h) = \sum u^{-1}(h_1)u(h_3)h_2,\ \forall h \in H$$

*Vom spune că u este un **caracter sovereign** al lui H.*

Aplicaţia $f : A \to A^{(S^2)}$, $f(a) = u^{-1} \cdot a$ este un izomorfism de H-comodul algebre drepte, şi induce un izomorfism de categorii $F :_{A^{(S^2)}} \mathcal{M}^H \to_A \mathcal{M}^H$. Prin restricţie aceasta induce un izomorfism de categorii, (de asemenea notat prin F), $F :_{A^{(S^2)}} \mathcal{M}^H_A \to_A \mathcal{M}^H_A$. Acum dacă $A^* \in_{A^{(S^2)}} \mathcal{M}^H_A$ atunci $F(A^*) \in_A \mathcal{M}^H_A$. Utilizând observaţia de mai sus, putem defini algebrele simetrice în categoria $\mathcal{M}^H$ în raport cu u.

Definiţie 19. *Fie H o algebră Hopf cosovereign cu u un caracter sovereign. O H-comodul algebră finit dimensională A este o* ***algebră simetrică în categoria $\mathcal{M}^H$ relativ la*** *u dacă*

$$F(A^*) \simeq A \text{ în categoria } {}_A\mathcal{M}_A^H.$$

Vom spune simplu ca A este (H, u)-simetrică.

Ulterior vom da caracterizări explicite ale acestei propietaţi în $\mathcal{M}^H$ şi vom arăta că definiţia simetriei depinde de caracter. Prin urmare este posibil ca o algebră Hopf cosovereign H să aibă două caractere sovereign u şi v, astfel încât o H-comodul algebră dreaptă A să fie (H, u)-simetrică, dar să nu fie (H, v)-simetrică. De asemenea, utilizăm o versiune modificată a construcţiei extinderii triviale pentru a da exemple de algebre de coreprezentări (H, u)-simetrice.

Propoziţie 20. *Fie H o algebră Hopf cosovereign şi u caracterul sovereign, iar A o H-comodul algebră, şi $\varepsilon(A) = A \bigoplus F(A^*)$, cu structura sumei directe de H-comodul şi cu structura de algebră obţinută de la extinderea trivială a lui A şi a (A, A)-bimodulului $F(A^*)$. Atunci*

$$\varepsilon(A) = A \bigoplus F(A^*)$$

este o H-comodul algebră la dreapta care este (H, u)-simetrică.

În cazul în care H este involutivă, adică $S^2 = Id$, H este cosovereign dacă luăm $u = \varepsilon$, counitatea lui H, şi în acest caz este clar că o algebră (H, ε)-simetrică este de asemenea simetrică ca o k-algebră. Arătăm că în general H poate fi (H, u)-simetrică fără să fie simetrică ca o k-algebră.

Data o algebră finit dimensională A în categoria $\mathcal{M}^H$, unde H este o algebra Hopf finit dimensională, se poate construi produsul smash $A\#H^*$. Construcţiile de produse smash sunt relevanţa deoarece acestea descriu structura de algebră în procesul de bozonizare, care asociaza unei superalgebre Hopf o algebră Hopf. Am menţionat deja că A este Frobenius dacă şi numai dacă $A\#H^*$ este Frobenius. Pe de altă parte, aratăm printr-un exemplu că o asemenea conexiune bună nu are loc pentru propietatea de simetrie. Obiectivul nostru este acela de a studia conexiunile între A ca algebră Frobenius în $\mathcal{M}^H$ şi $A\#H^*$ algebră Frobenius în $\mathcal{M}^{H^*}$.Arătam că doar una dintre implicaţii are loc.

Teoremă 21. *Fie H o algebră Hopf finit dimensională şi A o H-comodul algebră finit dimensională. Dacă A este o algebră Frobenius în $\mathcal{M}^H$ atunci $A\#H^*$ este o algebră Frobenius în $\mathcal{M}^{H^*}$.*

Următorul nostru scop este acela de a stabili un transfer al propietaţii de simetrie intre A si $A\#H^*$.

Teoremă 22. *Fie H o algebră Hopf finit dimensioanală cu antipodul S. Fie H cosovereign via g, respectiv H^* cosovereign via α, unde g şi α sunt elemnetele grupale distinse ale lui H, respectiv H^*. Dacă A este o H-comodul algebră atunci,*

$$A \text{ este } (H,\alpha)\text{-simetrică} \Leftrightarrow A\#H^* \text{ este } (H^*,g)\text{-simetrică.}$$

Dacă A este o H-comodul algebră dreaptă care este Frobenius (respectiv simetrică) ca algebră, atunci este natural să ne punem întrebarea dacă această propietate se transferă la subalgebra coinvarianţilor. Arătăm că în general răspunsul este negativ, transferul având totuşi loc dacă punem condiţii suplimentare asupra lui H.

Capitolul 4: Graduări de grupuri pe algebre de polinoame

Fie k un corp şi $A = k[X_1, X_2, ..., X_n]$ o algebră de polinoame în n determinate. Fie G un grup abelian.

Studiem G-graduările lui A pentru care nedeterminatele sunt elemente omogene de grad netrivial. Numim aceste graduări, graduări bune. Rezultatul principal este următorul:

Teoremă 23. *Fie R un inel IBN, si fie $u, v : \{1, 2, .., n\} \to G - \{0\}$ funcţii, unde G este un grup abelian. Fie $\mathcal{A} = R[X_1, X_2, ..., X_n]$ un inel G-graduat astfel încat X_i este un element omogen de grad $u(i)$ pentru orice $1 \leq i \leq n$, şi elementele lui R să aibă gradul 0. Definim $\mathcal{B} = R[X_1, X_2, ..., X_n]$ în mod analog, dar cu G graduarea dată de v. Dacă există un izomorfism $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de inele G-graduate astfel încât $\phi(r) = r$ pentru orice $r \in R$, atunci există o permutare $\sigma \in S_n$ astfel încât $v = u\sigma$.*

Contribuţiile originale din teaza sunt conţinute în urmatoarele lucrări:

1. S. Crivei, C. Năstăsescu, L. Năstăsescu, A generalization of the Mitchell Lemma: The Ulmer Theorem and the Gabriel-Popescu Theorem revisited, J.Pure Appl Algebra **216**, (2012), 2126-2129

2. F. Castano-Iglesias, C. Năstăsescu and L. Năstăsescu, Locally stable Grothendieck categories: Applications, Appl. Categor. Struct. **21** (2013), 105-118

3. S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and L. Năstăsescu, Frobenius algebras of corepresentations and group graded vector spaces, J. Algebra **406** (2014), 226-250

4. S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and L. Năstăsescu, Are graded semisimple algebras symmetric?, preprint, arXiv:1504.04868

5. S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and L. Năstăsescu, Symmetric algebras in categories of corepresentations and smash products, Journal of Algebra **465** (2016), 62-80

6. S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and L. Năstăsescu, Group gradings on polynomial algebras, Communications in Algebra, **44** (2016), no.8, 3340-3348

De asemenea utilizam notaţii standard pe care le regăsim în urmatoarele cărţi: [18], [37], [38], [43], [49] and [53].

În decursul acestor trei ani de studiu şi cercetare am fost susţinuta parţial de Programul Sectorial Operaţional Dezvoltarea Resurselor Umane(SOP, HRD, finanţata de Fondul Social European şi de Guvernul Român sub contractul cu numărul POSDRU/159/1.5/S/137750 şi de grantul UEFISCDI PN-II-ID-PCE-2011-3-0635, cu numărul contractului 253/5.10.2011 dat de CNCSIS.

În final aş dori să-i mulţumesc conducătorului meu de doctorat pentru tot ajutorul si suportul oferit de a lungul acestei perioade, tatălui meu Constantin Năstăsescu pentru toate sfaturile folositoare pe care mi le a dat, si de asemenea lui Septimiu Crivei pentru sfaturile pe care mi le a dat în ceea ce priveşte primele două capitole.

Aş dori de asemenea să-i mulţumesc soţului meu Arghir Zărnescu pentru tot suportul lui, răbdarea lui şi dragostea lui de-a lungul ultimului an de doctorat.

BIBLIOGRAFIE

[1] L. Abrams, Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius algebras, J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), 569-587.

[2] L. Abrams, Modules, comodules, and cotensor products over Frobenius algebras, J. Algebra **219** (1999), 201-213.

[3] T. Albu, C. Năstăsescu, Relative finiteness in module theory, Marcel Dekker, 1984

[4] Yu. A. Bahturin, S. K. Sehgal, M. V. Zaicev, Group gradings on associative algebras, J. Algebra **241**(2001), 677-698.

[5] J. Bergen, A note on smash products over Frobenius algebras, Comm. Algebra **21** (1993), 4021-4024.

[6] J. Bichon, Cosovereign Hopf algebras, J. Pure Appl. Algebra **157** (2001), 121-133.

[7] W. Bruns, J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, Cambridge University Press, Cambridge

[8] D. Bulacu and B. Torecillas, On Frobenius and separable algebra extensions in monoidal categories. Applications to wreaths, J. Noncommut. Geom. **9** (2015), 707-774.

[9] S. Caenepeel, G. Militaru, S. Zhu, Frobenius and Separable Functors for Generalized Module Categories and Nonlinear Equations, Springer Lec. Notes in Math. **1787** (2002).

[10] F. Castano-Iglesias, P. Enache, C. Năstăsescu and B. Torecillas, Gabriel-Popescu type theorems and applications, Bull. Sci. Math. **128** (2004), 323-332

[11] F. Castano-Iglesias, C. Năstăsescu and L. Năstăsescu, Locally stable Grothendieck categories: Applications, Appl. Categor. Struct. **21** (2013), 105-118

[12] P.-J. Cahen, Torsion Theories and Commutative Algebras, Ph.D. Thesis, Queen's University,Kingston,1973

[13] S. Crivei, C. Năstăsescu, L. Năstăsescu, A generalization of the Mitchell Lemma: The Ulmer Theorem and the Gabriel-Popescu Theorem revisited, J.Pure Appl Algebra **216**, (2012), 2126-2129

[14] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and L. Năstăsescu, Frobenius algebras of corepresentations and group graded vector spaces, J. Algebra **406** (2014), 226-250.

[15] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and L. Năstăsescu, Are graded semisimple algebras symmetric?, preprint, arXiv:1504.04868.

[16] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and L. Năstăsescu, Symmetric algebras in categories of corepresentations and smash products, Journal of Algebra **465** (2016), 62-80

[17] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and L. Năstăsescu, Group gradings on polynomial algebras, Communications in Algebra, **44** (2016), no.8, 3340-3348

[18] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and Ş. Raianu, Hopf algebras: an introduction, Pure and Applied Math. **235** (2000), Marcel Dekker.

[19] L. Daus, C. Năstăsescu and F. Van Oystaeyen, V-categories. Applications to graded rings, Comm. Algebra **37** (2009), 3248-3258

[20] D.Eisenbud, Commutative algebra with a view toward algebraic geometry, Spinger Verlag, GTM **150**, (1995)

[21] P. Etingof and S. Gelaki, On finite dimensional semisimple and cosemisimple Hopf algebras in positive characteristic, Internat. Math. Res. Notices **16** (1998), 851-864.

[22] A. Freedman, R. N. Gupta and R. M. Guralnick, Shirshov's theorem and representations of semigroups, Pacific J. Math. **181** (1997), 159-176.

[23] P. Freyd, Abelian categories, Harper and Row, New York, 1964

[24] J. Fuchs, I. Runkel, and C. Schweigert, Conformal Correlation Functions, Frobenius Algebras and Triangulations, Nucl. Phys. B **624** (2002), 452-468.

[25] J. Fuchs and C. Stigner, On Frobenius algebras in rigid monoidal categories, Arab. J. Sci. Eng. Sect. C Theme Issues **33** (2008), no. 2, 175-191.

[26] J. Fuchs and C. Schweigert, Hopf algebras and finite tensor categories in conformal field theory, Rev. Un. Mat. Argentina **51** (2010), no. 2, 43-90.

[27] J. Fuchs, C. Schweigert and C. Stigner, Modular invariant Frobenius algebras from ribbon Hopf algebra automorphisms, J. Algebra **363** (2012), 29-72.

[28] P. Gabriel, Des categories abeliennes, Bull. Soc. Math. France **90**, (1962), 323-448

[29] P. Gabriel and N. Popescu, Caracterisation des categories abeliennes avec generateurs et limites inductives exactes, C.R.Acad.Sci.Paris bf 258 (1964), 4188-4190

[30] G. Garkusha, Grothendieck categories, Algebra i Analiz **13** (2001), 1-68 (Russian), Engl. trans. in St. Petersburg Math. J. **13** (2002), 149-200

[31] J. Gomez-Torrecillas, C. Năstăsescu and B. Torrecillas, Localization in coalgebras. Applications to finiteness conditions, J. Algebra Appl. **6**(2)(2007), 233-243

[32] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algebre homologique, I. Tohoku Math J. (2), **9**, (1957), 119-221

[33] M. Hochster, J.A. Eagon, Cohen-Maculay rings, invariant theory, and the generic perfection pf determinantal loci, Amer.J.Math. **93**: 1020-1058, (1971)

[34] P. Jędrzejewicz, Linear gradings of polynomial algebras, Cent. Eur. J. Math. 6, 13-24, (2008)

[35] L. Kadison, New examples of Frobenius extensions, University Lecture Series 14, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1999.

[36] I. Kaplansky, Commutative rings, Revised edition, Univ. of Chicago Press, (1974)

[37] T.Y. Lam, A first course in noncommutative rings, GTM **131**, Second Edition, Springer Verlag, 2001.

[38] T. Y. Lam, Lectures on modules and rings, GTM **189**, Springer Verlag, 1999.

[39] B.I.-P.Lin, Morita's theorem for coalgebras, Comm. Algebra **1**(4), (1974), 311-344

[40] W. Lowen, A generalization of the Gabriel-Popescu theorem, J. Pure Appl. Algebra **190** (2004), 197-211

[41] C. Menini, Gabriel-Popescu type theorems and graded modules, Perspectives in Ring Theory (Antwerp, 1987), Kluwer, Dordrecht, 1988,pp 239-251

[42] C. Menini and C. Năstăsescu, When are induction and coinduction functors isomorphic?, Bull. Belg. Math. Soc. **1** (1994), 521-558.

[43] B. Mitchell, Theory of categories, Academic Press, New York, (1965)

[44] B. Mitchell, A quick proof of Gabriel-Popesco theorem, J.Pure Appl.Algebra **20**, 1981, 313-315

[45] M. Müger, From subfactors to categories and topology I. Frobenius algebras in and Morita equivalence of tensor categories, J. Pure Appl. Alg. **180** (2003), 81-157.

[46] M. Müger, Tensor categories: a selective guided tour, Rev. Un. Mat. Argentina **51** (2010), no. 1, 95-163.

[47] S. Montgomery, Hopf algebras and their actions on rings, CBMS Regional Conf. Series in Math. No. 82, A. M. S., Providence, RI, 1993.

[48] C. Năstăsescu, Teorie della torsione, Quaderni dei Gruppi di Ricerca del Consiglio Nazionale della Ricerche, Instituto Matematico dell'Universita di Ferrara, 1974

[49] C. Năstaăsescu, Rings. Modules. Categories(Romanian), Ed. Academiei, Bucharest (1976)

[50] C. Năstaăsescu and C. Chites, A version of the Gabriel-Popescu theorem, An. St.Univ.Ovidius Constanta **18** (2010),189-200

[51] C. Năstaăsescu and N. Popescu, Sur la structure des objects des certaines categories abeliennes, C.R.Math.Acad.Sci.Paris, Ser A-B **262** (1966), 1295-1297

[52] C. Năstaăsescu and F. van Oystaeyen, Dimensions of ring theory, Reidel, (1987)

[53] C. Năstăsescu and F. van Oystaeyen, Methods of graded rings, Lecture Notes in Math., vol. 1836 (2004), Springer Verlag.

[54] C. Năstăsescu and B. Torrecillas, Atomical Grothendieck categories, Int.J.Math.Sci. **71** (2003), 4501-4509

[55] A. Nowicki, J.M. Strelcyn, Generators of rings of constants for some diagonal derivations in polynomial rings, J.Pure Appl.Algebra, **101**, (1995), 207-212

[56] U. Oberst and H.-J. Schneider, Über Untergruppen endlicher algebraischer Gruppen, Manuscripta Math. **8** (1973), 217-241.

[57] B. Pareigis, When Hopf algebras are Frobenius algebras, J. Algebra **18** (1971), 588-596.

[58] N.Popescu, Abelian categories with applications to rings and modules, Academic Press (1973)

[59] M. Prest, Elementary torsion theories and locally finitely presented categories, J. Pure Appl. Algebra **18** (1980), 205-212

[60] D. E. Radford, Hopf algebras. Series on Knots and Everything, 49. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012.

[61] A. Skowroński, K. Yamagata, Frobenius algebras I. Basic representation theory, EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011.

[62] B. Stensrom, Rings of quotients, Grundlehren der Math. **217**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, (1975)

[63] R. Street, Frobenius Monads and Pseudomonoids, J. Math. Phys. **45** (2004), 3930-3948.

[64] M.E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, New York, 1969

[65] M.Takeuchi, A simple proof of Gabriel-Popesco's theorem, J. Algebra **18** (1971), 112-113

[66] M. Takeuchi, Morita theorems for categories of comodules, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo **24**, (1977), 629-644

[67] F. Ulmer, A flatness criterion in Grothendieck categories, Invent. Math. **19**, (1973), 331-336

[68] S. Yamagami, Frobenius algebras in tensor categories ans bimodule extensions, Janelidze, George (ed.) et al., Galois theory, Hopf algebras, and semiabelian categories. Papers from the workshop on categorical structures for descent and Galois theory, Hopf algebras, and semiabelian categories, Toronto, ON, Canada, September 23-28, 2002. Fields Institute Communications 43, 551-570 (2004).