

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
ȘCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ

TEZĂ DE DOCTORAT

Propagări de unde în cristale piezoelectrice

REZUMAT

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC :Prof.dr. SANDA CLEJA-ȚIGOIU

DOCTORAND : HARABAGIU LIVIA-MARINA

- 2015 -

Cuprins

| | |
|---|----|
| Notății | 3 |
| Introducere | 5 |
| 1. Problema propagării undelor plane neomogene în cristale piezoelectrice supuse câmpurilor electromecanice inițiale | 7 |
| 1.1. Problema incrementală pentru cristalul piezoelectric cu date inițiale și la limită..... | 7 |
| 1.2. Propagarea undelor plane neomogene în cristale piezoelectrice..... | 10 |
| 2. Propagarea undelor plane neomogene în cristale monoclinice supuse câmpurilor electromecanice inițiale | 12 |
| 2.1. Propagarea undelor plane neomogene în cristale monoclinice | 12 |
| 2.1.1. Axa diadică directă..... | 12 |
| 2.1.2. Axa diadică inversă (planul oglindă)..... | 16 |
| 2.2. Concluzii..... | 20 |
| 3. Propagarea undelor plane neomogene în cristale cu simetrie cubică supuse câmpurilor electromecanice inițiale | 22 |
| 3.1. Decuplarea problemei matematice în cazul cristalului cu simetrie cubică..... | 22 |
| 3.2. Propagarea unei unde plane neomogene P_2^0 în cristale cu simetrie cubică supuse câmpurilor electromecanice inițiale..... | 26 |
| 3.3. Exemple numerice care evidențiază influența câmpurilor de tensiune mecanică inițiale..... | 26 |
| 4. Propagarea undelor plane neomogene în solide izotrope supuse câmpurilor inițiale | 28 |
| 4.1. Decuplarea problemei matematice asociate undelor plane neomogene în cazul cristalului izotrop..... | 28 |
| 4.1.1. Unde longitudinale | 30 |
| 4.1.2. Unde transversale..... | 30 |
| Concluzii finale | 33 |
| Bibliografie | 34 |

Notății

\mathbb{R} mulțimea numerelor reale;

\mathbb{R}_+ mulțimea numerelor reale pozitive;

\mathbb{R}^n spațiul Euclidian n dimensional;

\mathbb{C} mulțimea numerelor complexe;

V_3 spațiul vectorial tridimensional cu baza ortonormată $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ cu originea în O ;

$\Lambda^2 \mathbb{R}^3$ spațiul bivectorial tridimensional (spațiul vectorilor complecși tridimensionali);

$\bar{A} \in \Lambda^2 \mathbb{R}^3$ dacă $(\exists) \vec{a}, \vec{b} \in V_3$ a.î. $\bar{A} = \vec{a} + i\vec{b}$, unde $i = \sqrt{-1}$, \bar{A} se numește bivector;

L_n spațiul tensorilor de ordin n ;

τ tensor simetric de ordinul doi ;

$Sim = \left\{ \tau \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \tau^T = \tau, \tau_{ij} \in L_2(V_3) \right\}$ spațiul tensorilor simetrici ;

V_R domeniul geometric ocupat de corp la momentul de referință inițial;

$\overset{\circ}{V}$ domeniul geometric ocupat de corp la momentul inițial;

V_t domeniul geometric ocupat de corp la momentul actual (curent);

B_R configurație de referință inițială;

$\overset{\circ}{B}$ configurație deformată inițială;

B_t configurație prezentă;

$\partial \overset{\circ}{V}$ frontiera domeniului $\overset{\circ}{V}$;

$\partial \overset{\circ}{V} = \partial \overset{\circ}{V}_1 \cup \partial \overset{\circ}{V}_2 \cup \partial \overset{\circ}{V}_3 \cup \partial \overset{\circ}{V}_4$, unde $\partial \overset{\circ}{V}_1, \partial \overset{\circ}{V}_2, \partial \overset{\circ}{V}_3, \partial \overset{\circ}{V}_4$ reprezintă părți ale frontierei

$\partial \overset{\circ}{V}; \bar{\overset{\circ}{V}}$ închiderea domeniului $\overset{\circ}{V}$;

$I = [0, T] \subseteq \mathbb{R}_+$ intervalul de timp ;

$\vec{u} : \overset{\circ}{V} \times I \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^3$ bivectorul deplasării ;

$\vec{u}(\bullet, t) : \overset{\circ}{V} \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^3$ bivectorul de deplasare la momentul t;

$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ derivata temporală a bivectorului deplasare;

$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ derivata parțială a componentei i a vectorului \vec{u} în raport cu \vec{x}_j ;

$\varphi: \mathcal{V} \times I \rightarrow \mathbb{C}$ potențialul electric incremental;

$\overset{\circ}{\Omega}: L_2 \rightarrow Sim$ este aplicație liniară, numită tensorul instantaneu al constantelor elastice;

$\overset{\circ}{\Lambda}: V \rightarrow L_2$ este aplicație liniară, care definește tensorul instantaneu al constantelor de cuplaj;

$\overset{\circ}{\varepsilon} \in L_2$ tensorul instantaneu al constantelor dielectrice;

$\overset{\circ}{\rho}$ densitatea volumică de masă;

Σ tensorul tensiune electromecanică incrementală;

$\vec{\Delta}$ vectorul deplasare electrică incrementală;

\vec{e} vectorul câmp electric incremental;

\vec{n} vectorul unitar normal exterior la $\partial \overset{\circ}{V}$;

c tensorul constantelor elastice în configurația B_R , de componente c_{klmn} ;

e tensorul constantelor piezoelectrice în configurația B_R , de componente e_{klm} ;

\vec{E} vectorul câmp electric inițial în configurația $\overset{\circ}{B}$;

$\overset{\circ}{S}$ tensorul inițial de tensiune mecanică (Cauchy) în configurația $\overset{\circ}{B}$;

w densitatea superficială de sarcină electrică;

\vec{t}_n vectorul tensiune Piola;

$\vec{a} \in \Lambda^2 \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = \vec{a}^+ + i\vec{a}^-$ bivectorul amplitudine mecanică;

$\vec{s} \in \Lambda^2 \mathbb{R}^3$, $\vec{s} = \vec{s}^+ + i\vec{s}^-$ bivectorul încetinire;

$\vec{s} = N\vec{C}$, $N \in \mathbb{C}$, $\vec{C} \in \Lambda^2 \mathbb{R}^3$ bivector direcțional, de componente C_i , $i = \overline{1,3}$;

$\omega \in \mathbb{R}$ frecvența undei; $\Phi \in \mathbb{C}$ amplitudinea electrică a undei;

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ perioada de fază; $v = \frac{1}{\left| \frac{\vec{s}^+}{s} \right|}$ viteza de fază; $\left| \frac{\vec{s}^-}{s} \right|$ coeficientul de atenuare.

Introducere

În ultimii ani, mulți autori au acordat atenție dinamicii materialelor electroelastice, care sunt supuse câmpurilor electrice și mecanice inițiale, datorită aplicațiilor multiple în cercetarea biomedicală, microelectronică, nanotehnologie, ingineria electromecanică. O importanță deosebită a fost acordată propagării ultrasunetelor. Ultrasunetele se obțin cu ajutorul anumitor cristale, numite *piezoelectrice (piezocristale)*, care manifestă fenomenul de *electrostricțiune*, adică de contracție sau dilatare sub acțiunea unui câmp electric alternativ. Efectul de electrostricțiune poate apărea în toate sistemele cristalografice.

Bazele teoriei corpurilor piezoelectrice supuse câmpurilor electromagnetice și mecanice inițiale au fost descrise de Eringen și Maugin în monografia [7]. Contribuții importante legate de descrierea comportamentului incremental al unui corp piezoelectric au fost aduse de Băeșu, Fortuné și Soós în [3], de Royer și Dieulesaint în [13], de Simionescu-Panait în [14] și de Ana în lucrarea [1].

Teza de doctorat " Propagări de unde în cristale piezoelectrice" are drept scop studierea comportamentului incremental al solidelor piezoelectrice și analiza propagării undelor plane neomogene în spațiul piezoelectric supus câmpurilor electromecanice inițiale.

Rezultatele originale prezentate în capitolele 1, 2, 3, 4 din această teză au făcut obiectul următoarelor articole deja publicate:

Simionescu-Panait O., Harabagiu L., 2014, *Propagation of inhomogeneous plane waves in monoclinic crystals subject to initial fields*, Annals of the University Bucharest (mathematical series), vol.5 (LXIII), Nr.2, 367-381.

Harabagiu L., Simionescu-Panait O., *Propagation of inhomogeneous plane waves in isotropic solid crystals*, An. Șt. Univ. Ovidius, Constanța, vol. XXIII(3), 2015, 55-64.

Harabagiu L., *Inhomogeneous Plane Waves in Cubic Crystals subject to a Bias*, International Scientific Journal, Journal of Mathematics, vol.1, 2015, 1-11.

Lucrarea este structurată pe patru capitole, la care se adaugă șase anexe și bibliografia. În **primul capitol**, intitulat "*Problema propagării undelor plane neomogene în cristale piezoelectrice supuse câmpurilor electromecanice inițiale*", este descrisă problema dinamică în formulare incrementală omogenă cu date inițiale și pe frontieră pentru cristale piezoelectrice supuse câmpurilor electromecanice inițiale, ajuns din configurația naturală într-o configurație inițială de echilibru în urma unor încărcări statice finite și apoi unor deformări infinitezimale. Sistemul de ecuații cu derivate parțiale pentru necunoscutele vector deplasare incrementală și potențial electric incremental se deduc pe baza ecuațiilor de bilanț și a ecuațiilor de echilibru pentru câmpul electric, prin considerarea ecuațiilor constitutive liniarizate pentru cristalul piezoelectric, supus condițiilor inițiale. În Paragraful 1.2. se definesc undele plane neomogene prin conceptul de *bivector* și se formulează condiția de propagare a acestora. Pentru a determina soluții ale sistemului fundamental de ecuații cu derivate parțiale a fost utilizată **metoda elipsei direcționale**, introdusă de Hayes [10].

În **Capitolul doi**, "*Propagarea undelor plane neomogene în cristale monoclinice supuse câmpurilor electromecanice inițiale*", studiem problema propagării undelor plane

neomogene în ipoteza în care materialul din care e alcătuit cristalul piezoelectric face parte din clasa cristalografică monoclinică. Prin aplicarea metodei elipsei direcționale, în cazul simetriilor de tip monoclinic se obține o decuplare a undelor. În ipoteza că axa diadică directă(A_2) coincide cu axa Ox_3 , iar câmpul electric inițial este normal planului Ox_1x_2 se obține unda $\overset{\circ}{P}2$, care definește o undă mecanică, polarizată în planul Ox_1x_2 , depinde doar de câmpul inițial al tensiunilor mecanice și unda $\overset{\circ}{TH}$, care definește o undă electromecanică, polarizată după axa Ox_3 , deci transversal-orizontală, depinde de câmpurile inițiale electric și de tensiune mecanică, este influențată prin efect piezoelectric, respectiv prin efect electrostrictiv. În ipoteza că axa diadică inversă $\overset{\circ}{A}2$ coincide cu axa Ox_3 , iar câmpul electric inițial este în planul Ox_1x_2 se obține unda $\overset{\circ}{P}2$, care definește o undă electromecanică, polarizată în planul axa Ox_1x_2 , care depinde de câmpurile inițiale electric și de tensiune mecanică, este influențată prin efect piezoelectric, respectiv prin efect electrostrictiv și unda $\overset{\circ}{TH}$, care definește o undă mecanică, polarizată în planul Ox_3 , depinde numai de câmpul inițial al tensiunilor mecanice.

În Capitolul 3, "Propagarea undelor plane neomogene în cristale cu simetrie cubică supuse câmpurilor electromecanice inițiale" condiția de propagare a undelor plane neomogene în materiale piezoelectrice cu simetrie cubică supuse câmpurilor inițiale. În ipoteza alegerii bivectorilor direcționali izotropi se obțin propagări de unde longitudinale, iar în ipoteza alegerii bivectorilor direcționali anizotropi se obțin propagări de unde transversale.

În Capitolul 4, "Propagarea undelor plane neomogene în solide izotrope supuse câmpurilor electromecanice inițiale", are ca obiect problema matematică a propagării undelor neomogene plane în spațiul elastic izotrop supus câmpurilor electromecanice inițiale. În acest caz, deși efectul piezoelectric este absent, s-a descoperit faptul că, câmpurile inițiale influențează în mod semnificativ polarizarea undelor, prin efectul electrostrictiv.

În Anexa A, intitulată "Descrierea bivectorilor", este descrisă succint cadrul teoretic al algebrei bivectorilor așa cum este prezentat de Boulanger și Hayes în [5]. În Anexele B, C, D și E sunt determinate componentele tensorului electroacoustic Q pentru un cristal piezoelectric din clasa 2, respectiv clasa m a sistemului monoclinic, din sistemul cu simetrie cubică și din spațiul izotrop. În Anexa F, intitulată "Comportamentul incremental al cristalelor piezoelectrice supuse câmpurilor electromecanice inițiale", prezentăm problema matematică asociată comportamentului incremental al solidelor piezoelectrice supuse câmpurilor electromecanice inițiale. Suportul teoretic descris reprezintă o descriere succintă a rezultatelor obținute de Ana în [1].

În ultima parte, "Concluzii finale", se realizează o trecere în revistă a lucrurilor expuse în această teză de doctorat. Totodată, formulăm concluzii și prezentăm câteva direcții viitoare de cercetare în acest vast domeniu.

Studiul privind propagarea undelor plane neomogene în cristale piezoelectrice supuse câmpurilor inițiale a fost realizat sub conducerea și îndrumarea regretatului Prof. Dr. Olivian Simionescu-Panait.

Capitolul 1

Problema propagării undelor plane neomogene în cristale piezoelectrice supuse câmpurilor electromecanice inițiale

În acest capitol prezentăm rezultatele originale publicate în colaborare cu Prof.Dr. Simionescu-Panait, privind problema propagării undelor în cristale piezoelectrice. Cadrul constitutiv al solidelor piezoelectrice, pe baza căruia a fost realizată lucrarea Simionescu-Panait și Harabagiu [16], a fost descris în Simionescu-Panait [14] și a fost extins prin considerarea vectorului de deplasare mecanică incrementală și a potențialului electric incremental cu valori specifice în spațiul tridimensional al bivectorilor.

1.1. Problema incrementală pentru cristalul piezoelectric cu date inițiale și la limită

În modelarea constitutivă a solidelor piezoelectrice folosim cadrul general din Simionescu-Panait[14], prezentat în Anexa F și descris prin trei configurații:

- B_R configurația inițială de referință;
- $\overset{\circ}{B}$ configurația inițială deformată ;
- B_t configurație actuală (curentă).

Se utilizează modelul constitutiv al solidului piezoelectric:

- solidul piezoelectric are un comportament incremental liniar elastic, fiind supus unor câmpuri electromecanice inițiale statice neliniare;
- solidul piezoelectric are proprietăți elastice, reprezentate prin ecuațiile electrostatice ale lui Maxwell;
- solidul piezoelectric nu conduce căldura și nu are proprietăți magnetice.

În lucrarea Simionescu-Panait și Harabagiu [16], spre deosebire de lucrarea Simionescu-Panait [14], suntem în următoarele ipoteze:

- starea inițială electromecanică este omogenă;
- forțele masice incrementale și sarcina electrică incrementală care apar în ecuațiile de bilanț sunt neglijate.

Problema dinamică în formulare incrementală omogenă cu date inițiale și pe frontieră pentru cristale piezoelectrice supuse câmpurilor electromecanice inițiale

Fie date funcțiile $a, b: \overset{\circ}{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Să se determine deplasarea $\vec{u}: \overset{\circ}{\mathcal{V}} \times I \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^3$ și potențialul electric $\varphi: \overset{\circ}{\mathcal{V}} \times I \rightarrow \mathbb{C}$ care satisfac următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale:

- Ecuația de mișcare mecanică :

$$\overset{\circ}{\rho} \ddot{\vec{u}} = \text{div} \Sigma \quad \text{pe } \overset{\circ}{\mathcal{V}} \quad (1.1)$$

- Ecuația de echilibru pentru câmp electric :

$$\text{div } \vec{\Delta} = 0 \quad \text{pe } \overset{\circ}{\mathcal{V}} \quad (1.2)$$

împreună cu ecuațiile constitutive :

$$\Sigma = \overset{\circ}{\Omega} \nabla^T \vec{u} + \overset{\circ}{\Lambda} \nabla \varphi, \quad (1.3)$$

$$\vec{\Delta} = \overset{\circ}{\Lambda} \nabla \vec{u} - \overset{\circ}{\varepsilon} \nabla \varphi,$$

unde $\overset{\circ}{\Omega}: L_2 \rightarrow \text{Sim}$ liniară, $\overset{\circ}{\Lambda}: V \rightarrow L_2$ liniară, $\overset{\circ}{\varepsilon} \in L_2$,

la care se adaugă condițiile inițiale :

$$\vec{u}(\vec{x}, 0) = a(\vec{x}), \quad \dot{\vec{u}}(\vec{x}, 0) = b(\vec{x}), \quad (1.4)$$

și condițiile pe frontieră:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{n} &= \vec{t}_n \quad \text{pe } \partial \overset{\circ}{\mathcal{V}}, \\ \vec{\Delta} \cdot \vec{n} &= -w \quad \text{pe } \partial \overset{\circ}{\mathcal{V}}, \\ \vec{n} \times \vec{e} &= \vec{0} \quad \text{pe } \partial \overset{\circ}{\mathcal{V}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ecuațiile constitutive ale tensorului tensiunii electromecanice incrementale, respectiv ale vectorului deplasării electrice incrementale se reprezintă pe componente astfel:

$$\begin{aligned} \Sigma_{kl} &= \overset{\circ}{\Omega}_{klmn} u_{m,n} + \overset{\circ}{\Lambda}_{mkl} \varphi_{,m}, \\ \Delta_k &= \overset{\circ}{\Lambda}_{kmn} u_{n,m} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{kl} \varphi_{,l}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

unde $\overset{\circ}{\Omega}_{klmn}$ sunt componentele tensorului instantaneu de elasticitate în configurația $\overset{\circ}{B}$, $\overset{\circ}{\Lambda}_{kmn}$ sunt componentele tensorului instantaneu de cuplaj în configurația $\overset{\circ}{B}$ și $\overset{\circ}{\varepsilon}_{kl}$ sunt componentele tensorului dielectric instantaneu în configurația $\overset{\circ}{B}$. Coeficienții instantanei pot fi exprimați în funcție de constantele clasice ale materialului piezoelectric, precum și de câmpurile mecanice și electrice inițiale definite prin :

$$\overset{\circ}{\Omega}_{klmn} = \overset{\circ}{\Omega}_{nmkl} = c_{klmn} + \overset{\circ}{S}_{kn} \delta_{lm} - e_{kmn} \overset{\circ}{E}_l - e_{nkl} \overset{\circ}{E}_m - \eta_{kn} \overset{\circ}{E}_l \overset{\circ}{E}_m, \quad (1.7)$$

$$\overset{\circ}{\Lambda}_{mkl} = e_{mkl} + \eta_{mk} \overset{\circ}{E}_l, \quad (1.8)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{kl} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{lk} = \varepsilon_{kl} = \delta_{kl} + \eta_{kl} \quad (1.9)$$

unde c_{klmn} sunt componentele tensorului de elasticitate în configurația B_R , e_{kmn} sunt componentele tensorului piezoelectric în configurația B_R , ε_{kl} sunt componentele tensorului dielectric în configurația B_R , $\overset{\circ}{E}_i$ sunt componentele câmpului electric inițial în configurația B_R și $\overset{\circ}{S}_{kn}$ sunt componentele simetrice ale tensorului tensiune mecanică (Cauchy) inițială în configurația B_R .

Proprietățile de simetrie ale tensorilor definiți anterior sunt :

$$c_{klmn} = c_{lkmn} = c_{klnm} = c_{mnlk}, \quad (1.10)$$

$$\eta_{kl} = \eta_{lk}, \quad (1.11)$$

$$\overset{\circ}{\Omega}_{klmn} = \overset{\circ}{\Omega}_{nmkl}, \quad (1.12)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{kl} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{lk}. \quad (1.13)$$

În condițiile inițiale și pe frontieră precizate în problema dinamică enunțată mai sus, pentru vectorul de deplasare incrementală $\vec{u} : \overset{\circ}{V} \times I \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^3$ și potențialul electric incremental $\varphi : \overset{\circ}{V} \times I \rightarrow \mathbb{C}$ obținem:

Teorema 1.1.(Simionescu-Panait [26])

Sistemul fundamental de ecuații cu derivate parțiale pentru modelul constitutiv al solidelor piezoelectrice în mediu polarizat cu tensiuni inițiale este :

$$\overset{\circ}{\rho} \ddot{u}_l = \overset{\circ}{\Omega}_{klmn} u_{m,nk} + \overset{\circ}{\Lambda}_{mkl} \varphi_{,mk}, \quad (1.14)$$

$$\overset{\circ}{\Lambda}_{kmn} u_{m,nk} - \varepsilon_{kn} \varphi_{,nk} = 0, \quad m, n, l, \kappa = \overline{1,3}.$$

1.2. Propagarea undelor plane neomogene în cristale piezoelectrice

În Paragraful 1.2. este prezentată noțiunea de undă plană neomogenă. Noțiunea de undă plană neomogenă se bazează pe conceptul de *bivector* (sau de *vector complex*). Această noțiune a fost introdusă în 1853 de W.R.Hamilton [11], iar algebra bivectorilor a fost stabilită în 1881 de J.W. Gibbs [8], în 1966 de Synge [17] și, în 1984 de Hayes [10].

Rezultatele originale ale acestui paragraf (Teorema 1.3, Teorema 1.4.) au fost publicate în Simionescu-Panait și Harabagiu [16].

Notăm $\mathcal{V}_0 = \{\overline{OA} | A \in \mathcal{E}_3\}$ mulțimea vectorilor legați cu originea în punctul O.

Introducem ipoteza că deplasarea mecanică incrementală, respectiv potențialul electric incremental sunt definiți prin:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{a} \exp\left[i\omega(\vec{s} \cdot \vec{x} - t)\right], \quad \varphi(\vec{x}, t) = \Phi \exp\left[i\omega(\vec{s} \cdot \vec{x} - t)\right] \quad (1.15)$$

unde $\vec{a}, \vec{s} \in \Lambda^2 \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = \vec{a}^+ + i\vec{a}^-$, $\vec{a}^+, \vec{a}^- \in \mathcal{V}_0$ bivectorul amplitudine mecanică, $\vec{s} = \vec{s}^+ + i\vec{s}^-$, $\vec{s}^+, \vec{s}^- \in \mathcal{V}_0$ este bivectorul încetinire, ω reprezintă frecvența undei și este un parametru real,

$\Phi \in \mathbb{C}$ este amplitudinea electrică a undei.

Presupunem că acest tip de unde se propagă într-un mediu înfinit, ceea ce înseamnă că $\mathcal{V} \equiv \mathbb{R}^3$.

Definiția 1.1.

O soluție a problemei matematice (1.14) de forma (1.15) definește o **undă plană neomogenă** dacă vectorul \vec{s}^+ nu este paralel cu vectorul \vec{s}^- .

- Pentru a determina soluții pentru sistemul fundamental de ecuații cu derivate parțiale (1.14) folosind unde plane neomogene de forma (1.15), vom folosi "metoda elipsei direcționale"(DE), prezentate de Hayes [10], Boulanger și Hayes ([4], [5]), Boulanger, Hayes și Destrade [6].

Metoda "DE" constă în următoarele:

Se consideră elipsa asociată bivectorului \vec{s} . Fie elipsa similară elipsei asociate bivectorului \vec{s} și care are semiaxă mică de lungime vectorul unitar. Fie \vec{m} și \vec{n} doi versori reali, situați de-a lungul axei mari, respective axei mici a elipsei care are orientarea de la \vec{m} la \vec{n} , identică cu orientarea de la \vec{s}^+ la \vec{s}^- și $q \geq 1$.

Presupunând cunoscut

$$\vec{C} = q\vec{m} + i\vec{n} \in \Lambda^2\mathbb{R}^3, \text{ cu } \vec{m} \cdot \vec{n} = 0, \quad |\vec{m}| = |\vec{n}| = 1 \text{ și } q \geq 1, \quad (1.16)$$

să se determine $N \in \mathbb{C}, \Phi \in \mathbb{C}$ și bivectorul amplitudine \vec{a} care sunt soluții pentru ecuația mișcării (1.14), în ipotezele formulate (1.15) și (1.16).

N se numește *scalarul complex al încetirii*, iar \vec{C} se numește *bivector direcțional*.

$$\text{Introducem notația : } \Phi \equiv a_4. \quad (1.17)$$

Teorema 1.2.(Simionescu-Panait și Harabagiu[16])

Dacă deplasarea mecanică incrementală \vec{u} , respectiv potențialul electric incremental Φ sunt descrise prin formulele (1.15) atunci condiția de propagare a undelor plane neomogene în materiale piezoelectrice supuse câmpurilor electromecanice inițiale este caracterizată prin

sistemul :

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{1m} & \overset{\circ}{Q}_{14} \\ \overset{\circ}{Q}_{4m} & \overset{\circ}{Q}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m \\ a_4 \end{pmatrix} = 0, \quad 1, m = \overline{1, 3}, \quad (1.18)$$

unde Q are următoarele componente :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{1m} &= N^2 \overset{\circ}{\Omega}_{klmn} C_n C_k - \rho \delta_{lm}, \\ \overset{\circ}{Q}_{14} &= N^2 \overset{\circ}{\Lambda}_{mkl} C_m C_k, \\ \overset{\circ}{Q}_{4m} &= N^2 \overset{\circ}{\Lambda}_{klm} C_l C_k, \\ \overset{\circ}{Q}_{44} &= -N^2 \overset{\circ}{\epsilon}_{kn} C_n C_k. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Tensorul de ordin patru Q este numit *tensor electroacustic* și este definit prin matricea asociată sistemului (1.18).

Teorema 1.3.(Simionescu-Panait și Harabagiu[16])

Sistemul algebric linear (1.18) admite soluție nenulă (a_1, a_2, a_3, a_4) dacă și numai dacă N satisface următoarea ecuație algebrică :

$$\det \begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{1m} & \overset{\circ}{Q}_{14} \\ \overset{\circ}{Q}_{4m} & \overset{\circ}{Q}_{44} \end{pmatrix} = 0, \quad 1, m = \overline{1, 3}. \quad (1.20)$$

Relația (1.20) reprezintă **ecuația dispersiei**.

Capitolul 2

Propagarea undelor plane neomogene în cristale monoclinice supuse câmpurilor electromecanice inițiale

Rezultatele originale, prezentate în Capitolul 2 au fost obținute în articolul Simionescu-Panait și Harabagiu [16]. Spre deosebire de Capitolul 1, modelul constitutiv este formulat în următoarele ipoteze auxiliare:

- materialul din care e alcătuit cristalul piezoelectric corespunde clasei monoclinice. Ecuțiile (1.18) cu (1.19) în care introducem tensorul instantaneu al constantelor elastice $\overset{\circ}{\Omega}$, respectiv tensorul instantaneu al constantelor de cuplaj $\overset{\circ}{\Lambda}$ corespund materialului cu simetrie monoclinică. (2.1)

- există o direcție de simetrie materială dată de axa de ordinul doi diadică directă A_2 , sau de axă de simetrie, diadică inversă $\overline{A_2}$. Considerăm drept axă diadică A_2 pe axa Ox_3 . (2.2)

- alegem cazuri particulare ale bivectorului direcțional \overline{C} :

- bivector direcțional izotrop a.î. $\overline{C} \cdot \overline{C} = 0$; (2.3)
- bivector direcțional anizotrop a.î. $\overline{C} \cdot \overline{C} \neq 0$.

- pentru câmpul electric inițial $\overset{\circ}{E}$ presupunem două cazuri particulare:

- normal planului Ox_1x_2 a.î. $\overset{\circ}{E}_1 = \overset{\circ}{E}_2 = 0$; (2.4)
- în planul Ox_1x_2 a.î. $\overset{\circ}{E}_3 = 0$.

Cu aceste ipoteze, ecuațiile matematice se decuplează în patru unde, ce sunt reprezentate într-o formă echivalentă cu cea a undelor ghidate prezentată de Simionescu-Panait [14] și Ana [1].

2.1. Propagarea undelor neomogene plane în cristale monoclinice

2.1.1. Axa diadică directă

În această parte studiem problema propagării undelor plane neomogene într-un cristal piezoelectric monoclinic, în care există o direcție de simetrie materială dată de axă de ordinul doi diadică directă A_2 . Cristalul piezoelectric aparține clasei 2 a sistemului monoclinic. Considerăm drept axa diadică directă A_2 pe Ox_3 , iar planul Ox_1x_2 este normal axei diadice A_2 . Planul Ox_1x_2 se numește **plan sagital**.

Componentele tensorului de elasticitate în configurația B_R sunt :

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

componentele tensorului piezoelectric în configurația B_R sunt :

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & e_{25} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & e_{36} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

iar tensorul constantelor dielectrice în configurația B_R are forma :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Ca un caz particular al teoremei 1.2, în ipotezele menționate (2.1) și (2.2), demonstrăm următoarea teoremă de caracterizare:

Teorema 2.1(Simionescu-Panait și Harabagiu[16])

Componentele tensorului electroacoustic Q asociat sistemului (1.18) cu componentele (1.19) pentru un cristal piezoelectric din **clasa 2** a sistemului monoclinic sunt:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{11} &= N^2 \left\{ (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} - \eta_{11} \overset{\circ}{E}_1^2) C_1^2 + 2 \left[c_{16} + \overset{\circ}{S}_{12} - \eta_{12} \overset{\circ}{E}_1^2 \right] C_1 C_2 + 2 \left[\overset{\circ}{S}_{13} - (e_{15} + e_{31}) \right] C_1 C_3 \right\} \\ &\quad + N^2 \left\{ \left[c_{66} + \overset{\circ}{S}_{22} - \eta_{22} \overset{\circ}{E}_1^2 \right] C_2^2 + 2 \left[\overset{\circ}{S}_{23} - (e_{36} + e_{25}) \right] C_2 C_3 + \left[c_{55} + \overset{\circ}{S}_{33} - \eta_{33} \overset{\circ}{E}_1^2 \right] C_3^2 \right\} - \overset{\circ}{\rho}, \\ \overset{\circ}{Q}_{12} &= \overset{\circ}{Q}_{21} = N^2 \left\{ (c_{16} - \eta_{11} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_2) C_1^2 + (c_{12} + c_{66} - 2\eta_{12} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_2) C_1 C_2 + (c_{26} - \eta_{22} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_2) C_2^2 \right\} \\ &\quad - N^2 \left\{ \left[(e_{14} + e_{36}) \overset{\circ}{E}_1 + (e_{31} + e_{15}) \overset{\circ}{E}_2 \right] C_1 C_3 - \left[(e_{24} + e_{32}) \overset{\circ}{E}_1 + (e_{36} + e_{25}) \overset{\circ}{E}_2 \right] C_2 C_3 \right\} \\ &\quad - N^2 \left\{ (c_{45} - \eta_{33} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_2) C_3^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{13} = \overset{\circ}{Q}_{31} = N^2 & \left\{ -(e_{15} + \eta_{11} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_3) C_1^2 + (-e_{25} \overset{\circ}{E}_1 - e_{14} \overset{\circ}{E}_1 - 2\eta_{12} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_3) C_1 C_2 \right\} + \\ & + N^2 \left\{ (-e_{24} \overset{\circ}{E}_1 - \eta_{22} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_3) C_2^2 + \left[(c_{55} + c_{13}) - (e_{31} + e_{15}) \overset{\circ}{E}_3 \right] C_1 C_3 \right\} \quad (2.8) \\ & - N^2 \left\{ - (c_{45} + c_{36}) + (e_{36} + e_{25}) \overset{\circ}{E}_3 \right\} C_2 C_3 + (e_{33} \overset{\circ}{E}_1 - \eta_{33} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_3) C_3^2 \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{14} = \overset{\circ}{Q}_{41} = N^2 & \left[\eta_{11} \overset{\circ}{E}_1 C_1^2 + 2\eta_{12} \overset{\circ}{E}_1 C_1 C_2 + \eta_{22} \overset{\circ}{E}_1 C_2^2 + (e_{31} + e_{15}) C_1 C_3 \right] + \\ & N^2 \left[(e_{36} + e_{25}) C_2 C_3 + \eta_{33} \overset{\circ}{E}_1 C_3^2 \right], \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{22} = N^2 & \left\{ (c_{66} + \overset{\circ}{S}_{11} - \eta_{11} \overset{\circ}{E}_2^2) C_1^2 + 2 \left[c_{26} + \overset{\circ}{S}_{12} - \eta_{12} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_2 \right] C_1 C_2 + 2 \left[\overset{\circ}{S}_{13} - (e_{14} + e_{36}) \right] C_1 C_3 \right\} \\ & + N^2 \left\{ \left[c_{22} + \overset{\circ}{S}_{22} - \eta_{22} \overset{\circ}{E}_2^2 \right] C_2^2 + 2 \left[\overset{\circ}{S}_{23} - (e_{32} + e_{24}) \right] C_2 C_3 + \left[c_{44} + \overset{\circ}{S}_{33} - \eta_{33} \overset{\circ}{E}_2^2 \right] C_3^2 \right\} - \overset{\circ}{\rho}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{23} = \overset{\circ}{Q}_{32} = N^2 & \left\{ -(e_{15} \overset{\circ}{E}_2 + \eta_{11} \overset{\circ}{E}_2 \overset{\circ}{E}_3) C_1^2 + (-e_{25} \overset{\circ}{E}_2 - e_{14} \overset{\circ}{E}_2 - 2\eta_{12} \overset{\circ}{E}_2 \overset{\circ}{E}_3) C_1 C_2 \right\} \\ & + N^2 \left\{ (-e_{24} \overset{\circ}{E}_2 - \eta_{22} \overset{\circ}{E}_2 \overset{\circ}{E}_3) C_2^2 + \left[(c_{44} + c_{23}) - (e_{32} + e_{24}) \overset{\circ}{E}_3 \right] C_2 C_3 \right\} \\ & - N^2 \left\{ - (c_{45} + c_{36}) + (e_{36} + e_{14}) \overset{\circ}{E}_3 \right\} C_1 C_3 + (e_{33} \overset{\circ}{E}_2 - \eta_{33} \overset{\circ}{E}_2 \overset{\circ}{E}_3) C_3^2 \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{24} = \overset{\circ}{Q}_{42} = N^2 & \left[\eta_{11} \overset{\circ}{E}_2 C_1^2 + 2\eta_{12} \overset{\circ}{E}_2 C_1 C_2 + \eta_{22} \overset{\circ}{E}_2 C_2^2 + (e_{36} + e_{14}) C_1 C_3 \right] + \\ & + N^2 \left[(e_{32} + e_{24}) C_2 C_3 + \eta_{33} \overset{\circ}{E}_2 C_3^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{33} = N^2 & \left\{ (c_{55} + \overset{\circ}{S}_{11} - 2e_{15} \overset{\circ}{E}_3 - \eta_{11} \overset{\circ}{E}_3^2) C_1^2 + 2 \left[c_{45} + \overset{\circ}{S}_{12} - (e_{14} + e_{25}) \overset{\circ}{E}_3 - \eta_{12} \overset{\circ}{E}_3^2 \right] C_1 C_2 \right\} + \\ & + N^2 \left\{ + 2\overset{\circ}{S}_{13} C_1 C_3 + \left[c_{44} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2e_{24} \overset{\circ}{E}_3 - \eta_{22} \overset{\circ}{E}_3^2 \right] C_2^2 + 2\overset{\circ}{S}_{23} C_2 C_3 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + N^2 \left(c_{33} + \overset{\circ}{S}_{33} - 2e_{33} \overset{\circ}{E}_3 - \eta_{33} \overset{\circ}{E}_3^2 \right) C_3^2 - \overset{\circ}{\rho}, \\
\overset{\circ}{Q}_{34} = \overset{\circ}{Q}_{43} = N^2 & \left[\left(e_{15} + \eta_{11} \overset{\circ}{E}_3 \right) C_1^2 + \left(e_{25} + e_{14} + 2\eta_{12} \overset{\circ}{E}_3 \right) C_1 C_2 + \left(e_{24} + \eta_{22} \overset{\circ}{E}_3 \right) C_2^2 \right] \\
& + N^2 \left(e_{33} + \eta_{33} \overset{\circ}{E}_3 \right) C_3^2, \\
\overset{\circ}{Q}_{44} = -N^2 & \left[\left(1 + \eta_{11} \right) C_1^2 + 2\eta_{12} C_1 C_2 + \left(1 + \eta_{22} \right) C_2^2 + \left(1 + \eta_{33} \right) C_3^2 \right] \quad (2.10)
\end{aligned}$$

2.1.1.a) Cazul particular : bivectorul direcțional izotrop \vec{C} astfel încât $\vec{C} \cdot \vec{C} = 0$

Ipoteze:

(1) $\vec{C} = \vec{i} + \vec{j}$;

(2) câmpul electric este dirijat după direcția dată de axă monoclinică $A_2 = Ox_3$ astfel încât $\overset{\circ}{E}_1 = \overset{\circ}{E}_2 = 0$.

Teorema 2.2. (Simionescu-Panait și Harabagiu[16])

În ipotezele (1), (2) menționate mai sus, condiția de propagare a undelor plane neomogene pentru un cristal piezoelectric din *clasa 2* a sistemului monoclinic în cazul bivectorului direcțional izotrop se descompune în două subsisteme :

- Primul subsistem caracterizează amplitudinea mecanică în planul Ox_1x_2 , perpendicular pe axa monoclinică :

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{11} & \overset{\circ}{Q}_{12} \\ \overset{\circ}{Q}_{12} & \overset{\circ}{Q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

unde tensorul electroacustic Q are componentele prezentate în teză la pag.37,

- Al doilea subsistem caracterizează amplitudinea mecanică în direcția axei diadice directe și amplitudinea electrică:

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{33} & \overset{\circ}{Q}_{34} \\ \overset{\circ}{Q}_{34} & \overset{\circ}{Q}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.12)$$

unde tensorul electroacustic Q are componentele prezentate în teză la pag.37 .

2.1.1.b) Cazul particular : bivectorul direcțional anizotrop \vec{C} astfel încât $\vec{C} \cdot \vec{C} \neq 0$

Ipoteze:

$$(1) \text{ alegem } \vec{C} = C_1 \vec{i} + C_2 \vec{j}, \text{ cu } C_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha, C_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha, \alpha \in [0, 2\pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \quad (2.13)$$

(2) câmpul electric este dirijat după direcția dată de axa monoclinică $A_2=Ox_3$ astfel încât $\overset{\circ}{E}_1 = \overset{\circ}{E}_2 = 0$.

Teorema 2.3. (Simionescu-Panait și Harabagiu[16])

În ipotezele (1), (2) menționate mai sus, condiția de propagare a undelor plane neomogene pentru un cristal piezoelectric din *clasa 2* a sistemului monoclinic în cazul bivectorului direcțional anizotrop se descompune în două subsisteme :

- Primul subsistem caracterizează amplitudinea mecanică în planul Ox_1x_2 , perpendicular pe axa monoclinică :

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{11} & \overset{\circ}{Q}_{12} \\ \overset{\circ}{Q}_{12} & \overset{\circ}{Q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.14)$$

unde tensorul electroacustic Q are componentele prezentate în teză la pag.40,

- Al doilea subsistem caracterizează amplitudinea mecanică în direcția axei diadice directe și amplitudinea electrică:

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{33} & \overset{\circ}{Q}_{34} \\ \overset{\circ}{Q}_{34} & \overset{\circ}{Q}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

unde tensorul electroacustic Q are componentele prezentate în teză la pag.41.

2.1.2.Axa diadică inversă (planul oglindă)

În continuare studiem problema propagării undelor plane neomogene într-un cristal piezoelectric monoclinic, în care există o direcție de simetrie materială dată de o axă de ordinul doi inversă \overline{A}_2 . Considerăm drept axa diadică inversă \overline{A}_2 pe Ox_3 . Planul sagital Ox_1x_2 este normal axei diadice inverse \overline{A}_2 , adică paralel cu planul oglindă M ($M \perp Ox_3$). Cristalul piezoelectric aparține *clasei m*(mirror) a sistemului monoclinic. În acest caz, componentele tensorului de elasticitate în configurația B_R sunt :

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

componentele tensorului piezoelectric în configurația B_R sunt:

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & 0 & 0 & e_{26} \\ 0 & 0 & 0 & e_{34} & e_{35} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

iar tensorul constantelor dielectrice în configurația B_R are forma :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Ipoteze:

(1) există o direcție de simetrie materială dată de axa de ordinul doi diadică inversă \overline{A}_2 .

Considerăm drept axă diadică \overline{A}_2 pe axa Ox_3 .

(2) componentele constantelor de material sunt date în (2.16), (2.17), (2.18).

Teorema 2.4. (Simionescu-Panait și Harabagiu[16])

În ipotezele (1), (2) menționate mai sus, componentele tensorului electroacoustic Q asociat sistemului (1.18) cu componentele (1.19) pentru un cristal piezoelectric din *clasa m* a sistemului monoclinic sunt:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{11} &= N^2 \left\{ (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} - 2e_{11} \overset{\circ}{E}_1 - \eta_{11} \overset{\circ}{E}_1^2) C_1^2 + 2 \left[c_{16} + \overset{\circ}{S}_{12} - (e_{16} + e_{21}) - 2\eta_{12} \overset{\circ}{E}_1 \right] C_1 C_2 \right\} \\ &+ N^2 \left\{ 2\overset{\circ}{S}_{13} C_1 C_3 + \left[c_{66} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2e_{26} \overset{\circ}{E}_1 - \eta_{22} \overset{\circ}{E}_1^2 \right] C_2^2 + 2\overset{\circ}{S}_{23} C_2 C_3 \right\} \\ &+ N^2 \left\{ c_{55} + \overset{\circ}{S}_{33} - 2e_{35} \overset{\circ}{E}_1 - \eta_{33} \overset{\circ}{E}_1^2 \right\} C_3^2 - \overset{\circ}{\rho}, \\ \overset{\circ}{Q}_{12} = \overset{\circ}{Q}_{21} &= N^2 \left\{ (c_{16} - e_{16} \overset{\circ}{E}_1 - e_{11} \overset{\circ}{E}_2 - \eta_{11} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_2) C_1^2 + (c_{26} - \eta_{22} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_2) C_2^2 \right\} + \\ &+ N^2 (c_{12} + c_{66} - e_{12} \overset{\circ}{E}_1 - e_{26} \overset{\circ}{E}_1 - e_{16} \overset{\circ}{E}_2 - e_{21} \overset{\circ}{E}_2 - 2\eta_{12} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_2) C_1 C_2 + \\ &+ N^2 \left\{ (c_{26} - e_{26} \overset{\circ}{E}_2 - e_{22} \overset{\circ}{E}_1 - \eta_{22} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_2) C_2^2 + (c_{45} - e_{35} \overset{\circ}{E}_2 - e_{34} \overset{\circ}{E}_1 - \eta_{33} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_2) C_3^2 \right\} \quad (2.19) \\ \overset{\circ}{Q}_{13} = \overset{\circ}{Q}_{31} &= N^2 \left\{ -(e_{11} \overset{\circ}{E}_3 + \eta_{11} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_3) C_1^2 + (-e_{21} \overset{\circ}{E}_3 - e_{16} \overset{\circ}{E}_3 - 2\eta_{12} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_3) C_1 C_2 \right\} \\ &+ N^2 \left\{ (-e_{26} \overset{\circ}{E}_3 - \eta_{22} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_3) C_2^2 + \left[(c_{45} + c_{36}) - (e_{23} + e_{34}) \overset{\circ}{E}_1 \right] C_2 C_3 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - N^2 \left\{ \left[- (c_{55} + c_{13}) + (e_{13} + e_{35}) \overset{\circ}{E}_1 \right] C_1 C_3 + (e_{35} \overset{\circ}{E}_3 - \eta_{33} \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_3) C_3^2 \right\}, \\
\overset{\circ}{Q}_{14} = \overset{\circ}{Q}_{41} = & N^2 \left[\left(e_{11} + \eta_{11} \overset{\circ}{E}_1 \right) C_1^2 + \left(e_{16} + e_{21} + 2\eta_{12} \overset{\circ}{E}_1 \right) C_1 C_2 + \left(e_{26} + \eta_{22} \overset{\circ}{E}_1 \right) C_2^2 \right] + \\
& + N^2 \left[\left(e_{35} + \eta_{33} \overset{\circ}{E}_1 \right) C_3^2 \right], \tag{2.20} \\
\overset{\circ}{Q}_{22} = & N^2 \left\{ (c_{66} + \overset{\circ}{S}_{11} - 2e_{16} \overset{\circ}{E}_2 - \eta_{11} \overset{\circ}{E}_2^2) C_1^2 + 2 \left(c_{26} + \overset{\circ}{S}_{12} - e_{12} \overset{\circ}{E}_2 - e_{26} \overset{\circ}{E}_2 - \eta_{12} \overset{\circ}{E}_1^2 \right) C_1 C_2 \right\} + \\
& + N^2 \left\{ 2\overset{\circ}{S}_{13} C_1 C_3 + \left(c_{22} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2e_{22} \overset{\circ}{E}_2 - \eta_{22} \overset{\circ}{E}_2^2 \right) C_2^2 + 2\overset{\circ}{S}_{23} C_2 C_3 \right\} \\
& + N^2 \left(c_{44} + \overset{\circ}{S}_{33} - 2e_{34} \overset{\circ}{E}_2 - \eta_{33} \overset{\circ}{E}_2^2 \right) C_3^2 - \overset{\circ}{\rho}, \\
\overset{\circ}{Q}_{23} = \overset{\circ}{Q}_{32} = & N^2 \left\{ - (e_{16} \overset{\circ}{E}_3 + \eta_{11} \overset{\circ}{E}_2 \overset{\circ}{E}_3) C_1^2 + (-e_{26} \overset{\circ}{E}_3 - e_{12} \overset{\circ}{E}_3 - 2\eta_{12} \overset{\circ}{E}_2 \overset{\circ}{E}_3) C_1 C_2 \right\} \\
& + N^2 \left\{ (-e_{22} \overset{\circ}{E}_3 - \eta_{22} \overset{\circ}{E}_2 \overset{\circ}{E}_3) C_2^2 + \left[(c_{44} + c_{23}) - (e_{23} + e_{24}) \overset{\circ}{E}_2 \right] C_2 C_3 \right\} \\
& - N^2 \left\{ \left[- (c_{45} + c_{36}) + (e_{35} + e_{13}) \overset{\circ}{E}_3 \right] C_1 C_3 + (e_{34} \overset{\circ}{E}_3 - \eta_{33} \overset{\circ}{E}_2 \overset{\circ}{E}_3) C_3^2 \right\}, \\
\overset{\circ}{Q}_{24} = \overset{\circ}{Q}_{42} = & N^2 \left[\left(e_{16} + \eta_{11} \overset{\circ}{E}_2 \right) C_1^2 + \left(e_{12} + e_{26} + 2\eta_{12} \overset{\circ}{E}_2 \right) C_1 C_2 + \left(e_{22} + \eta_{22} \overset{\circ}{E}_2 \right) C_2^2 \right] + \\
& + N^2 \left[\left(e_{34} + \eta_{33} \overset{\circ}{E}_2 \right) C_3^2 \right], \\
\overset{\circ}{Q}_{33} = & N^2 \left\{ (c_{55} + \overset{\circ}{S}_{11} - 2e_{15} \overset{\circ}{E}_3 - \eta_{11} \overset{\circ}{E}_3^2) C_1^2 + 2 \left(c_{45} + \overset{\circ}{S}_{12} - (e_{14} + e_{25}) \overset{\circ}{E}_3 - \eta_{12} \overset{\circ}{E}_3^2 \right) C_1 C_2 \right\} + \\
& + N^2 \left\{ 2\overset{\circ}{S}_{13} C_1 C_3 + \left(c_{44} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2e_{24} \overset{\circ}{E}_3 - \eta_{22} \overset{\circ}{E}_3^2 \right) C_2^2 + 2\overset{\circ}{S}_{23} C_2 C_3 \right\} \\
& + N^2 \left(c_{33} + \overset{\circ}{S}_{33} - 2e_{33} \overset{\circ}{E}_3 - \eta_{33} \overset{\circ}{E}_3^2 \right) C_3^2 - \overset{\circ}{\rho},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{34} = \overset{\circ}{Q}_{43} = N^2 & \left[\eta_{11} \overset{\circ}{E}_3 C_1^2 + 2\eta_{12} \overset{\circ}{E}_3 C_1 C_2 + \eta_{22} \overset{\circ}{E}_3 C_2^2 + (e_{13} + e_{35}) C_1 C_3 \right] + \\ & + N^2 \left[(e_{23} + e_{34}) C_2 C_3 + \eta_{33} \overset{\circ}{E}_3 C_3^2 \right], \\ \overset{\circ}{Q}_{44} = -N^2 & \left[(1 + \eta_{11}) C_1^2 + 2\eta_{12} C_1 C_2 + (1 + \eta_{22}) C_2^2 + (1 + \eta_{33}) C_3^2 \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.1.2.a) Cazul particular : bivectorul direcțional izotrop

Ipoteze:

(1) alegem cazul particular $\vec{C} = \vec{i} + i\vec{j}$;

(2) câmpul electric inițial este în planul sagital Ox_1x_2 ($\overset{\circ}{E}_3 = 0$).

Teorema 2.5. (Simionescu-Panait și Harabagiu[16])

În ipotezele (1), (2) menționate mai sus, condiția de propagare a undelor plane neomogene pentru un cristal piezoelectric din *clasa m* a sistemului monoclinic în cazul bivectorului direcțional izotrop se descompune în două subsisteme :

- Primul subsistem caracterizează amplitudinea mecanică în planul Ox_1x_2 , perpendicular pe axa monoclinică și amplitudinea electrică :

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{11} & \overset{\circ}{Q}_{12} & \overset{\circ}{Q}_{14} \\ \overset{\circ}{Q}_{12} & \overset{\circ}{Q}_{22} & \overset{\circ}{Q}_{24} \\ \overset{\circ}{Q}_{14} & \overset{\circ}{Q}_{24} & \overset{\circ}{Q}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.22)$$

unde tensorul electroacustic Q are componentele prezentate în teză la pag.46:

- Al doilea subsistem se reduce la o ecuația $\overset{\circ}{Q}_{33} a_3 = 0$ și caracterizează amplitudinea mecanică în direcția axei diadice inverse, unde tensorul electroacustic Q este dat de componenta:

$$\overset{\circ}{Q}_{33} = N^2 \left[(c_{55} + \overset{\circ}{S}_{11}) + 2i(c_{45} + \overset{\circ}{S}_{12}) - (c_{44} + \overset{\circ}{S}_{22}) \right] - \overset{\circ}{\rho}.$$

2.1.2.b) Cazul particular : bivectorul direcțional anizotrop

Ipoteze:

(1) alegem cazul particular al bivectorului direcțional anizotrop $\vec{C} = C_1 \vec{i} + C_2 \vec{j}$, cu

$$C_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha, C_2 = \cos \alpha - i \sin \alpha, \alpha \in [0, 2\pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\};$$

(2) câmpul electric inițial este în planul sagital Ox_1x_2 ($\overset{\circ}{E}_3 = 0$).

Teorema 2.6. (Simionescu-Panait și Harabagiu[16])

În ipotezele (1), (2) menționate mai sus, condiția de propagare a undelor plane neomogene pentru un cristal piezoelectric din *clasa m* a sistemului monoclinic în cazul

bivectorului direcțional anizotrop se descompune în două subsisteme :

- Primul subsistem caracterizează amplitudinea mecanică în planul Ox_1x_2 , perpendicular pe axa monoclinică și amplitudinea electrică :

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{11} & \overset{\circ}{Q}_{12} & \overset{\circ}{Q}_{14} \\ \overset{\circ}{Q}_{12} & \overset{\circ}{Q}_{22} & \overset{\circ}{Q}_{24} \\ \overset{\circ}{Q}_{14} & \overset{\circ}{Q}_{24} & \overset{\circ}{Q}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.23)$$

unde tensorul electroacustic $\overset{\circ}{Q}$ are componentele prezentate în teză la pag.49:

- Al doilea subsistem se reduce la ecuația $\overset{\circ}{Q}_{33} a_3 = 0$ și caracterizează amplitudinea mecanică în direcția axei diadice inverse, unde tensorul electroacustic $\overset{\circ}{Q}$ este dat de componenta:

$$\overset{\circ}{Q}_{33} = N^2 \left[\left(c_{55} + \overset{\circ}{S}_{11} \right) (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + 2 \left(c_{45} + \overset{\circ}{S}_{12} \right) + \left(c_{44} + \overset{\circ}{S}_{22} \right) (\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha) \right] - \overset{\circ}{\rho}.$$

2.2. Concluzii

În acest capitol este descrisă problema propagării undelor plane neomogene într-un cristal piezoelectric ce face parte din sistemul monoclinic. Algoritmul de rezolvare constă în descompunerea problemei în două subsisteme independente în funcție de axa diadică directă A_2 , respectiv de axa diadică inversă \bar{A}_2 .

În cazul spațiului piezoelectric cu axa $Ox_3=A_2$, pentru un câmp electric inițial normal planului Ox_1x_2 ($\overset{\circ}{E}_1 = \overset{\circ}{E}_2 = 0$), problema matematică se reduce la rezolvarea a două probleme $\overset{\circ}{P}_2$, respectiv $\overset{\circ}{TH}$. În cazul spațiului piezoelectric cu axa $Ox_3=\bar{A}_2$, pentru un câmp electric inițial în planul Ox_1x_2 ($\overset{\circ}{E}_3 = 0$), problema matematică se reduce la rezolvarea a două probleme $\overset{\circ}{P}_2$, respectiv $\overset{\circ}{TH}$.

Mai precis, în cazul particular al *bivectorului direcțional izotrop* $\vec{C} = \vec{i} + i\vec{j}$, respectiv al *bivectorului direcțional anizotrop* $\vec{C} = C_1\vec{i} + C_2\vec{j}$, cu

$$C_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha, C_2 = \cos \alpha - i \sin \alpha, \quad \alpha \in [0, 2\pi),$$

problema matematică se decuplează în :

- Problema $\overset{\circ}{P}2$ care definește o undă mecanică, polarizată în planul Ox_1x_2 , depinde doar de câmpul inițial al tensiunilor mecanice($\overset{\circ}{S}$).

- Problema $\overset{\circ}{TH}$ care definește o undă electromecanică, cuplând deplasarea mecanică u_3 cu potențialul electric Φ . Unda este polarizată după axa Ox_3 , deci transversal-orizontală, depinde de câmpurile inițiale (electric $\overset{\circ}{E}$ și de tensiune mecanică $\overset{\circ}{S}$), este influențată prin efect piezoelectric ($\overset{\circ}{e}$), respectiv prin efect electrostrictiv ($\overset{\circ}{E}^2$).

- Problema $\overset{\circ}{P}2$ care definește o undă electromecanică (cuplând deplasările mecanice u_1, u_2 cu potențialul electric u_4), polarizată în planul axa Ox_1x_2 , depinde de câmpurile inițiale (electric $\overset{\circ}{E}$ și de tensiune mecanică $\overset{\circ}{S}$), este influențată prin efect piezoelectric ($\overset{\circ}{e}$), respectiv prin efect electrostrictiv ($\overset{\circ}{E}^2$).

- Problema $\overset{\circ}{TH}$ care definește o undă mecanică, polarizată în lungul axei Ox_3 , depinde numai de câmpul inițial al tensiunilor mecanice($\overset{\circ}{S}$).

În cazul bivectorului direcțional izotrop ales, unda plană neomogenă este polarizată circular în planul normal axei diadice Ox_3 , iar în cazul bivectorului direcțional anizotrop ales, unda plană neomogenă este polarizată eliptic în planul normal axei diadice Ox_3 .

Capitolul 3

Propagarea undelor plane neomogene în cristale cu simetrie cubică supuse câmpurilor electromecanice inițiale

Rezultate originale care au stat la baza prezentului capitol au fost publicate în lucrarea Harabagiu[11]. Expresia tensorului electroacustic se poate obține dintr-un calcul direct similar celui realizat în Capitolul 2 sau prin particularizarea expresiilor obținute în cazul simetriei monoclinice cu axa diadică directă $A_2 \equiv O x_3$.

3.1. Decuplarea problemei matematice în cazul cristalului cu simetrie cubică

Introducem următoarele ipoteze privind simetria cubică pentru materialele piezoelectrice:

(1) componentele tensorului de elasticitate în configurația B_R sunt :

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

(2) În Royer și Dieulesaint[13], se arată că există cinci clase de simetrie cubică. Dintre acestea numai clasele $\bar{4}3m$ și 23 prezintă efectul piezoelectric, iar tensorul piezoelectric depinde doar de o constantă și are forma:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{14} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

(3) Pentru toate cele cinci clase de simetrie cubică, tensorul dielectric are o singură constantă:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Prin particularizarea relațiilor constitutive din cazul cristalului piezoelectric cu simetrie monoclinică, la cazul materialului cu simetrie cubică descris constitutiv prin ipotezele (3.1)-(3.3) se demonstrează următoarea teoremă:

Teorema 3.1.(Harabagiu[11])

Dacă deplasarea mecanică incrementală \vec{u} , respectiv potențialul electric incremental ϕ sunt descrise prin formulele (1.15) atunci condiția de propagare a undelor plane neomogene în materiale piezoelectrice cu simetrie cubică supuse câmpurilor electromecanice inițiale este caracterizată prin sistemul :

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{1m} & \overset{\circ}{Q}_{14} \\ \overset{\circ}{Q}_{4m} & \overset{\circ}{Q}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m \\ a_4 \end{pmatrix} = 0, m = \overline{1,3}, \quad (3.4)$$

unde tensorul electroacustic Q are următoarele componente :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{11} &= (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11})N^2C_1^2 + (c_{44} + \overset{\circ}{S}_{22})N^2C_2^2 + (c_{44} + \overset{\circ}{S}_{33})N^2C_3^2 + 2\overset{\circ}{S}_{12}N^2C_1C_2 + \\ &+ 2\overset{\circ}{S}_{13}N^2C_1C_3 + 2\overset{\circ}{S}_{23}N^2C_2C_3 - 4e_{14}\overset{\circ}{E}_1N^2C_2C_3 - \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_1 - \overset{\circ}{\rho}, \\ \overset{\circ}{Q}_{12} &= \overset{\circ}{Q}_{21} = (c_{12} + c_{44})N^2C_1C_2 - 2e_{14}(\overset{\circ}{E}_2C_2 + \overset{\circ}{E}_1C_1)N^2C_3 - \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_1\overset{\circ}{E}_2, \\ \overset{\circ}{Q}_{13} &= \overset{\circ}{Q}_{31} = (c_{12} + c_{44})N^2C_1C_3 - 2e_{14}(\overset{\circ}{E}_3C_3 + \overset{\circ}{E}_1C_1)N^2C_2 - \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_1\overset{\circ}{E}_3, (3.5) \\ \overset{\circ}{Q}_{22} &= (c_{44} + \overset{\circ}{S}_{11})N^2C_1^2 + (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{22})N^2C_2^2 + (c_{44} + \overset{\circ}{S}_{33})N^2C_3^2 + 2\overset{\circ}{S}_{12}N^2C_1C_2 + \\ &+ 2\overset{\circ}{S}_{13}N^2C_1C_3 + 2\overset{\circ}{S}_{23}N^2C_2C_3 - 4e_{14}\overset{\circ}{E}_2N^2C_1C_3 - \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_2 - \overset{\circ}{\rho}, \\ \overset{\circ}{Q}_{23} &= \overset{\circ}{Q}_{32} = (c_{12} + c_{44})N^2C_2C_3 - 2e_{14}(\overset{\circ}{E}_3C_3 + \overset{\circ}{E}_2C_2)N^2C_1 - \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_2\overset{\circ}{E}_3, \\ \overset{\circ}{Q}_{33} &= (c_{44} + \overset{\circ}{S}_{11})N^2C_1^2 + (c_{44} + \overset{\circ}{S}_{22})N^2C_2^2 + (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{33})N^2C_3^2 + 2\overset{\circ}{S}_{12}N^2C_1C_2 + \\ &+ 2\overset{\circ}{S}_{13}N^2C_1C_3 + 2\overset{\circ}{S}_{23}N^2C_2C_3 - 4e_{14}\overset{\circ}{E}_3N^2C_1C_2 - \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_3 - \overset{\circ}{\rho}, \\ \overset{\circ}{Q}_{14} &= \overset{\circ}{Q}_{41} = 2e_{14}N^2C_2C_3 + \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_1, \\ \overset{\circ}{Q}_{24} &= \overset{\circ}{Q}_{42} = 2e_{14}N^2C_1C_3 + \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_2, \\ \overset{\circ}{Q}_{34} &= \overset{\circ}{Q}_{43} = 2e_{14}N^2C_2C_1 + \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_3, \\ \overset{\circ}{Q}_{44} &= -(1 + \eta)(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2. \end{aligned}$$

3.1.1. Unde longitudinale

Ipoteze:

- (1) bivectorul direcțional izotrop are forma $\vec{C} = \vec{i} + i\vec{j}$;
- (2) bivectorul încetinire are forma $\vec{s} = N(\vec{i} + i\vec{j})$, cu $N \in \mathbb{C}$ determinat din ecuația (1.20) ;
- (3) bivectorul amplitudine are forma $\vec{a} = \alpha N(\vec{i} + i\vec{j})$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Propoziția 3.1.(Harabagiu[11])

În ipotezele (1), (2), (3) menționate mai sus, componentele tensorului electroacoustic Q pentru un cristal piezoelectric cu simetrie cubică sunt:

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{Q}_{11} &= N^2 \left[c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + 2i\overset{\circ}{S}_{12} - \left(c_{44} + \overset{\circ}{S}_{22} \right) \right] - \overset{\circ}{\rho}, \\
 \overset{\circ}{Q}_{12} &= \overset{\circ}{Q}_{21} = (c_{44} + c_{12})iN^2, \\
 \overset{\circ}{Q}_{13} &= \overset{\circ}{Q}_{31} = -2e_{14}iN^2 \overset{\circ}{E}_1, \\
 \overset{\circ}{Q}_{22} &= (-c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{44} - \overset{\circ}{S}_{22})N^2 + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 i - \overset{\circ}{\rho}, \\
 \overset{\circ}{Q}_{23} &= \overset{\circ}{Q}_{32} = -2e_{14}iN^2 \overset{\circ}{E}_2, \\
 \overset{\circ}{Q}_{33} &= \left(\overset{\circ}{S}_{11} - \overset{\circ}{S}_{22} + 2i\overset{\circ}{S}_{12} - 4e_{14}i \overset{\circ}{E}_3 \right) N^2 - \overset{\circ}{\rho}, \\
 \overset{\circ}{Q}_{14} &= \overset{\circ}{Q}_{24} = \overset{\circ}{Q}_{44} = 0, \\
 \overset{\circ}{Q}_{34} &= 2e_{14}iN^2.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Propoziția 3.2.(Harabagiu[13])

Condiția de propagarea a undelor plane neomogene în cristale piezoelectrice cu simetrie cubică supuse câmpurilor electromecanice inițiale se descompune într-un subsistem și două ecuații :

- Primul subsistem caracterizează amplitudinea mecanică în planul Ox_1x_2 :

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{11} & \overset{\circ}{Q}_{12} \\ \overset{\circ}{Q}_{12} & \overset{\circ}{Q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{3.7}$$

unde tensorul electroacoustic Q are următoarele componente:

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{Q}_{11} &= N^2 \left[c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + 2i\overset{\circ}{S}_{12} - \left(c_{44} + \overset{\circ}{S}_{22} \right) \right] - \overset{\circ}{\rho}, \\
 \overset{\circ}{Q}_{12} &= \overset{\circ}{Q}_{21} = (c_{44} + c_{12})iN^2, \\
 \overset{\circ}{Q}_{22} &= N^2 \left[c_{44} + \overset{\circ}{S}_{11} + 2i\overset{\circ}{S}_{12} - \left(c_{11} + \overset{\circ}{S}_{22} \right) \right] - \overset{\circ}{\rho}.
 \end{aligned}$$

- Prima ecuație care caracterizează amplitudinea mecanică în direcția axei Ox_3 este $\overset{\circ}{Q}_{33} a_3 = 0$, unde tensorul electroacustic Q este dat de componenta

$$\overset{\circ}{Q}_{33} = \left(\overset{\circ}{S}_{11} - \overset{\circ}{S}_{22} + 2i\overset{\circ}{S}_{12} - 4e_{14}i\overset{\circ}{E}_3 \right) N^2 - \overset{\circ}{\rho},$$

- A doua ecuație care caracterizează amplitudinea mecanică în direcția axei Ox_3 este $\overset{\circ}{Q}_{34} a_3 = 0$, unde tensorul electroacustic Q este dat de componenta $\overset{\circ}{Q}_{34} = \overset{\circ}{Q}_{43} = 2e_{14}iN^2$.

3.1.2. Unde transversale

Ipoteze:

- (1) bivectorul direcțional anizotrop are forma $C = C_1\vec{i} + C_2\vec{j}$, cu

$$C_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha, C_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha, \alpha \in [0, 2\pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\};$$

- (2) bivectorului încetinire are forma $\vec{s} = N\vec{C} = N(\cos\alpha + i\sin\alpha)\vec{i} + N(\cos\alpha - i\sin\alpha)\vec{j}$, unde $N \in \mathbb{C}$ este determinat din ecuația dispersiei (1.20);

- (3) bivectorul amplitudine are forma $\vec{a} = \delta(\cos\alpha + i\sin\alpha)\vec{i} - \delta(\cos\alpha - i\sin\alpha)\vec{j} + \gamma\vec{k}$, $\delta \in \mathbb{C}$ și $\gamma \in \mathbb{C}$ sunt scalari arbitrari aleși.

Din (1.15) rezultă că unda plană neomogenă plană capătă forma :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \left[\delta(\cos\alpha - i\sin\alpha)\vec{i} - \delta(\cos\alpha + i\sin\alpha)\vec{j} + \gamma\vec{k} \right] \exp \left[i\omega \left(N(\cos\alpha + i\sin\alpha)x_1 + N(\cos\alpha - i\sin\alpha)x_2 - t \right) \right] \quad (3.8)$$

Propoziția 3.3(Harabagiu[11])

În ipotezele (1), (2), (3) menționate mai sus, componentele tensorului electroacustic Q pentru un cristal piezoelectric cu simetrie cubică sunt:

$$\overset{\circ}{Q}_{11} = (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{44} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2\eta\overset{\circ}{E}_1^2) N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} - c_{44} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{12} = \overset{\circ}{Q}_{21} = (c_{12} + c_{44}) N^2 - 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_2,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{13} = \overset{\circ}{Q}_{31} = -2e_{14} N^2 \overset{\circ}{E}_1 - 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_3, \quad (3.9)$$

$$\overset{\circ}{Q}_{22} = (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{44} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2\eta\overset{\circ}{E}_2^2) N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(-c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{44} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{23} = \overset{\circ}{Q}_{32} = -2e_{14} N^2 \overset{\circ}{E}_2 - 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_2 \overset{\circ}{E}_3,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{33} = (2c_{44} + \overset{\circ}{S}_{11} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2\eta\overset{\circ}{E}_3^2) N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - 4e_{14} \overset{\circ}{E}_3 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(\overset{\circ}{S}_{11} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{14} = \overset{\circ}{Q}_{41} = 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_1,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{24} = \overset{\circ}{Q}_{42} = 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_2,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{34} = \overset{\circ}{Q}_{43} = 2e_{14}N^2 + 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_3,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{44} = -2N^2(1+\eta)\cos 2\alpha.$$

Propoziția 3.4.(Harabagiu[11])

Condiția de propagarea a undelor plane neomogene în cristale piezoelectrice cu simetrie cubică supuse câmpurilor electromecanice inițiale se descompune în două subsisteme :

- Primul subsistem caracterizează amplitudinea mecanică în planul Ox_1x_2 :

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{11} & \overset{\circ}{Q}_{12} \\ \overset{\circ}{Q}_{12} & \overset{\circ}{Q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

unde tensorul electroacustic Q are următoarele componente:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{11} &= (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{44} + \overset{\circ}{S}_{22})N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} - c_{44} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha, \\ \overset{\circ}{Q}_{12} = \overset{\circ}{Q}_{21} &= (c_{12} + c_{44})N^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\overset{\circ}{Q}_{22} = (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{44} + \overset{\circ}{S}_{22})N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(-c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{44} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha.$$

- Al doilea subsistem caracterizează amplitudinea mecanică în direcția axei diadice directe și amplitudinea electrică:

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{33} & \overset{\circ}{Q}_{34} \\ \overset{\circ}{Q}_{34} & \overset{\circ}{Q}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

unde tensorul electroacustic Q are următoarele componente:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{33} &= (2c_{44} + \overset{\circ}{S}_{11} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2\eta \overset{\circ}{E}_3^2)N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - 4e_{14} \overset{\circ}{E}_3 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(\overset{\circ}{S}_{11} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha, \\ \overset{\circ}{Q}_{34} = \overset{\circ}{Q}_{43} &= 2e_{14}N^2 + 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_3, \\ \overset{\circ}{Q}_{44} &= -2N^2(1+\eta)\cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2. Propagarea unei plane neomogene $\overset{\circ}{P}_2$ în cristale cu simetrie cubică supuse câmpurilor electromecanice inițiale în cazul particular al bivectorului direcțional izotrop, respectiv al bivectorului direcțional izotrop este studiată în lucrare la pag.64-72.

3.3.Exemple numerice care evidențiază influența câmpurilor de tensiune mecanică inițiale

Pentru exemplificarea propagării undelor plane neomogene în cristale piezoelectrice cu simetrie cubică, vom considera că materialul din care este alcătuit spațiul este arseniură de galiu(GaAs), un cristal piezoelectric cu simetrie cubică caracterizat prin *constantele de material*:

$$\overset{\circ}{c}_{11} = 11,88 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \overset{\circ}{c}_{12} = 5,38 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \overset{\circ}{c}_{44} = 5,94 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \overset{\circ}{\rho} = 5307 \text{ kg/m}^3.$$

Câmpul de tensiune mecanică inițial este precizat prin $\overset{\circ}{S}_{11} = p\% \cdot \overset{\circ}{c}_{11}$; $\overset{\circ}{S}_{12} = p\% \cdot \overset{\circ}{c}_{12}$; $\overset{\circ}{S}_{22} = p\% \cdot \overset{\circ}{c}_{44}$,

unde $p \in \mathbb{Z}, |p| \leq 5$, pulsația este $\omega=1000$ Hz, perioada este $T=\frac{2\pi}{\omega}$ s, timpul este $t \in [0;T]$ s.
 Punctul material ales este (1,1,0).

a) În cazul **bivectorului direcțional izotrop**:

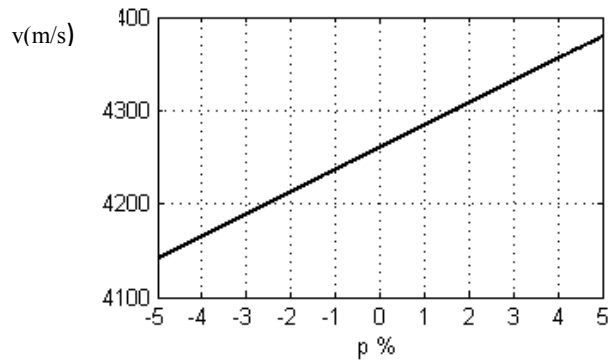


Fig.3.1. Influența tensiunii mecanice inițiale asupra vitezei de fază pentru unde longitudinale

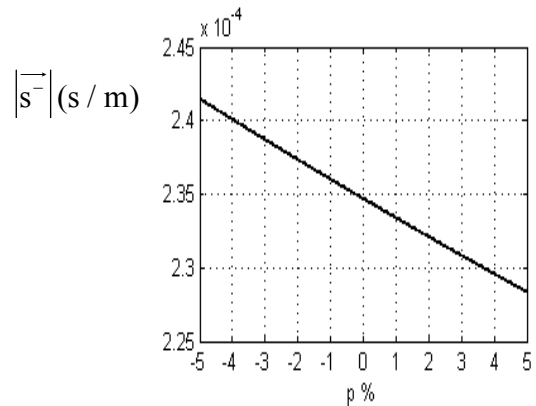


Fig.3.2. Influența tensiunii mecanice inițiale asupra coeficientului de atenuare în cazul undelor longitudinale

Din graficele 3.1. și 3.2., se observă că o creștere a tracțiunii în valoare absolută conduce la o creștere a vitezei de fază și la o scădere a coeficientului de atenuare, iar o creștere a compresiunii în valoare absolută conduce la o scădere a vitezei de fază și la o creștere a coeficientului de atenuare.

b) În cazul **bivectorului direcțional anizotrop**:

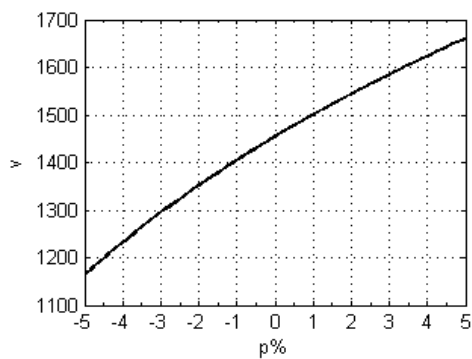


Fig.3.3. Influența tensiunii mecanice inițiale asupra vitezei de fază pentru unde transversale

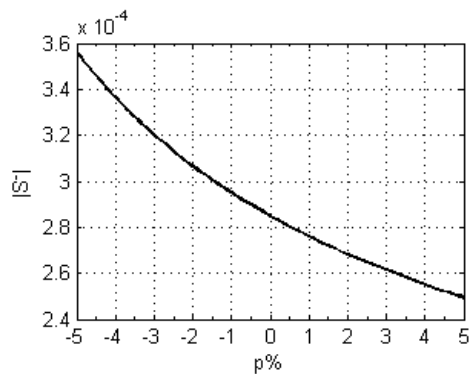


Fig.3.4. Influența tensiunii mecanice inițiale asupra coeficientului de atenuare în cazul undelor transversale

Deducem că o creștere a tracțiunii sau a compresiunii duce la o creștere a vitezei de fază și la o scădere a coeficientului de atenuare.

Capitolul 4.

Propagarea undelor plane neomogene în solide izotrope supuse câmpurilor electromecanice inițiale

Rezultatele originale prezentate în acest capitol au fost publicate în articolul Harabagiu și Simionescu-Panait[12].

4.1. Decuplarea problemei matematice asociate undelor plane neomogene în spațiul izotrop

Ipoteze:

(1) componentele tensorului de elasticitate în configurația B_R sunt :

$$(\mathbf{c}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

cu $\overset{\circ}{c}_{11} = \lambda + 2\mu$, $\overset{\circ}{c}_{12} = \lambda$ și $\overset{\circ}{c}_{66} = \frac{\overset{\circ}{c}_{11} - \overset{\circ}{c}_{12}}{2} = \mu$, unde λ și μ sunt constantele elastice ale lui Lamé;

(2) tensorul constantelor dielectrice în configurația B_R are forma :

$$(\eta) = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

(3) presupunem că deplasarea mecanică incrementală, respectiv potențialul incremental sunt date în (1.15), de forma :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{a} \exp[i\omega(\vec{s} \cdot \vec{x} - t)], \quad \varphi(\vec{x}, t) = \Phi \exp[i\omega(\vec{s} \cdot \vec{x} - t)]$$

unde $\vec{a}, \vec{s} \in \Lambda^2 \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = \vec{a}^+ + i\vec{a}^-$ este un vector complex definind bivectorul amplitudine mecanică și $\vec{s} = \vec{s}^+ + i\vec{s}^-$ este un vector complex, definind bivectorul încetinire, $\Phi \in \mathbb{C}$ este amplitudinea electrică a undei, ω reprezintă frecvența unghiulară a undei și este un parametru real.

(4) presupunem că acest tip de unde se propagă într-un mediu infinit, ceea ce înseamnă că $\mathcal{V} \equiv \mathbb{R}^3$.

Prin particularizarea relațiilor constitutive din cazul cristalului piezoelectric cu simetrie monoclinică, la cazul materialului din spațiul elastic izotrop descris constitutiv prin ipotezele (4.1)-(4.3) se demonstrează următoarea teoremă:

Teorema 4.1.(Harabagiu și Simionescu-Panait[12])

În ipotezele (1),(2),(3),(4), condiția de propagare a undelor plane neomogene în materiale piezoelectrice din spațiul elastic izotrop supuse câmpurilor inițiale este :

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{1m} & \overset{\circ}{Q}_{14} \\ \overset{\circ}{Q}_{4m} & \overset{\circ}{Q}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{a}_m \\ \overset{\circ}{a}_4 \end{pmatrix} = 0, m = \overline{1,3}, \quad (4.3)$$

unde Q are următoarele componente :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{11} &= (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11})N^2C_1^2 + (c_{66} + \overset{\circ}{S}_{22})N^2C_2^2 + (c_{66} + \overset{\circ}{S}_{33})N^2C_3^2 + 2\overset{\circ}{S}_{12}N^2C_1C_2 + \\ &+ 2\overset{\circ}{S}_{13}N^2C_1C_3 + 2\overset{\circ}{S}_{23}N^2C_2C_3 - \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_1 - \overset{\circ}{\rho}, \\ \overset{\circ}{Q}_{12} &= \overset{\circ}{Q}_{21} = (c_{12} + c_{66})N^2C_1C_2 - \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_1\overset{\circ}{E}_2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\overset{\circ}{Q}_{13} = \overset{\circ}{Q}_{31} = (c_{12} + c_{66})N^2C_1C_3 - \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_1\overset{\circ}{E}_3,$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{22} &= (c_{66} + \overset{\circ}{S}_{11})N^2C_1^2 + (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{22})N^2C_2^2 + (c_{66} + \overset{\circ}{S}_{33})N^2C_3^2 + 2\overset{\circ}{S}_{12}N^2C_1C_2 + \\ &+ 2\overset{\circ}{S}_{13}N^2C_1C_3 + 2\overset{\circ}{S}_{23}N^2C_2C_3 - \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_2 - \overset{\circ}{\rho}, \end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{Q}_{23} = \overset{\circ}{Q}_{32} = (c_{12} + c_{66})N^2C_2C_3 - \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_2\overset{\circ}{E}_3,$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{33} &= (c_{66} + \overset{\circ}{S}_{11})N^2C_1^2 + (c_{66} + \overset{\circ}{S}_{22})N^2C_2^2 + (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{33})N^2C_3^2 + 2\overset{\circ}{S}_{12}N^2C_1C_2 + \\ &+ 2\overset{\circ}{S}_{13}N^2C_1C_3 + 2\overset{\circ}{S}_{23}N^2C_2C_3 - \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_3 - \overset{\circ}{\rho}, \end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{Q}_{14} = \overset{\circ}{Q}_{41} = \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_1,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{24} = \overset{\circ}{Q}_{42} = \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_2, \quad (4.5)$$

$$\overset{\circ}{Q}_{34} = \overset{\circ}{Q}_{43} = \eta(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2\overset{\circ}{E}_3,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{44} = -(1 + \eta)(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)N^2. \quad (4.6)$$

4.1.1. Unde longitudinale

Ipoteze :

- (1) $\vec{C} = \vec{i} + i\vec{j}$;
- (2) $\vec{s} = N(\vec{i} + i\vec{j})$, unde $N \in \mathbb{C}$ este determinat din ecuația dispersiei (1.20) ;
- (3) $\vec{a} = \alpha N(\vec{i} + i\vec{j})$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Propoziția 4.1.(Harabagiu și Simionescu-Panait[11])

În ipotezele (1), (2), (3) menționate mai sus, componentele tensorului electroacoustic Q pentru un cristal piezoelectric din spațiul elastic izotrop sunt:

$$\overset{\circ}{Q}_{11} = N^2 \left[c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + 2i\overset{\circ}{S}_{12} - \left(c_{66} + \overset{\circ}{S}_{22} \right) \right] - \overset{\circ}{\rho},$$

$$\overset{\circ}{Q}_{12} = \overset{\circ}{Q}_{21} = (c_{66} + c_{12})iN^2,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{22} = (-c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{66} - \overset{\circ}{S}_{22})N^2 + 2\overset{\circ}{S}_{12}N^2i - \overset{\circ}{\rho},$$

$$\overset{\circ}{Q}_{33} = \left(\overset{\circ}{S}_{11} - \overset{\circ}{S}_{22} + 2i\overset{\circ}{S}_{12} \right) N^2 - \overset{\circ}{\rho},$$

Propoziția 4.2.(Harabagiu și Simionescu-Panait[11])

În ipotezele (1), (2), (3) menționate mai sus, condiția de propagarea a undelor plane neomogene în cristale piezoelectrice din spațiul elastic izotrop, supuse câmpurilor electromecanice inițiale se descompune într-un subsistem și o ecuație :

- Primul subsistem caracterizează amplitudinea mecanică în planul Ox_1x_2 :

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{11} & \overset{\circ}{Q}_{12} \\ \overset{\circ}{Q}_{12} & \overset{\circ}{Q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

unde tensorul electroacoustic Q are următoarele componente:

$$\overset{\circ}{Q}_{11} = N^2 \left[c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + 2i\overset{\circ}{S}_{12} - \left(c_{66} + \overset{\circ}{S}_{22} \right) \right] - \overset{\circ}{\rho},$$

$$\overset{\circ}{Q}_{12} = \overset{\circ}{Q}_{21} = (c_{66} + c_{12})iN^2,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{22} = N^2 \left[c_{66} + \overset{\circ}{S}_{11} + 2i\overset{\circ}{S}_{12} - \left(c_{11} + \overset{\circ}{S}_{22} \right) \right] - \overset{\circ}{\rho}.$$

- Ecuația care caracterizează amplitudinea mecanică în direcția axei Ox_3 este $\overset{\circ}{Q}_{33} a_3 = 0$,

unde tensorul electroacoustic Q este dat de componenta $\overset{\circ}{Q}_{33} = \left(\overset{\circ}{S}_{11} - \overset{\circ}{S}_{22} + 2i\overset{\circ}{S}_{12} \right) N^2 - \overset{\circ}{\rho}$.

4.1.2. Unde transversale

Ipoteze:

- (1) $C = C_1\vec{i} + C_2\vec{j}$, cu $C_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $C_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$;

(2) $\vec{s} = N\vec{C} = N(\cos\alpha + i\sin\alpha)\vec{i} + N(\cos\alpha - i\sin\alpha)\vec{j}$, unde $N \in \mathbb{C}$ este determinat din ecuația dispersiei (1.20);

(3) $\vec{a} = \delta(\cos\alpha + i\sin\alpha)\vec{i} - \delta(\cos\alpha - i\sin\alpha)\vec{j} + \gamma\vec{k}$, $\delta \in \mathbb{C}$ și $\gamma \in \mathbb{C}$ sunt scalari arbitrari aleși.

Din (1.15) rezultă că unda plană neomogenă plană capătă forma :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \left[\delta(\cos\alpha - i\sin\alpha)\vec{i} - \delta(\cos\alpha + i\sin\alpha)\vec{j} + \gamma\vec{k} \right] \exp \left[i\omega \left(N(\cos\alpha + i\sin\alpha)x_1 + N(\cos\alpha - i\sin\alpha)x_2 - t \right) \right]$$

Teorema 4.2.(Harabagiu și Simionescu-Panait[12])

În ipotezele (1),(2),(3) menționate mai sus, componentele tensorului electroacoustic Q pentru un cristal piezoelectric din spațiul elastic izotrop supuse câmpurilor electromecanice inițiale sunt :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{11} &= (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{44} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2\eta \overset{\circ}{E}_1^2) N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} - c_{66} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha, \\ \overset{\circ}{Q}_{12} &= \overset{\circ}{Q}_{21} = (c_{12} + c_{66}) N^2 - 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_2, \\ \overset{\circ}{Q}_{13} &= \overset{\circ}{Q}_{31} = -2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_3, \\ \overset{\circ}{Q}_{22} &= (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{66} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2\eta \overset{\circ}{E}_2^2) N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(-c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{66} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha, \\ \overset{\circ}{Q}_{23} &= \overset{\circ}{Q}_{32} = -2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_2 \overset{\circ}{E}_3, \\ \overset{\circ}{Q}_{33} &= (2c_{66} + \overset{\circ}{S}_{11} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2\eta \overset{\circ}{E}_3^2) N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(\overset{\circ}{S}_{11} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha, \\ \overset{\circ}{Q}_{14} &= \overset{\circ}{Q}_{41} = 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_1, \quad \overset{\circ}{Q}_{24} = \overset{\circ}{Q}_{42} = 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_2, \\ \overset{\circ}{Q}_{34} &= \overset{\circ}{Q}_{43} = 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_3, \quad \overset{\circ}{Q}_{44} = -2N^2 (1 + \eta) \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

4.1.2.a) Câmp electric longitudinal ($\overset{\circ}{E}_1 = \overset{\circ}{E}_2 = 0$)

Propoziția 4.3.(Harabagiu și Simionescu-Panait[12])

Condiția de propagarea a undelor plane neomogene în cristale piezoelectrice în spațiul elastic izotrop supuse câmpurilor electromecanice inițiale pentru unde transversale se descompune în două subsisteme :

- Primul subsistem amplitudinea mecanică în planul Ox_1x_2 :

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{11} & \overset{\circ}{Q}_{12} \\ \overset{\circ}{Q}_{12} & \overset{\circ}{Q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

unde tensorul electroacoustic Q are următoarele componente:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{11} &= (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{66} + \overset{\circ}{S}_{22}) N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} - c_{66} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha, \\ \overset{\circ}{Q}_{12} &= \overset{\circ}{Q}_{21} = (c_{12} + c_{66}) N^2, \end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{Q}_{22} = (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{66} + \overset{\circ}{S}_{22})N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(-c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{66} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha.$$

- Al doilea subsistem caracterizează amplitudinea mecanică în direcția axei Ox_3 și amplitudinea electrică:

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{33} & \overset{\circ}{Q}_{34} \\ \overset{\circ}{Q}_{34} & \overset{\circ}{Q}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0$$

unde tensorul electroacustic Q are următoarele componente:

$$\overset{\circ}{Q}_{33} = (2c_{66} + \overset{\circ}{S}_{11} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2\eta \overset{\circ}{E}_3^2)N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(\overset{\circ}{S}_{11} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{34} = \overset{\circ}{Q}_{43} = 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_3, \quad \overset{\circ}{Q}_{44} = -2N^2(1 + \eta) \cos 2\alpha.$$

4.1.2.b) Câmp electric transversal ($\overset{\circ}{E}_3 = 0$)

Propoziția 4.4.(Harabagiu și Simionescu-Panait[12])

Condiția de propagarea a undelor plane neomogene în cristale piezoelectrice în spațiul elastic izotrop supuse câmpurilor electromecanice inițiale pentru unde transversale se descompune în două subsisteme :

- Primul subsistem caracterizează amplitudinea mecanică în planul Ox_1x_2 , perpendicular pe axa Ox_3 și amplitudinea electrică :

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{Q}_{11} & \overset{\circ}{Q}_{12} & \overset{\circ}{Q}_{14} \\ \overset{\circ}{Q}_{12} & \overset{\circ}{Q}_{22} & \overset{\circ}{Q}_{24} \\ \overset{\circ}{Q}_{14} & \overset{\circ}{Q}_{24} & \overset{\circ}{Q}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0$$

unde tensorul electroacustic Q are următoarele componente:

$$\overset{\circ}{Q}_{11} = (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{66} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2\eta \overset{\circ}{E}_1 \overset{\circ}{E}_2)N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} - c_{66} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{12} = \overset{\circ}{Q}_{21} = (c_{12} + c_{66})N^2,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{22} = (c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{66} + \overset{\circ}{S}_{22} - 2\eta \overset{\circ}{E}_2^2)N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(-c_{11} + \overset{\circ}{S}_{11} + c_{66} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{14} = \overset{\circ}{Q}_{41} = 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_1,$$

$$\overset{\circ}{Q}_{24} = \overset{\circ}{Q}_{42} = 2\eta \cos 2\alpha N^2 \overset{\circ}{E}_2, \quad \overset{\circ}{Q}_{44} = -2N^2(1 + \eta) \cos 2\alpha.$$

- Al doilea subsistem se reduce ecuația $\overset{\circ}{Q}_{33} a_3 = 0$ și caracterizează amplitudinea mecanică în direcția axei Ox_3 . Tensorul electroacustic Q este dat de componenta:

$$\overset{\circ}{Q}_{33} = (2c_{66} + \overset{\circ}{S}_{11} + \overset{\circ}{S}_{22})N^2 \cos 2\alpha + 2\overset{\circ}{S}_{12} N^2 - \overset{\circ}{\rho} + i \left(\overset{\circ}{S}_{11} - \overset{\circ}{S}_{22} \right) N^2 \sin 2\alpha.$$

Concluzii finale

În această lucrare, s-a realizat :

- un studiu complex privind propagarea undelor plane neomogene caracterizate prin conceptul de bivector;
- propagarea undelor a fost analizată în cazul cristalelor piezoelectrice, prepolarizate și pretensionate ;
- prezentarea într-un cadru unitar a undelor longitudinale și transversale mecanice și elastice, rezultate ce au fost obținute în cazul sistemelor cristalografice monoclinice, cubice și izotrope;
- stabilirea influenței câmpurilor electromecanice inițiale în propagarea undelor plane neomogene în cristale piezoelectrice.

Prin particularizarea rezultatelor obținute în teza de doctorat, se regăsesc rezultatele obținute de Royer și Dieulesaint în [13], în cazul clasic în absența câmpurilor inițiale, dar și pe cele obținute de Simionescu-Panait în [14] și Ana în [1], în cazul propagării undelor plane omogene pentru cristale piezoelectrice supuse câmpurilor inițiale. Pe de altă parte, cercetările efectuate aduc în prim plan aspecte noi cu implicații majore în modelarea propagării undelor în cristale piezoelectrice supuse câmpurilor electromecanice inițiale.

Ca perspectivă, studiul inițiat în această teză de doctorat urmează a fi extins prin:

- studierea undelor Rayleigh ($\overset{\circ}{P}_2$), Bleustein-Gulyaev (\overline{TH}), Love (TH), Lamb ($\overset{\circ}{P}_2$) în cristale piezoelectrice supuse câmpurilor inițiale;
- studierea propagării undelor Leaky SAW (pseudo SAW);
- studierea proprietăților fizice ale diverselor materiale piezoelectrice și evidențierea avantajelor și dezavantajelor lor în funcție de destinație;
- studiul stabilității propagării undelor (în sensul unicității soluțiilor problemelor omogene) în formularea incrementală;
- studiul instabilității propagării undelor (în sensul neunicității soluțiilor problemelor omogene) în formularea incrementală;

Bibliografie

- [1] Ana, I., *Contribuții la electrodinamica mediilor continue deformabile, teză de doctorat*, Universitatea din București, Facultatea de Matematică-Informatică, 2010.
- [2] Ana, I., *The generalized Rayleigh wave in an isotropic solid subject to initial fields*, Annals of the University of Bucharest, 1(LIX), 2010, 191-210.
- [3] Băeșu, E., Fortuné, D., Soós, E., *Incremental behaviour of hyperelastic dielectrics and piezoelectric crystals*, ZAMP 54, 2003, 1017-1034.
- [4] Boulanger, Ph., Hayes, M., *Electromagnetic plane waves in anisotropic media, An approach using bivectors*, Phil.Trans.R.Soc.Lond., 1990, 335-393.
- [5] Boulanger, Ph., Hayes, M., *Bivectors and waves in mechanics and topics*, Chapman and Hall, 1993.
- [6] Boulanger, Ph., Destrade, M., Hayes, M., *Inhomogeneous „longitudinal” circularly-polarized plane waves in anisotropic elastic crystals*, Acta Acustica, Volume 92, Nr. 2, 2006, 247-255.
- [7] Eringen, A.C., Maugin, G.A., *Electrodynamics of continua*, vol. I. Springer, New York, 1990.
- [8] Gibbs, J.W., *Elements of vector analysis*, în “Scientific papers”, vol.2, part 2, Dover Publications, New York, 1961.
- [9] Hamilton, W.R., *Lectures on quaternions*, Hodges and Smith, Dublin, 1853.
- [10] Hayes, M., *Inhomogeneous plane waves*, Archive for rational Mechanics and analysis, Springer, vol.85, nr.1, 1984, 41-79.
- [11] **Harabagiu, L.**, *Inhomogeneous Plane Waves in Cubic Crystals subject to a Bias*, International Scientific Journal, Journal of Mathematics, vol. 1, 2015, 1-11
- [12] **Harabagiu, L.**, Simionescu-Panait, O., *Propagation of inhomogeneous plane wave in isotropic solid crystals*, An. Șt. Univ. Ovidius, Constanța, vol. XXIII(3), 2015, 55-64.
- [13] Royer, D., Dieulesaint, E., *Elastic waves in solids, vol. I-Free and guided propagation*, Springer, Berlin, 2000.
- [14] Simionescu-Panait, O., *Waves in strained/polarized media*, in J.Yang(ed.), *Special topics in the theory of piezoelectricity*, Ed. J.Yang, Springer, New York, 2009, 169-246.
- [15] Simionescu-Panait, O., *TH-waves propagation in crystals subject to initial fields*, Bulletin of the Transilvania University of Brașov, vol.5(54), 2012, 259-274.
- [16] Simionescu-Panait, O., **Harabagiu, L.**, *Propagation of inhomogeneous plane waves in monoclinic crystals subject to initial fields*, Annals of the University Bucharest(mathematical series), vol.5(LXIII), Nr.2, 2014, 367-381.
- [17] Synge, J.L., *The Petrov classification of gravitational fields*, Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, A, vol.15, 1964.