Universitatea din București

Facultatea de Matematică și Informatică

Teză de doctorat

Rezumat

Optimizare și analiza statistică a datelor privind durata de viață

Doctorand:
Mircea Drăgulin

Conducător Științific:
Prof. Dr. Vasile Preda

București 2014

Cuprins

Capitolul 1

Introducere

Analiza duratelor de viață este o ramură extinsă și populară fiind folosită în multe domenii cum ar fi medicină, inginerie, asigurări, industrie, economie, management, științele mediului și științele sociale. De exemplu, în studiul potențialului risc de moarte cauzat de boală, de interes este timpul de supraviețuire a bolnavilor, măsurat de la data diagnosticului, sau compararea tratamentelor pentru o boală în termeni de repartiții de supraviețuire pentru pacienții care primesc tratamente diferite. Un alt exemplu este interesul demografilor pentru durata unei anumite "stări" cum ar fi căsătoria. Se alege un an și se contabilizează căsătoriile din acel an. De interes este durata căsătoriei care poate să se încheie cu anulare, divorț sau moartea unuia din parteneri. Un exemplu important este din industrie. Rezistența materialelor sau a unor componete dintr-un sistem este observată în condiții de laborator până când acestea cedează. Duratele de viață în acest caz se mai numesc și durate de defecțiune deoarece când un obiect înceteaza să mai funcționeze corespunzător, spunem că s-a defectat *Jerald F. Lawless* [79].

Multe modele statistice cât și metode de analiză a datelor de supraviețuire au fost dezvoltate de-a lungul timpului. Astfel pentru ultimul exemplu, o repartiție care modelează cedarea materialelor este repartiția Birnbaum Saunders [22, 23]. Dar cea mai utilizată și răspândită repartiție asociată datelor de supraviețuire este cea exponențiala. Alte repartiții folosite sunt repartiția gamma, Weibull și log-normal *Barlow R.E., Proschan F.* [16].

1.1 Actualitatea temei

Datorită dezvoltării rapide a tehnologiei și a sistemelor, a apărut necesitatea dezvol-tării de noi modele matematice asupra duratelor de viața și aplicarea acestora în cadrul proceselor stocastice, în particular asupra proceselor de reînnoire. Procesele de reînnoire sunt importante în fiabilitate și mentenanța sistemelor, un obiectiv de urmărit fiind: când ar trebui schimbate piesele și câte piese de schimb ar trebui să avem în depozit la fiecare moment t?. În multe situații, defecțiunea unei piese în timpul activității este costisitoare și periculoasă. Dacă piesa respectivă este caracterizată de rate de defecțiune (rate de hazard) care cresc cu timpul, este întelept să înlocuim unitatea înainte de a se uza prea mult *Barlow R.E., Proschan F.* [16]. Repartiția exponențiala deși cea mai răspândită și populară în analiza duratelor de viața nu este cea mai potrivită în teoria proceselor de reînnoire deoarece rata de hazard care ne dă probabilitatea de defecțiune imediată a unui obiect de vârstă x, notată de obicei cu h(x), este constantă. Înseamna că probabilitatea de defecțiune imediată a unui obiect care are repartiția vieții, repartiția exponențială, nu depinde de vârsta acestuia, ceea ce face ca problemele matematice apărute să fie triviale *Cox D.R.* [30]. În cazul acesta, procesul de reînnoire, este procesul Poisson. Alte repartiții folosite sunt repartiția Weibull, repartiția Birnbaum Saunders (probleme de vibrații), repartiția gamma propusă de Z. W. Birnbaum și Saunders pentru modelarea problemelor de rezistență în anumite cazuri *Barlow R.E., Proschan F.* [16].

Recent, *Ghitany M.E., Atieh B., S. Nadarajah* [63] au arătat că repartiția Lindley introdusă în 1958 [85, 86] este un model matematic mai bun decât repartiția exponențială pentru modelarea datelor de viață, repartiția Lindley fiind cu proprietăți matematice mai flexibile decât cea exponențială și are rata de hazard crescătoarea-cu cât este mai în vârstă componenta cu atât este mai probabil ca defecțiunea să aibă loc imediat. Dar, în cadrul sistemelor de viață este mai plauzibil ca rata de hazard să aibă forme diferite în funcție de parametrii, nu doar să fie crescătoare, descrescătoare și să fie sau unimodală sau bimodală *Gayan Warahena-Liyatange, Mavis Pararai* [61]. Astfel a apărut necesitatea determinării de noi repartiții de viață care să fie mai flexibile, cu rate de hazard de forme diferite și care să modeleze cât mai multe situații. Considerând acestea obiectivul lucrării este de a introduce și cerceta noi modele matematice ale duratelor de viață pornind de la repartiția Lindley, prin intermediul metodelor statistico-matematice și aplicarea acestora în cadrul teoriei proceselor de reînnnoire și la unele probleme de optimizare.

1.2 Obiectivele lucrării

1. Construirea unei familii mai generale de repartitții de tip Lindley pe baza căreia se obțin rezultatele originale ale tezei
2. Deducerea repartiției unor variabile aleatoare ce reprezintă maximul sau minimul a unui număr aleator de variabile aleatoare independente identic repartizate
3. Stabilirea proprietăților matematice ale acestor repartiții
4. Obținerea unor algoritmi de generare pentru aceste repartiții
5. Aplicarea rezultatelor obținute în cadrul teoriei proceselor de reînnoire
6. Optimizarea unor sisteme de fiabilitate, modele de mentenanță

1.3 Noutatea științifică

Pornind de la repartiția Lindley, în literatură au apărut noi repartiții cum ar fi o generalizare a repartiției Lindley cu proprietățile ratei de hazard mai bune decât celei a repartiției gamma, lognormal sau Weibull *Nadarajah S., Hassan S., Bakouch, Rasool Tahmasbi* [114], repartiția discret Poisson-Lindley *Sankaran M.* [113], repartiția exponențială Poisson Lindley introdusă în 2013 de către *Barreto-Souza* și *Bakouch* [18], repartiția zero trunchiată Poisson Lindley *Ghitany M.E., Al-Mutairi D.K., Nadarajah S.* [64], ultimele două cu aplicații în fiabilitate și asigurări. Altă repartiție introdusă recent, în 2012, este repartiția Lindley geometrică cu aplicații în fiabiliate și supraviețuire *Hojjatollah Zakerzadeh, Eisa Mahmoudi* [76]. O altă generalizare este cea propusă în 2013, care se reduce nu numai la repartiția Lindley ci și la repartiția exponențială *Rama Shanker, Shambhu, Ravi Shanker* [106]. Altă idee de a determina alte repartiții este de a aplica o transformare putere, astfel a apărut repartiția putere Lindley *Ghitany M.E., Al-Mutairi D.K., Balakrishnan N., Al-Enezi* [65] și repartiția exponențială putere Lindley *Samir K., Ashour, Mahmoud*

A., Eltehiwy [112], ultima ca o alternativă la repartițiile gamma, Weibull, Lindley exponențială și lognormală.
Alte repartiții apărute sunt repartița Lindley negativ binomială (2010 *Hassein Zamani, Noriszura Ismail* [77], *Dominique Lord, Srinivas Reddy Geedipally* [38]), repartiția quasi Lindley geometrică (2014 *Diab L.S., Hiba Z. Muhammed* [37]), repartița Lindley de doi parametri propusă de *Ghitanny M.E., Alqallaf F., Al-Mutairi D.K., Husain H.A.* (2011 [66]) și repartiția Lindley Beta (2014 *Faton Merovcis, Vikas Kumar Sharma* [54]).

Noutatea științifică din această lucrarea este introducerea de noi repartiții pornind de la repartiția Lindley, repartiți cu proprietăți matematice mai flexibile și cu rate de hazard de forme diferite în funcție de valorile parametrilor făcând posibilă modelarea multor date de viață. Au fost de asemenea propuși algoritmi de simulare statistică, dar și metode de estimare a parametrilor. Aceleași modele au fost abordate, cercetate și prin metode specifice teoriei proceselor de reînnoire.

Astfel, am introdus o nouă generalizare a repartiției Lindley cât și transformata sa putere. Deoarece posibilitatea de a determina repartiția duratei de viață a unui sistem este aceea de a o exprima ca maximul sau minimul unui vector aleator ale cărei componente caracterizează duratele de viață ale subunităților sistemului respectiv, am mixat noua repartiție Lindley generalizată cu reparțiile zero trunchiate Poisson, binomial și geometric. Rezultatele obținute au fost aplicate în cadrul proceselor de reînnoire.

Aplicații

Rezultatele lucrării pot fi aplicate la analiza și proiectarea unor sisteme în fiabilitate și mentenanța sistemelor cu durata vieții caracterizată de noile repartiții determinate: *repartiția Lindley generalizată, repartiția Lindley generalizată putere, repartiția Lindley generalizată Poisson Max, repartiția Lindley generalizată Poisson Min, repartiția Lindley generalizată Binomial Max, repartiția Lindley generalizată Binomial Min, repartiția Lindley generalizată Geometric Max și repartiția Lindley generalizată Geometric Min*. Modelele matematice propuse pot servi în calitate de modele utilizate la descrierea unor date statistice, privin duratele de supraviețuire de viața.

1.4 Structura tezei de doctorat

Lucrarea conține 7 capitole și Bibliografie, **primul capitol** fiind introducerea.

În **capitolul al doilea** este prezentată repartiția Lindley împreună cu câteva proprietăți. Acest capitol se bazează pe lucrările: Lindley [85, 86], Ghitany M.D., B. Atieh și Nadarajah S. [63].

În capitolul al treilea generalizăm repartiția Lindley. Pentru această repartiție sunt **stabilite proprietăți matematice** pornind de la lucrările [29, 63]

1. **determinarea ratei de hazard și a mediei de viață reziduală**
2. **stabilirea momentelor de ordine r, media și dispersia, momentelor centrate de ordine r**
3. **determinarea transformatei Laplace-Stieltjes și a convoluțiilor**
4. **entropia Shannon, caracterizare**

5. **entropia Renyi**
6. **determinarea unor algoritmi de generare de date pentru noua repartiție Lindley generalizată**
7. **estimarea parametrilor**

Deoarece statisticile de ordine sunt importante în cadrul studiului repartițiilor, pornind de la rezultatele obținute de către Gokhan Gokdere (2014 [69]), Nadarajah (2010 [92]), Bekci (2009 [21]), Afity (2006 [2]), Childs și Balakrishnan (1998 [27]), Arnold B.C., Balakrishnan N., Nagaraja H.N.(1992 [6]), Joshi și Balakrishnan N. (1982 [11]) au fost **determinate statisticile de ordine, momentele statisticilor de ordine, statisticile de ordine trunchiate și momentele statisticilor de ordine trunchiate pentru repartiția Lindley generalizat**.

Alt **rezultat original** pornind de la repartiția Lindley generalizată este **estimarea bayesiană și non-bayesiană pentru două populații Lindley generalizat folosind schema comună de cenzurare de tipul II, determinându-se pentru parametrii și fiabilitate intervale de încredere**. Astfel se extind mai multe lucrări recente. Acest capitol are la bază lucrările Drăgulin M. [39]., Drăgulin M., Preda V. [40], Drăgulin M., Trandafir R. [41], Drăgulin M. [43], Drăgulin M., Trandafir R., Preda V. [45], Drăgulin M., Băncescu I. [46].

Capitolul al patrulea prezintă repartiția putere a unei variabile aleatoare repartizată Lindley generalizat abordare folosită recent pentru altă densitate de repartiție de Ghitany M.E., Al-Muhairi D.K., Balakrishnan N., Al-Enzei (2013 [65]). Acest capitol are la bază lucrările Drăgulin M. [43], Drăgulin M., Trandafir R. [41], Drăgulin M., Preda V. [40]. S-au stabilit noi rezultate privind

1. **rata de hazard**
2. **momentele, media și dispersia**
3. **entropia Renyi**
4. **algoritm de generare de date**
5. **statistici de ordine-repartițiile asimptotice**
6. **estimatori de verosimilitate maximă**

Capitolul al cincelea are la bază lucrările Drăgulin M., Preda V. [39], Drăgulin M., Trandafir R. [41], Drăgulin M. [43], Drăgulin M. [47]. În acest capitol au fost **mixată repartiția Lindley generalizată cu repartițiile Poisson zero trunchiată, Binomial zero trunchiată și Geometric zero trunchiată** obținându-se **noi repartiții**

1. Repartiția Lindley generalizat Poisson Min și Max
2. Repartiția Lindley generalizat Binomial Min și Max
3. Repartiția Lindley generalizat Geometric Min și Max

Pentru fiecare din aceste repartiții au fost **determinați algoritmi de generare de date, rata de hazard, momentele, media și dispersia, transformata Laplace-Stieltjes, entropia Shannon și teoreme de tip Shannon, entropia Renyi**. De asemenea s-au obținut **teoreme de tip Poisson** pentru repartițiile Lindley generalizat Binomial Min și Poisson Min.

Capitolul al șaselea are la bază Drăgulin M., Preda V. [40], Drăgulin M., Trandafir R., [41], Drăgulin M. [43], Drăgulin M. [47] Drăgulin M., Băncescu I., Dedu S. [48]. Acest capitol prezintă în secțiunea 6.1 noțiuni generale pentru procese de reînnoire-Lam Y. (2007 [83]), Barlow R.E., Proschan F., Hunter L.C. (1987 [16]), Ross M. (1996 [111]), Văduva I. ([125]). În celelalte secțiuni s-au obținut **noi procese de reînnoire de tip Lindley generalizat Poisson Min și procese de reînnoire de tip Binomial Min**.

Capitolul al șaptelea are la bază Drăgulin M., Preda V. [40], Drăgulin M., Trandafir R., [41], Drăgulin M. [43], Drăgulin M. [47], Drăgulin M., Băncescu I., Dedu S. [48], Drăgulin M. [49], Băncescu I., Drăgulin M. [19]. **Ultimul capitol** este legat de **optimizarea unor sisteme de mentenanță, a unei rețele ad-hoc având la bază repartiția Lindley generalizată** și **discutarea fiabilității unor sisteme cu durata vieții componentelor repartizată Lindley generalizat**. Acest capitol extinde modelele propuse în Nakagawa T. (2007 [94]), Lam Y. (2007 [83]), Arnljot Hoyland, Marvin Rausand (2004 [7]), Ben Liang, Zygmunt J.Haas (2003 [20]).

Capitolul 2

Repartiția Lindley

Repartiția Lindley a apărut prima oară în anul 1958, fiind obținută folosind teorema lui Bayes [85, 86].

Teorema 2.1. *Fie X o variabilă aleatoare repartizată Lindley de parametru θ, $X \sim L(\theta)$, atunci funcția de densitate (pdf) este*

$$f(x) = \frac{\theta^2}{\theta+1}(1+x)e^{-\theta x} \tag{2.1}$$

iar funcția de repartiție (cdf)

$$F(x) = 1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1}e^{-\theta x} \quad x > 0, \theta > 0 \tag{2.2}$$

Teorema 2.2. *Momentele de ordin k ale variabilei aleatoare $X \sim L(\theta)$, $\theta > 0$ sunt*

$$\mu_k = E(T^k) = \frac{k!(\theta+k+1)}{\theta^k(\theta+1)}, \quad \theta > 0, \quad k = 1, 2, ...$$

În particular, avem următoarele

Corolar 2.1. *Media, momentele de ordin 2, 3, și 4 ale lui $X \sim L(\theta)$ sunt*

$$\mu = \mu_1 = \frac{\theta+2}{\theta(\theta+1)}$$

$$\mu_2 = \frac{2(\theta+3)}{\theta^2(\theta+1)}$$

$$\mu_3 = \frac{6(\theta+4)}{\theta^3(\theta+1)}$$

$$\mu_4 = \frac{24(\theta+5)}{\theta^4(\theta+1)}$$

iar varianța

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu^2 = \frac{\theta^2+4\theta+2}{\theta^2(1+\theta)^2}$$

Capitolul 3

Repartiția Lindley generalizată

Repartiția Lindley generalizată apare ca o necesitate la problema determinării unei noi repartiții care să fie mai flexibilă cu posibilitatea de modelare a mai multor situații, durate de viață.

Definiție 3.1. *Fie X o variabilă aleatoare. X este repartizată Lindley generalizat de parametri $\alpha, \theta > 0$, notată $GL(\alpha, \theta)$. Atunci densitatea lui X este*

$$f(x) = \frac{\theta^2}{\alpha\theta + 1} e^{-\theta x}(\alpha + x)$$

iar funcția de repartiție

$$F(x) = 1 - \frac{\alpha\theta + 1 + \theta x}{\alpha\theta + 1} e^{-\theta x} \quad x > 0, \alpha, \theta > 0$$

3.1 Proprietăți

3.1.1 Rata de hazard și media de viață reziduală

Propoziție 3.1. *Rata de hazard a repartiției Lindley generalizată, $GL(\alpha, \theta)$, $\alpha, \theta > 0$, este*

$$h(x) = \frac{\theta^2(\alpha + x)}{\alpha\theta + 1 + \theta x} \quad x > 0$$

Propoziție 3.2. *Media de viață reziduală a lui $GL(\alpha, \theta)$ este*

$$m(x) = \frac{\alpha\theta + 2 + \theta x}{\theta(\alpha\theta + 1 + \theta x)} \quad x > 0$$

3.1.2 Momentele, media și dispersia

Momentele de ordin r ale repartiției Lindley generalizat sunt

Teorema 3.1.

$$\mu_r = \frac{\theta^2}{\alpha\theta + 1} \alpha^{r+2} \Gamma(r + 1) \Psi(r + 1, r + 3, \alpha\theta)$$

3.1.3 Transformata Laplace-Stieltjes și convoluții

Propoziție 3.3. *Transformata Laplace-Stieltjes a lui $GL(\alpha, \theta)$ este*

$$\varphi(s) = \frac{\theta^2[\alpha(s+\theta)+1]}{(\alpha\theta+1)(s+\theta)^2}$$

Propoziție 3.4. *Convoluția repartiției Lindley generalizat cu ea însăși de n ori este*

$$GL(\alpha, \theta)^{*n} = \sum_{k=0} nC_n^k p^k (1-p)^{n-k} Gamma(2n-k, \theta)$$

unde $Gamma(n, \theta)$ este repartiția gamma, iar $p = \dfrac{\alpha\theta}{\alpha\theta+1}$

3.1.4 Entropia Shannon. Caracterizare

Teorema 3.2. *Entropia Shannon a repartiției Lindley generalizat este*

$$H(f) = -ln\frac{\theta^2}{\alpha\theta+1} + \frac{\alpha\theta+2}{\alpha\theta+1} - \frac{\alpha\theta ln\alpha + ln\alpha + 1 - e^{\alpha\theta}Ei(-\alpha\theta)}{\alpha\theta+1}$$

unde $Ei(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt$ este funcția integral exponențială.

3.1.5 Entropia Renyi

Entropia Renyi asociată repartiției Lindley generalizat este dată de următoarea propoziție

Propoziție 3.5.

$$\mathcal{J}_R(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma}\left\{2\gamma ln\theta + \alpha\theta\gamma + ln\Gamma(\gamma+1, \theta\gamma\alpha) - \gamma ln(\alpha\theta+1) - (\gamma+1)ln\theta\gamma\right\} \quad \gamma > 0, \gamma \neq 1$$

3.2 Estimare și generare de date

Metoda verosimilității maxime

Presupunem că n componente independente și identic repartizate, ale căror durate de viață sunt repartizate $GL(\alpha, \theta)$, sunt supuse la stres. Fie $x_1, x_2, ..., x_n$ timpii de defecțiune ale componentelor și fie $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Funcția de verosimilitate maximă este

$$L(\alpha, \theta) = \frac{\theta^{2n}}{(\alpha\theta+1)^n} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} (\alpha + x_i)$$

Generarea de date se face prin metoda directă și metoda compunerii.

3.3 Statistici de ordine

3.3.1 Momentele statisticilor de ordine

Fie $X_1, X_2, ..., X_n \sim GL(\alpha, \theta)$ și $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots X_{n:n}$ statisticile de ordine corespunzătoare. În această secțiune sunt determinate densitățile comune ale statisticilor de ordine, densitățile statisticilor de ordine maxim și minim, precum și momentele corespunzătoare.

Teorema 3.3. *Densitatea statisticii de ordine $X_{r:n}$, $1 \leq r \leq n$ este*

$$f_{X_{r:n}}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\frac{\theta^2}{(\alpha\theta+1)^{n-r+1}}e^{-\theta(n-r+1)x}(\alpha+x)(\alpha\theta+1+\theta x)^{n-r} \cdot \Big[1-\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Big]^{r-1}, \quad x>0$$

unde $\Gamma(\cdot)$ este funcția gamma, iar $\Psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ funcția Kummer.

Teorema 3.4. *Densitatea lui $X_{r:n}$ și $X_{s:n}$, $1 \leq r < s \leq n$ este*

$$f_{X_{r:n},X_{s:n}}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\frac{\theta^4(\alpha+x)(\alpha+y)(\theta\alpha+1+\theta x)^{n-s}}{(\alpha\theta+1)^{n-s+2}}e^{-\theta(x+y+(n-s)x)} \cdot \Big[1-\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Big]^{r-1}\Big[\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}-\frac{\alpha\theta+1+\theta y}{\alpha\theta+1}e^{-\theta y}\Big]^{s-r-1}$$

Teorema 3.5. *Densitatea de repartiție a lui $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, ..., X_{r_d:n}$, $1 \leq d \leq n, 0 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots r_d < r_{d+1} = n+1$*

$$f_{X_{r_1:n},X_{r_2:n},\ldots,X_{r_d:n}}(x_1,x_2,...,x_d) = n!\frac{\theta^2}{\alpha\theta+1}e^{-\theta\sum\limits_{i=1}^{d}x_i}\prod_{i=1}^{d}(\alpha+x_i)\prod_{i=1}^{d+1}\frac{1}{(r_i-r_{i-1}-1)!} \cdot \Big[\frac{\alpha\theta+1+\theta x_{i-1}}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x_{i-1}}-\frac{\alpha\theta+1+\theta x_i}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x_i}\Big]^{r_i-r_{i-1}-1}, \quad x>0$$

3.3.2 Momentele statisticilor de ordine trunchiate

Teorema 3.6. *Momentul statisticii de ordine trunchiată la stânga pentru repartiția Lindley generalizată este*

$$\mu_{s:n|r:n} = \theta^2(s-r)C_{n-r}^{n-s}\sum_{k=0}^{s-r-1}\sum_{j=0}^{n+k-s}C_{s-r-1}^{k}C_{n+k-s}^{j}(-1)^k\Big[(\alpha\theta+1+\theta t)e^{-\theta t}\Big]^{s-k-n-1}\theta^{n+k-s} \cdot \Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{n+k-s-j}\Big\{\alpha\Gamma(j+2,\theta(n+k+1-s)t)\Big[\theta(n+k+1-s)\Big]^{-(j+2)} + \Gamma(j+3,\theta(n+k+1-s)t)\Big[\theta(n+k+1-s)\Big]^{-(j+3)}\Big\}$$

unde $\Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}dt, a>0$ este funcția gamma incompletă.

Teorema 3.7. *Momentul statisticii de ordine trunchiată la dreapta pentru repartiția Lindley generalizată este*

$$\mu_{r:n|s:n} = (s-r)C_{s-1}^{r-1}\theta^2(\alpha\theta+1)^{r-s-k}\Big[1-\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Big]^{1-s}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-r-1}\sum_{i=0}^{k+j}C_{r-1}^{k}C_{s-r-1}^{j}C_{k+j}^{i}(-1)^{k+j}$$

$$\cdot\Big[(\alpha\theta+1+\theta x)e^{-\theta x}\Big]^{s-r-j-1}\theta^{k+j}\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k+j-1}\Big\{\alpha\gamma(i+2,\theta(k+j+1)x)\Big[\theta(k+j+1)\Big]^{-(i+2)}$$

$$+\gamma(i+3,\theta(k+j+1)x)\Big[\theta(k+j+1)\Big]^{-(i+3)}\Big\}$$

unde $\gamma(s,t)=\int_0^t x^{s-1}e^{-x}dx, s>0$ *este funcția gamma incompletă inferioară.*

3.4 Estimarea bayesiană și non-bayesiană pentru două populații Lindley generalizat folosind schema comună de cenzurare de tipul II

Presupunem $X_1,...X_m$ duratele de viață a m specimene a produsului A_1, variabile aleatoare independente identic repartizate cu funcția de repartiție $F(x)$ și densitate $f(x)$, iar $Y_i,...,Y_n$ duratele de viață a n specimene a unui alt produs A_2, care sunt variabile aleatoare independente identic repartizate cu funcția de repartiție $G(x)$ și densitate $g(x)$.

Fie $M_r=\sum_{i=1}^{r}Z_i$- numărul de $X-$defecțiuni în W și $N_r=\sum_{i=1}^{r}(1-Z_i)=r-M_r$- numărul de $Y-$defecțiuni în W.

3.4.1 Estimatori de verosimilitate maximă

Presupunem că cele două populații sunt repartizate Lindley generalizat cu următoarele funcții de repartiție $F(x;\alpha_1,\theta_1)=F_1(x)$ și $G(x;\alpha_2,\theta_2)=F_2(x)$, iar densitățile de probabilitate sunt $f=f_1, g=f_2,\quad \alpha_i,\theta_i>0,\quad x>0,\quad i=1,2$

Propoziție 3.6. *Funcția de verosimilitate pentru (Z,W) este*

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2,w,z)=\frac{m!n!\theta_1^{2m_r}\theta_2^{2n_r}}{(m-m_r)!(n-n_r)!(\alpha_1\theta_1+1)^{m_r}(\alpha_2\theta_2+1)^{n_r}}\prod_{i=1}^{r}\Big\{[e^{-\theta_1 w_i}(\alpha_1+w_i)]^{z_i}$$

$$\times[e^{-\theta_2 w_i}(\alpha_2+w_i)]^{1-z_i}\Big\}\Big(1+\frac{\theta_1 w_r}{\alpha_1\theta_1+1}\Big)^{m-m_r}$$

$$\times e^{-\theta_1 w_r(m-m_r)}\Big(1+\frac{\theta_2 w_r}{\alpha_2\theta_2+1}\Big)^{n-n_r}e^{-\theta_2 w_r(n-n_r)} \tag{3.1}$$

3.4.2 Intervale de încredere bootstrap

Intervalul de încredere bootstrap Boot-p 100$(1-\alpha)$% pentru λ_i, notat cu $\left[\hat{\lambda}^*_{iL}, \hat{\lambda}^*_{iU}\right]$, este

$$[\hat{\lambda}^*_{iL}, \hat{\lambda}^*_{iU}] = \left[\hat{\lambda}_i^{*([r_0\alpha/2])}, \hat{\lambda}_i^{*([r_0(1-\frac{\alpha}{2})])}\right], \quad i = \overline{1,4}$$

Intervalul de încredere bootstrap-t 100$(1-\alpha)$% pentru λ_i, notat $\left[\hat{\lambda}^*_{i,tL}, \hat{\lambda}^*_{i,tU}\right]$, este

$$\left[\hat{\lambda}_i + T_{\hat{\lambda}_i^*}^{([r_0\frac{\alpha}{2}])}\hat{s}_{\hat{\lambda}_i}, \hat{\lambda}_i + T_{\hat{\lambda}_i^*}^{([r_0(1-\frac{\alpha}{2})])}\hat{s}_{\hat{\lambda}_i}\right], i = 1,4$$

3.4.3 Estimatori bayesieni

Considerăm că $\lambda_i, i = \overline{1,4}$ au repartiția apriori, repartiția gamma.

Estimatorul bayesian pentru orice funcție depinzând de $\lambda_i, i = \overline{1,4}$ folosind funcția pierdere de eroare pătratică și funcția de pierdere LINEX sunt determintați.

3.4.4 Estimarea fiabilității stres-rezistență $R = P(Y < X)$

Estimatorul de verosimilitate maximă pentru R

Presupunem că X și Y sunt repartizate Lindley generalizat cu densitățile $f_1(x)$ și $f_2(y)$. X și Y au $F_1(x)$, respectiv $F_2(y)$ ca funcții de repartiție Lindley generalizat.

$$R = P(Y < X) = \frac{\theta_1^2[(\theta_1+\theta_2)^2(\alpha_2\theta_2+1)(\alpha_1-1) - \theta_2(\alpha_1\theta_1+1) - \theta_2^2\alpha_1]}{(\alpha_2\theta_2+1)(\alpha_1\theta_1+1)(\theta_1+\theta_2)^3}$$

Folosind estimatorii de verosimilitate maximă $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ obținem estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{R}$ pentru R.

Intervale de încredere pentru R

Intervalul de încredere Boot-p 100$(1-\alpha)$% pentru R este

$$\left[\hat{R}^{*[r_0\alpha/2]}, \hat{R}^{*[r_0(1-\frac{\alpha}{2})]}\right]$$

Intervalul de încredere Boot-t 100$(1-\alpha)$% pentru R este

$$\left[\hat{R} + T^{*[r_0\alpha/2]}\sqrt{Var(\hat{R})}, \hat{R} + T^{*[r_0(1-\frac{\alpha}{2})]}\sqrt{Var(\hat{R})}\right]$$

Capitolul 4

Repartiția putere a unei variabile aleatoare repartizată Lindley generalizat

Teorema 4.1. *Variabila aleatoare X are o repartiție putere Lindley generalizat, $X \sim PGL(\alpha, \theta, \beta), \alpha, \theta, \beta > 0$, dacă densitatea ei este de forma*

$$f(x) = \frac{\alpha\theta^2\beta}{\alpha\theta + 1}x^{\beta-1}e^{-\theta x^\beta} + \frac{\beta\theta^2}{\alpha\theta + 1}x^{2\beta-1}e^{-\theta x^\beta}$$

iar funcția de repartiție este

$$F(x) = 1 - (1 + \frac{\theta x^\beta}{\alpha\theta + 1})e^{-\theta x^\beta}, \quad x > 0$$

4.1 Proprietăți

4.1.1 Rata de hazard

Propoziție 4.1. *Rata de hazard a lui $PGL(\alpha, \theta, \beta)$ este*

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\beta x^{\beta-1}\theta^2(\alpha + x^\beta)}{1 + \theta(\alpha + x^\beta)} \quad x > 0, \alpha, \theta, \beta > 0$$

unde $S(x) = \bar{F}(x) = 1 - F(x) = (1 + \dfrac{\theta x^\beta}{\alpha\theta + 1})e^{-\theta x^\beta}$ este funcția de supraviețuire.

4.1.2 Momentele, media și dispersia

Momentele de ordin k ale repartiției putere Lindley generalizat sunt

Teorema 4.2.

$$\mu_k = \frac{\alpha\theta^{1-\frac{k}{\beta}}}{\alpha\theta + 1}\Gamma\Big(\frac{k}{\beta} + 1\Big) + \frac{\theta^{-\frac{k}{\beta}}}{\alpha\theta + 1}\Gamma\Big(\frac{k}{\beta} + 2\Big)$$

4.1.3 Entropia Renyi

Propoziție 4.2. *Entropia Renyi a lui $PGL(\alpha, \theta, \beta)$ este*

$$\mathcal{J}_R(\gamma)=\frac{1}{1-\gamma}ln\Bigg\{\frac{\alpha^{\gamma}\theta^{\frac{\gamma(\beta+1)-1}{\beta}}\beta^{\gamma-1}}{(\alpha\theta+1)^{\gamma}\gamma^{\frac{\gamma(\beta-1)+1}{\beta}}}\Gamma\Big(\frac{\gamma(\beta-1)+1}{\beta}\Big)+\frac{\beta^{\gamma-1}}{(\alpha\theta+1)^{\gamma}}\frac{\theta^{\frac{\gamma-1}{\beta}}}{\gamma^{\frac{\gamma(2\beta-1)+1}{\beta}}}$$

$$\cdot\,\Gamma\Big(\frac{\gamma(2\beta-1)+1}{\beta}\Big)\Bigg\},\quad \gamma>0,\gamma\neq 1,\ \textit{iar pentru}\ \gamma<1,\beta>1-\frac{1}{\gamma}$$

4.2 Generarea de date

Generarea de date pentru repartiția putere Lindley generalizat se poate face folosind metoda directă.

4.3 Statistici de ordine

Teorema 4.3. *Repartițiile asimptotice ale lui $X_{1:n}$ și $X_{n:n}$ sunt*

$$\lim_{n\to\infty}P\Big\{\frac{X_{1:n}-a_n}{b_n}\leq x\Big\}=1-e^{-x^{\beta}} \tag{4.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}P\Big\{\frac{X_{n:n}-c_n}{d_n}\leq x\Big\}=exp\Big[-exp(-x)\Big] \tag{4.2}$$

unde $a_n=0, b_n=F^{-1}(1/n), c_n=F^{-1}(1-1/n), d_n=1/nf(c_n)$ *și F(x)=1-S(x) este funcția de repartiție a lui* $PGL(\alpha,\theta,\beta)$

4.4 Estimatori de verosimilitate maximă

Presupunem că n componente independente și identic repartizate, ale căror durate de viață sunt repartizate $PGL(\alpha,\theta,\beta)$, sunt supuse la stres. Fie $x_1,x_2,...,x_n$ timpii de defecțiune ale componentelor și fie $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Funcția de verosimilitate maximă este

$$L(\alpha,\theta,\beta)=\beta^n\Big(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\beta-1}\Big)\frac{\theta^{2n}}{(1+\alpha\theta)^n}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+x_i^{\beta})e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}$$

Capitolul 5

Repartiții mixate ale duratelor de viață

5.1 Repartiția Lindley generalizat Poisson Max

Teorema 5.1. *Fie $X \sim$ Lindley generalizat Poisson Max$(\alpha, \theta, \lambda)$. Atunci densitatea de repartiție a lui X este*

$$f(x) = \frac{\lambda\theta^2 e^{-\theta x}(x+\alpha)}{(\alpha\theta+1)(e^\lambda - 1)} e^{\lambda[1-\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}]}$$

iar funcția de repartiție

$$F(x) = \frac{e^{\lambda[1-\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}]} - 1}{e^\lambda - 1}, \quad x > 0, \alpha, \theta, \lambda > 0$$

5.1.1 Proprietăți

Fie $X \sim$ Lindley generalizat Poisson Max$(\alpha, \theta, \lambda)$, $\alpha, \theta, \lambda > 0$.

Propoziție 5.1. *Rata de hazard a lui $X \sim LindleyGeneralizatPoissonMax(\alpha, \theta, \lambda)$ este*

$$h(y) = \frac{\lambda\theta^2 e^{-\theta y}(y+\alpha)}{\alpha\theta+1} \frac{e^{\lambda[1-\frac{\alpha\theta+1+\theta y}{\alpha\theta+1}e^{-\theta y}]}}{e^\lambda - e^{\lambda[1-\frac{\alpha\theta+1+\theta y}{\alpha\theta+1}e^{-\theta y}]}}$$

Propoziție 5.2. *Rata de hazard $h(x)$ este IFR pe intervalul $(0, \frac{1}{\theta} - \alpha)$, cu $\frac{1}{\theta} - \alpha > 0$.*

Teorema 5.2. *Momentele de ordin $r \geq 1$ sunt*

$$E(X^r) = \frac{\theta^2}{e^{-\lambda} - 1} \sum_{k\geq 1} \frac{(-\lambda)^k}{(k-1)!(\alpha\theta+1)^k} \Big\{ \theta^{k-1}\alpha\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{r+k} \Gamma(r+1)\Psi(r+1, r+k+1, k(\alpha\theta+1))$$
$$+ \theta^{k-1}\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{r+k+1}\Gamma(r+2)\Psi(r+2, r+k+2, k(\alpha\theta+1))\Big\}$$

unde $\Psi(a, b; u) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1}(1+t)^{b-a-1}e^{-ut}dt$ este funcția Kummer, iar $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$

Propoziție 5.3. *Transformata Laplace Stieltjes a repartiției Lindley generalizat Poisson Max este*

$$\varphi(s) = \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^k\theta^2}{(\alpha\theta+1)^k} \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \frac{(-\theta)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{k+1}\Gamma(k)\Psi(k, k+2, \alpha(s+\theta k))$$

5.1.2 Entropia Shannon. Caracterizare

Teorema 5.3. *Entropia Shannon a repartiției Lindley generalizat Poisson Max este*

$$H(f) = -ln\frac{\lambda\theta^2}{(\alpha\theta+1)(e^{\lambda}-1)} + \frac{\theta^3}{e^{-\lambda}-1}\sum_{k\geq 1}\frac{(-\lambda)^k}{(k-1)!(\alpha\theta+1)^k}\Big\{\theta^{k-1}\alpha\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k+1}\Psi(2,k+2,k(\alpha\theta+1))$$

$$+\,\theta^{k-1}\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k+2}2\Psi(3,k+3,k(\alpha\theta+1))\Big\}$$

$$-\sum_{k\geq 1}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}C_{k-1}^{i}(-1)^iC_i^j\frac{\theta^{j+2}\lambda^k}{(\alpha\theta+1)^{j+1}(e^{\lambda}-1)(k-1)!}\Big\{\alpha^{j+2}\frac{\pi}{(j+2)sin((j+2)\pi)}$$

$$\cdot\,{}_1F_1(j+2,j+3,\alpha\theta(i+1)) - \Gamma(j+2)[\theta(i+1)]^{-(j+2)}\Big[\Big[ln[\theta(i+1)]-\Psi(j+2)\Big]$$

$$+\frac{\alpha\theta(i+1)}{j+1}{}_2F_2(1,1;2,-j,\alpha\theta(i+1))\Big] + \alpha^{j+2}\frac{\pi}{(j+1)sin((j+1)\pi)}$$

$$\cdot\,{}_1F_1(j+1,j+2,\alpha\theta(i+1)) - \Gamma(j+1)[\theta(i+1)]^{-(j+1)}\Big[\Big[ln[\theta(i+1)]-\Psi(j+1)\Big]$$

$$+\frac{\alpha\theta(i+1)}{j}{}_2F_2(1,1;2,1-j,\alpha\theta(i+1))\Big]\Big\}$$

$$-\sum_{k\geq 1}\sum_{i=0}^{k}C_k^i(-1)^i\frac{\lambda^{k+1}\theta^{i+2}}{(\alpha\theta+1)^{i+1}(e^{\lambda}-1)(k-1)!}\Big[\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{i+2}\Psi(2,i+3,(i+1(\alpha\theta+1)))$$

$$+\,\alpha\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{i+1}\Psi(1,i+2,(i+1(\alpha\theta+1)))\Big]$$

unde

$${}_1F_1(a;b;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_kz^k}{(b)_kk!} \quad \textit{este funcția hipergeometrică confluentă}$$

$${}_pF_q(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n...(b_q)_n}\frac{z^n}{n!}$$

funcția hipergeometrică generalizată

cu $(a)_n = a(a+1)(a+2)...(a+n-1), n\geq 1, (a)_0 = 1$, *iar*

$$\Psi(z) = [ln\Gamma(x)]' = \frac{\Gamma(x)'}{\Gamma(x)} \quad \textit{funcția psi}$$

Propoziție 5.4. *Entropia Renyi a repartiției Lindley generalizat Poisson Max este*

$$\mathcal{J}_R(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma}ln\Big\{\frac{\lambda^{\gamma}\theta^{2\gamma}e^{-\gamma\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^{\gamma}(\alpha\theta+1)^{\lambda}}\sum_{k\geq 1}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{\gamma}C_{k-1}^iC_{\gamma}^j\alpha^{\gamma-j}(-1)^i$$

$$\cdot\,\frac{(\lambda\gamma)^{k-1}\theta^i}{(k-1)!(\alpha\theta+1)^i}\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{i+j+1}\Gamma(j+1)\Psi(j+1,j+i+2,(\gamma+i)(\alpha\theta+1))\Big\}, \quad \gamma>0,\gamma\neq 1$$

5.1.3 Generarea de date

Generarea de date se face prin metoda inversă, metoda respingerii și metoda compunerii.

5.2 Repartiția Lindley generalizat Poisson Min

Teorema 5.4. *Fie $X \sim$ Lindley Generalizat Poisson Min(α, θ, n). Atunci densitatea de repartiție a variabilei aleatoare Lindley generalizat Poisson Min este*

$$f(x) = \frac{\lambda\theta^2(\alpha + x)}{\alpha\theta + 1} e^{-\theta x} \frac{1}{e^\lambda - 1} e^{\lambda\left[\frac{\alpha\theta + 1 + \theta x}{\alpha\theta + 1} e^{-\theta x}\right]}$$

iar funcția de repartiție

$$F(x) = \frac{1}{e^\lambda - 1}\left[e^\lambda - e^{\lambda\frac{\alpha\theta + 1 + \theta x}{\alpha\theta + 1} e^{-\theta x}}\right], \quad x > 0, \alpha, \theta, \lambda > 0$$

5.2.1 Proprietăți

Fie $X \sim$ Lindley generalizat Poisson Min$(\alpha, \theta, \lambda)$, $\alpha, \theta, \lambda > 0$.

Propoziție 5.5. *Rata de hazard a lui X este*

$$h(x) = \frac{\lambda\theta^2(\alpha + x)e^{-\theta x}}{\alpha\theta + 1} \frac{e^{\lambda\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1} e^{-\theta x}}}{e^{\lambda\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1} e^{-\theta x}} - 1}$$

Teorema 5.5. *Momentele de ordin r ale repartiției sunt*

$$\begin{aligned}E(X^r) = \sum_{k\geq 1} \frac{\theta^2}{(\alpha\theta + 1)^k} \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\Big\{&\alpha\theta^{k-1}\Big(\frac{\alpha\theta + 1}{\theta}\Big)^{r+k}\Gamma(r+1)\Psi(r+1, r+k+1, k(\alpha\theta+1)) \\ &+ \theta^{k-1}\Big(\frac{\alpha\theta + 1}{\theta}\Big)^{r+k+1}\Gamma(r+2)\Psi(r+2, r+k+2, k(\alpha\theta+1))\Big\}\end{aligned}$$

unde $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx, s > 0$ este funcția gamma, iar $\Psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ funcția Kummer.

Transformata Laplace Stieltjes

Propoziție 5.6. *Transformata Laplace Stieltjes a repartiției Lindley generalizat Poisson Min este*

$$\begin{aligned}\varphi(s) = \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^k}{(\alpha\theta + 1)^k} \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \frac{\theta^{k+1}}{(k-1)!}\Big\{&\alpha\Big(\frac{\alpha\theta + 1}{\theta}\Big)^k\Psi(1, k+1, (s+\theta k)\frac{\alpha\theta + 1}{\theta}) \\ &+ \Big(\frac{\alpha\theta + 1}{\theta}\Big)^{k+1}\Psi(2, k+2, (s+\theta k)\frac{\alpha\theta + 1}{\theta})\Big\}\end{aligned}$$

5.2.2 Entropia Shannon. Caracterizare

Teorema 5.6. *Entropia Shannon a repartiției Lindley generalizat Poisson Min este*

$$
\begin{aligned}
H(f) = &-ln\frac{\lambda\theta^2}{(\alpha\theta+1)(e^\lambda-1)} + \sum_{k\geq 1}\frac{\theta^3}{(\alpha\theta+1)^k}\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\Big\{\alpha\theta^{k-1}\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{1+k}\Psi(2,k+2,k(\alpha\theta+1))\\
&+\theta^{k-1}\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k+2}2\Psi(3,k+3,k(\alpha\theta+1))\Big\}\\
&-\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{k+1}\theta^{k+2}}{(\alpha\theta+1)^{k+1}(e^\lambda-1)(k-1)!}\Big[\alpha\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k+1}\Psi(1,k+2,(k+1)(\alpha\theta+1))\\
&+\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k+2}\Psi(2,k+3,(k+1)(\alpha\theta+1))\Big]\\
&-\sum_{k\geq 1}\sum_{i=0}^{k-1}C_{k-1}^{i}\frac{\theta^{i+2}\lambda^k}{(\alpha\theta+1)^{i+1}(e^\lambda-1)(k-1)!}\Big\{\alpha^{i+2}\frac{\pi}{(i+1)sin((i+1)\pi)}\\
&\cdot {}_1F_1(i+1,i+2,\alpha\theta k)-\Gamma(i+1)[\theta k]^{-(i+1)}\Big[\Big[ln[\theta k]-\Psi(i+1)\Big]+\frac{\alpha\theta k}{i}{}_2F_2(1,1;2,1-i,\alpha\theta k\Big]\\
&+\alpha^{i+2}\frac{\pi}{(i+2)sin((i+2)\pi)}{}_1F_1(i+2,i+3,\alpha\theta k)-\Gamma(i+2)[\theta k]^{-(i+2)}\Big[\Big[ln[\theta k]-\Psi(i+2)\Big]\\
&+\frac{\alpha\theta k}{i+1}{}_2F_2(1,1;2,-i,\alpha\theta k\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

Entropia Renyi

Propoziție 5.7. *Entropia Renyi pentru repartiția Lindley generalizat Poisson Min este*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_R(\gamma) = &\frac{1}{1-\gamma}ln\Big\{\frac{\lambda^\gamma\theta^{2\gamma}}{(\alpha\theta+1)^\gamma}\Big(\frac{1}{e^\lambda-1}\Big)^\gamma\sum_{k\geq 1}\sum_{i=0}^{\gamma}C_\gamma^i\alpha^{\gamma-i}\frac{(\lambda\gamma)^{k-1}\theta^{k-1}}{(\alpha\theta+1)^{k-1}(k-1)!}\\
&\cdot\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{i+k}\Gamma(i+1)\Psi(i+1,i+k+1,(\alpha\theta+1)(\gamma+k-1))\Big\},\quad \gamma>0,\gamma\neq 1
\end{aligned}
$$

unde $\Gamma(\cdot)$ *este funcția gamma, iar* $\Psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ *funcția Kummer.*

5.2.3 Generarea de date

Generarea de date se face prin metoda inversă, metoda respingerii și metoda compunerii.

5.3 Repartiția Lindley generalizat Binomial Max

Teorema 5.7. *Fie* $X \sim$ *Lindley generalizat Binomial Max*(α,θ,n,p). *Atunci densitatea de repartiție a lui X este*

$$
f(x) = \frac{\theta^2(\alpha+x)}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\frac{np}{1-q^n}\Big[1-p\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Big]^{n-1}
$$

iar funcția de repartiție

$$F(x) = \frac{1}{1-q^n}\Big\{\Big[1 - p\frac{\alpha\theta + 1 + \theta x}{\alpha\theta + 1}e^{-\theta x}\Big]^n - q^n\Big\}, \quad x > 0, \quad \theta, \alpha, p > 0$$

5.3.1 Proprietăți

Fie $X \sim$ Lindley generalizat Binomial Max(α, θ, n, p), $\alpha, \theta, p > 0$.

Propoziție 5.8. *Rata de hazard a repartiției Lindley generalizat Binomial Max este*

$$h(y) = \frac{\theta^2 e^{-\theta y}(\alpha + y)np\Big[1 - p\frac{\alpha\theta+1+\theta y}{\alpha\theta+1}e^{-\theta y}\Big]^{n-1}}{(\alpha\theta + 1)\Big\{1 - \Big[1 - p\frac{\alpha\theta+1+\theta y}{\alpha\theta+1}e^{-\theta y}\Big]^n\Big\}}$$

Lemă 5.1. *Fie* $H(a, b, c, d, \delta, p) = \int_0^\infty x^c(d + x)\Big[1 - p\frac{1+bd+bx}{1+bd}e^{-bx}\Big]^{a-1}e^{-\delta x}dx, \quad 1 + bd > 0.$

Avem că

$$H(a, b, c, d, \delta, p) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j+1} C_{a-1}^i C_i^j C_{j+1}^k \frac{(-1)^i p^i}{(1 + bd)^i} b^j d^{j+1-k} \frac{\Gamma(c + k + 1)}{(bi + j)^{c+k+1}}$$

Teorema 5.8. *Momentele de ordin r ale lui X sunt*

$$E(X^r) = \frac{\theta^2 np}{(\alpha\theta + 1)(1 - q^n)} H(n - 1, \theta, r, \alpha, \theta, p)$$

Propoziție 5.9. *Transformata Laplace Stieltjes a repartiției Lindley generalizat Binomial Max este*

$$\varphi(s) = \frac{np\theta^2}{(\alpha\theta + 1)(1 - q^n)} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{(-1)^k}{(\alpha\theta + 1)^k}\theta^k\Big\{\alpha\Big(\frac{\alpha\theta + 1}{\theta}\Big)^{k+1}\Psi(1, k + 2, \frac{\alpha\theta + 1}{\theta}[s + \theta(k + 1)])$$
$$+ \Big(\frac{\alpha\theta + 1}{\theta}\Big)^{k+2}\Psi(2, k + 3, \frac{\alpha\theta + 1}{\theta}[s + \theta(k + 1)])\Big\}$$

unde $\Gamma(\cdot)$ *este funcția gamma, iar* $\Psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ *este funcția Kummer.*

5.3.2 Entropia Shannon. Caracterizare

Teorema 5.9. *Entropia Shannon a repartiției Lindley generalizat Binomial Max este*

$$
\begin{aligned}
H(f) &= -ln\frac{\theta^2 np}{(\alpha\theta+1)(1-q^n)} + \frac{\theta^3 np}{(\alpha\theta+1)(1-q^n)}H(n-1,\theta,1,\alpha,\theta,p)\\
&- \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} C_{n-1}^k(-1)^k C_k^i \frac{\theta^{i+2}np^{k+1}}{(\alpha\theta+1)^{i+1}(1-q^n)}\Bigg\{\alpha^{i+2}\frac{\pi}{(i+2)sin((i+2)\pi)}\\
&\cdot {}_1F_1(i+2,i+3,\alpha\theta(k+1)) - \Gamma(i+2)[\theta(k+1)]^{-(i+2)}\Bigg[\Big[ln[\theta(k+1)] - \Psi(i+2)\Big]\\
&+ \frac{\alpha\theta(k+1)}{i+1}{}_2F_2(1,1;2,-i,\alpha\theta(k+1)\Bigg] + \alpha^{i+2}\frac{\pi}{(i+1)sin((i+1)\pi)}{}_1F_1(i+1,i+2,\alpha\theta(k+1))\\
&- \Gamma(i+1)[\theta(k+1)]^{-(i+1)}\Bigg[\Big[ln[\theta(k+1)] - \Psi(i+1)\Big] + \frac{\alpha\theta(k+1)}{i}{}_2F_2(1,1;2,1-i,\alpha\theta(k+1)\Bigg]\Bigg\}\\
&+ (n-1)\Big(\frac{1}{n} + \frac{q^n}{1-q^n}ln(q)\Big)
\end{aligned}
$$

Propoziție 5.10. *Entropia repartiției Lindley generalizat Binomial Max este*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_R(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma}ln\Bigg\{\Big(\frac{np}{1-q^n}\Big)^\gamma \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{\gamma} C_{n-1}^k C_i^\gamma \alpha^{\gamma-i}(-1)^k \frac{(\alpha\theta+1)^{i+1-\gamma}p^k}{\theta^{i+1-2\gamma}}\\
\cdot \Gamma(i+1)\Psi(i+1,i+k+2,(\alpha\theta+1)(\gamma+k))\Bigg\}
\end{aligned}
$$

unde $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ *este funcția gamma, iar* $\Psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ *funcția Kummer.*

5.3.3 Generarea de date

Generarea de date se face prin metoda inversă, metoda respingerii și metoda compunerii.

5.4 Repartiția Lindley generalizat Binomial Min

Teorema 5.10. *Fie* $X \sim$ *Lindley generalizat Binomial Min. Atunci funcția de repartiție a lui X este*

$$
F(x) = 1 - \frac{1}{1-q^n}\Bigg\{\Bigg[q + p\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Bigg]^n - q^n\Bigg\} \tag{5.1}
$$

iar densitatea de repartiție

$$
f(x) = \frac{np}{1-q^n}\Bigg[q + p\frac{\theta\alpha+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Bigg]^{n-1} f_{GL(\alpha,\theta)}(x), \quad x > 0, \alpha, \theta, p > 0 \tag{5.2}
$$

5.4.1 Proprietăți

Fie $X \sim$ Lindley generalizat Binomial Min(α,θ,n,p).

Propoziție 5.11. *Rata de hazard a lui X este*

$$h(t) = \frac{np\Big[q + p\frac{\theta\alpha+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Big]^{n-1} f_{GL(\alpha,\theta)}(t)}{\Big[q + p\frac{\theta\alpha+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Big]^{n} - q^n}$$

Teorema 5.11. *Momentele de ordin r ale repartiției Lindley generalizat Binomial Min sunt*

$$E(X^r) = \frac{np\theta^2}{(1-q^n)(\alpha\theta+1)} \sum_{k=0}^{n-1} p^k \frac{q^{n-1-k}}{(\alpha\theta+1)^k} C_{n-1}^k \Big\{ \alpha\theta^k \Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{r+k+1} \Gamma(r+1)$$
$$\cdot \Psi(r+1, r+2+k, \theta(k+1)\frac{\alpha\theta+1}{\theta}) + \theta^k \Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{r+2+k} \Gamma(r+2) \Psi(r+2, r+3+k, \theta(k+1)\frac{\alpha\theta+1}{\theta}) \Big\}$$

unde $\Psi(a, b; u)$ *este funcția Kummer.*

Propoziție 5.12. *Transformata Laplace-Stieltjes pentru repartiția Lindley generalizat Binomial Min are următoarea formă*

$$\varphi(s) = \frac{np\theta^2}{(1-q^n)(\alpha\theta+1)} \sum_{k=0}^{n-1} p^k \frac{q^{n-1-k}}{(\alpha\theta+1)^k} C_{n-1}^k \Big\{ \theta^k \alpha \Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k+1} \Psi(1, k+2, \frac{\alpha\theta+1}{\theta}[s+\theta(k+1)])$$
$$+ \theta^k \Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k+2} \Psi(2, k+3, \frac{\alpha\theta+1}{\theta}[s+\theta(k+1)]) \Big\}$$

unde $\Gamma(\cdot)$*este funcția gamma, iar* $\Psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ *este funcția Kummer*

5.4.2 Entropia Shannon. Caracterizare

Teorema 5.12. *Entropia Shannon a repartiței Lindley generalizat Binomial Min este*

$$H(f) = -ln \frac{np\theta^2}{(\alpha\theta+1)(1-q^n)} + \frac{np\theta^3}{(1-q^n)(\alpha\theta+1)} \sum_{k=0}^{n-1} p^k \frac{q^{n-1-k}}{(\alpha\theta+1)^k} C_{n-1}^k \Big[\alpha\theta^k \Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k+2}$$
$$\cdot \Psi(2, k+3, \theta(k+1)\frac{\alpha\theta+1}{\theta}) + \theta^k \Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k+3} 2\Psi(3, k+4, \theta(k+1)\frac{\alpha\theta+1}{\theta}) \Big]$$
$$- \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} C_{n-1}^k C_k^i \frac{\theta^{i+2} np^{k+1} q^{n-1-k}}{(\alpha\theta+1)^{i+1}(1-q^n)} \Big\{ \alpha^{i+2} \frac{\pi}{(i+2)sin((i+2)\pi)}$$
$$\cdot {}_1F_1(i+2, i+3, \alpha\theta k) - \Gamma(i+2)[\theta k]^{-(i+2)} \Big[\Big[ln[\theta k] - \Psi(i+2) \Big] + \frac{\alpha\theta k}{i+1} {}_2F_2(1,1;2,-i,\alpha\theta k) \Big]$$
$$+ \alpha^{i+2} \frac{\pi}{(i+1)sin((i+1)\pi)} {}_1F_1(i+1, i+2, \alpha\theta k) - \Gamma(i+1)[\theta k]^{-(i+1)} \Big[\Big[ln[\theta k] - \Psi(i+1) \Big]$$
$$+ \frac{\alpha\theta k}{i} {}_2F_2(1,1;2,1-i,\alpha\theta k) \Big] \Big\} + \Big(\frac{1}{n} + \frac{q^n}{1-q^n} ln(q) \Big)$$

Propoziție 5.13. *Entropia Renyi a lui X este*

$$\mathcal{J}_R(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma} ln\Big\{\Big(\frac{np}{1-q^n}\Big)^{\gamma} \sum_{k=0}^{(n-1)\gamma} \sum_{i=0}^{\gamma} C_{(n-1)\gamma}^{k} C_{\gamma}^{i} \frac{\theta^{2\gamma-i-1} p^k \alpha^{\gamma-i} q^{(n-1)\gamma-k}}{(\alpha\theta+1)^{\gamma-i-1}}$$
$$\cdot \Gamma(i+1)\Psi(i+1, i+k+1, (k+\gamma)(\alpha\theta+1))\Big\}, \quad \gamma > 0, \gamma \neq 1$$

unde $\Gamma(\cdot)$ *este funcția gamma, iar* $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ *funcția Kummer.*

5.4.3 Generarea de date

Generarea de date se face prin metoda inversă, metoda respingerii și metoda compunerii.

5.5 Repartiția Lindley generalizat Geometric Max

Teorema 5.13. *Fie* $X \sim$ *Lindley generalizat Geometric Max. Atunci densitatea lui X este*

$$f(x) = \frac{p\theta^2(\alpha+x)e^{-\theta x}}{\alpha\theta+1}\Big[1-(1-p)\Big(1-\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Big)\Big]^{-2}$$

iar funcția de repartiție

$$F(x) = \frac{p}{1-p}\Bigg[\frac{1}{1-(1-p)\Big(1-\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Big)} - 1\Bigg], \quad x > 0, \alpha, \theta, p > 0$$

5.5.1 Proprietăți

Fie $X \sim$ Lindley generalizat Geometric Max(α, θ, p), $\alpha, \theta, p > 0$.

Propoziție 5.14. *Rata de hazard a lui X este*

$$h(x) = \frac{p\theta^2(\alpha+x)}{\alpha\theta+1+\theta x}\Bigg[\frac{1}{1-(1-p)\Big(1-\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Big)}\Bigg]$$

Propoziție 5.15. *Rata de hazard* $h(x)$ *este IFR.*

Teorema 5.14. *Momentele de ordin r ale repartiției Lindley generalizat Geometric Max sunt*

$$E(X^r) = \sum_{k\geq 1} \frac{kp\theta^2(1-p)^{k-1}}{(\alpha\theta+1)^k}(-\theta)^{k-1}\alpha^{k+r+1}\Gamma(k+r)\Psi(k+r, k+r+2, \alpha k\theta)$$

unde $\Gamma(\cdot)$ *este funcția gamma, iar* $\Psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ *funcția Kummer.*

Propoziție 5.16. *Transformata Laplace Stieltjes a repartiției Lindley generalizat Geometric Max este*

$$\varphi(s) = \sum_{k\geq 1} \frac{kp\theta^2(1-p)^{k-1}(-\theta)^{k-1}}{(\alpha\theta+1)^k}\alpha^{k+1}\Gamma(k)\Psi(k, k+2, \alpha(\theta k+s))$$

5.5.2 Entropia Shannon. Caracterizare

Teorema 5.15. *Entropia Shannon a repartiției Lindley generalizat Geometric Max este*

$$H(f) = -ln\frac{p\theta^2}{\alpha\theta+1} + \sum_{k\geq 1}\frac{kp\theta^3(1-p)^{k-1}}{(\alpha\theta+1)^k}(-\theta)^{k-1}\alpha^{k+2}\Gamma(k+1)$$
$$\cdot\Psi(k+1,k+3,\alpha k\theta) + 2\frac{ln(p)+q}{q} - \sum_{k\geq 1}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i-1}C_{k-1}^{i}(-1)^iC_i^j\frac{\theta^{j+2}pkq^{k-1}}{(\alpha\theta+1)^{j+1}}\Bigg\{\alpha^{j+2}\frac{\pi}{(j+2)sin((j+2)\pi)}$$
$$\cdot{}_1F_1(j+2,j+3,\alpha\theta(i+1)) - \Gamma(j+2)[\theta(i+1)]^{-(j+2)}\Bigg[\Big[ln[\theta(i+1)] - \Psi(j+2)\Big]$$
$$+\frac{\alpha\theta(i+1)}{j+1}{}_2F_2(1,1;2,-j,\alpha\theta(i+1))\Bigg] + \alpha^{j+2}\frac{\pi}{(j+1)sin((j+1)\pi)}$$
$$\cdot{}_1F_1(j+1,j+2,\alpha\theta(i+1)) - \Gamma(j+1)[\theta(i+1)]^{-(j+1)}\Bigg[\Big[ln[\theta(i+1)] - \Psi(j+1)\Big]$$
$$+\frac{\alpha\theta(i+1)}{j}{}_2F_2(1,1;2,1-j,\alpha\theta(i+1))\Bigg]\Bigg\}$$

Propoziție 5.17. *Entropia Renyi a repartiției Lindley generalizat Geometric Max este*

$$\mathcal{J}_R(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma}ln\Bigg\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_k^iC_j^i(-1)^j\alpha^{i+\gamma+1}\frac{\theta^{i+2\gamma}p^\gamma}{(\alpha\theta+1)^{i+\gamma}}\frac{\Gamma(2\gamma+k)}{\Gamma(2\gamma)k!}(1-p)^k$$
$$\cdot\Gamma(i+1)\Psi(i+1,i+\gamma+2,\alpha\theta(\gamma+j))\Bigg\},\quad \gamma>0,\gamma\neq 1$$

unde $\Gamma(\cdot)$ *este funcția gamma, iar* $\Psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ *funcția Kummer.*

5.5.3 Generarea de date

Generarea de date se face prin metoda inversă, metoda respingerii și metoda compunerii.

5.6 Repartiția Lindley generalizat Geometric Min

Teorema 5.16. *Fie* $X\sim$ *Lindley generalizat Geometric Min. Atunci densitatea este*

$$f(x) = \frac{p\theta^2e^{-\theta x}}{\alpha\theta+1}(\alpha+x)\Big[1-(1-p)\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Big]^{-2}$$

iar funcția de repartiție

$$F(x) = \frac{1}{1-p}\Bigg[1-\frac{p}{1-(1-p)\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}}\Bigg],\quad x>0,\alpha,\theta,0<p<1$$

5.6.1 Proprietăți

Fie $X \sim$ Lindley generalizat Geometric Min(α, θ, p), $\alpha, \theta, p > 0$.

Propoziție 5.18. *Funcția de supraviețuire a lui X este*

$$\bar{F}(x) = S(x) = \frac{p}{1-p} \frac{\left[(1-p)^{\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}} e^{-\theta x}\right]}{\left[1-(1-p)^{\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}} e^{-\theta x}\right]}$$

Propoziție 5.19. *Rata de hazard a lui X este*

$$h(x) = \frac{\theta^2(\alpha+x)(\alpha\theta+1)}{(\alpha\theta+1+\theta x)^2} \frac{1}{1-(1-p)^{\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}} e^{-\theta x}}$$

Teorema 5.17. *Momentele de ordin r ale repartiției Lindley generalizat Geometric Min sunt*

$$E(X^r) = \sum_{k\geq 1} \frac{kp(1-p)^{k-1}\theta^{k-1}}{(\alpha\theta+1)^k} \Big\{\alpha\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{r+k} \Gamma(r+1)\Psi(r+1, r+k+1, k(\alpha\theta+1))$$
$$+ \Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{r+k+1} \Gamma(r+2)\Psi(r+2, r+k+2, k(\alpha\theta+1))\Big\}$$

unde $\Gamma(\cdot)$ *este funcția gamma, iar* $\Psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ *funcția Kummer.*

Propoziție 5.20. *Transformata Laplace Stieltjes a repartiției Lindley generalizat Geometric Min este*

$$\varphi(s) = \sum_{k\geq 1} \frac{kp(1-p)^{k-1}}{(\alpha\theta+1)^k} \theta^{k-1} \Big[\alpha\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k} \Psi(1, k+1, (s+\theta k)\frac{\alpha\theta+1}{\theta})$$
$$+ \Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k+1} \Psi(2, k+2, (s+\theta k)\frac{\alpha\theta+1}{\theta})\Big]$$

5.6.2 Entropia Shannon. Caracterizare

Teorema 5.18. *Entropia Shannon a repartiției Lindley generalizat Geometric Min este*

$$H(f) = -ln\frac{p\theta^2}{\alpha\theta+1} + \sum_{k\geq 1} \frac{kp(1-p)^{k-1}\theta^k}{(\alpha\theta+1)^k} \Big[\alpha\Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k+1} \Psi(2, k+2, k(\alpha\theta+1))$$
$$+ \Big(\frac{\alpha\theta+1}{\theta}\Big)^{k+2} 2\Psi(3, k+3, k(\alpha\theta+1))\Big] - \sum_{k\geq 1}\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i \frac{\theta^i kpq^{k-1}}{(\alpha\theta+1)^{i+1}} \Big\{\alpha^{i+2}\frac{\pi}{(i+2)sin((i+2)\pi)}$$
$$\cdot {}_1F_1(i+2, i+3, \alpha\theta k) - \Gamma(i+2)[\theta k]^{-(i+2)} \Big[\Big[ln[\theta k] - \Psi(i+2)\Big]$$
$$+ \frac{\alpha\theta k}{i+1} {}_2F_2(1,1;2,-i,\alpha\theta k)\Big] + \alpha^{i+2}\frac{\pi}{(i+1)sin((i+1)\pi)} {}_1F_1(i+1, i+2, \alpha\theta k)$$
$$- \Gamma(i+1)[\theta k]^{-(i+1)} \Big[\Big[ln[\theta k] - \Psi(i+1)\Big] + \frac{\alpha\theta k}{i} {}_2F_2(1,1;2,1-i,\alpha\theta k)\Big]\Big\} + 2\frac{ln(p)+q}{q}$$

Propoziție 5.21. *Entropia Renyi a repartiției Lindley generalizat Geometric Min este*

$$\mathcal{J}_R(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma} ln\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\Gamma(2\gamma+k)}{\Gamma(2\gamma)k!} \frac{(1-p)^k p^\gamma \theta^{2\gamma+i}}{(\alpha\theta+1)^{i+\gamma}} \alpha^{i+\gamma+1} \Gamma(i+1) \Psi(i+1, i+\gamma+2, \alpha\theta(\gamma+k)) \right\},$$

$\gamma > 0, \gamma \neq 1$

5.6.3 Generarea de date

Generarea de date se face prin metoda inversă, metoda respingerii și metoda compunerii.

Capitolul 6

Procese de reînnoire

6.1 Procese de reînnoire

Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ variabile aleatoare pozitive independende identic repartizate de repartiție F cu $P(X_n = 0)$ și $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

Notăm cu $N(t)$-numărul de reînnoiri în intervalul $[0, t]$, $N(t) = max\{k|S_k \leq t\}$

Definiție 6.1. *[83] Procesul $(N(t))_{t>0}$ este un proces stocastic și se numește proces de reînnoire și este un proces de numărare.*

6.2 Procese de reînnoire și repartiția Lindley generalizat Poisson Min

Fie $X = (X_n)_{n\geq1}$ un proces de reînnoire în care duratele reînnoirilor X_n, $n \geq 1$ sunt variabile aleatoare independende identic repartizate Lindley generalizat Poisson Min de parametrii $\alpha, \theta, \lambda > 0$.

6.2.1 Durata reînnoirilor la momentul t

Teorema 6.1. *Durata reînnoirilor la momentul t al procesului de reînnoire având repartiția Lindley generalizat Poisson Min este*

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} P(D(t) \leq x) = \lim_{t\to} P(TR(t) \leq x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}(y)dy \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^x \left\{1 - \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\left[e^{\lambda} - \sum_{k\geq1}\left(\frac{\alpha\theta + 1 + \theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\right)^{k-1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right]\right\}dy \\
&= \frac{1}{\mu}\left\{x\frac{-e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} + \sum_{k\geq1}\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}\theta^{k-1}}{(1-e^{-\lambda})(k-1)!}\int_0^x \left(\frac{\alpha\theta+1}{\theta} + y\right)^{k-1} e^{-\theta(k-1)y}dy\right\} \\
&= \frac{1}{\mu}\left\{x\frac{-e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} + \sum_{k\geq1}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}(\alpha\theta+1)^{k-i-i}}{\theta(1-e^{-\lambda}(k-1)!(k-1)^{i+1})}C_{k-1}^{i}\gamma(i+1, \theta(k-1)x)\right\}
\end{aligned}$$

unde $\gamma(s, t) = \int_0^t x^{s-1}e^{-x}dx, s > 0$ este funcția gamma incompletă inferioară, iar $\mu = E(X_n)$.

6.3 Procese de reînnoire și repartiția Lindley generalizat Binomial Min

Fie $X = (X_n)_{n\geq 1}$ un proces de reînnoire în care duratele reînnoirilor X_n, $n \geq 1$ sunt variabile aleatoare independente identic repartizate Lindley generalizat Binomial Min de parametrii $\alpha, \theta, p > 0, n \geq 1$.

6.3.1 Durata reînnoirilor la momentul t

Teorema 6.2. *Durata reînnoirilor la momentul t al procesului de reînnoire de repartiție Lindley generalizat Binomial Min este*

$$\lim_{t\to\infty} P(D(t) \leq x) = \lim_{t\to\infty} P(TR(t) \leq x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x [1 - F(y)]dy$$
$$= \frac{1}{(1-q^n)\mu}\int_0^x \left\{\sum_{k=1}^{n} C_n^k q^{n-k} p^n \frac{(\alpha\theta + 1 + \theta y)^n}{(\alpha\theta+1)^n} e^{-n\theta y}\right\} dy$$
$$= \frac{1}{(1-q^n)\mu}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k} C_n^k C_k^i p^k q^{n-k} \frac{1}{\theta k^{i+1}(\alpha\theta+1)^i}\gamma(i+1, \theta k x)\right\}$$

unde $\gamma(\cdot,\cdot)$ este funcția gamma incompletă inferioară, iar $\mu = E(X_n)$.

Capitolul 7

Optimizarea unor sisteme

Datorită dezvoltării masive a industriei, o problemă apărută este fiabilitatea sistemelor, optimizarea costurilor de înlocuire a pieselor și cînd ar trebui ca acestea să fie schimbate sau reparate. În literatură s-au dezvoltat foarte multe modele de mentenanță pentru diferite sisteme cu duratele de viață a componentelor caracterizate de variabile aleatoare independente/dependente, identic repartizate sau nu, pentru diferite sisteme: sisteme serie, sisteme paralele, sisteme k-out-of n sau combinații ale acestora. Cîteva modele de fiabilitate sunt modelele shock în care sistemul este supus aleator la șocuri din exterior, modele de acumulare a avariilor [94], modele reduntante și altele. Pentru toate aceste modele au fost propuse strategii de mentenanță și de minimizare a costurilor.

7.1 Fiabilitatea sistemelor serie, paralel și k-out-of-n pentru durate de viață variabile aleatoare independente identic repartizate Lindley generalizat

În cadrul teoriei fiabilității statisticile de ordine sunt folosite pentru a reprezenta diferite sisteme. Astfel, un sistem serie este reprezentat de $X_{1:n}$, un sistem paralel de $X_{n:n}$, iar un sistem k-out-of-n de $X_{n-k+1:n}$.

Sisteme serie

Teorema 7.1. *Sistemele serie sunt caracterizate de statistica de ordine $X_{1:n}$ a cărei densitate este*

$$f_{X_{1:n}}(x) = \frac{n\theta^2}{(\alpha\theta+1)^n} e^{-\theta n x}(\alpha+x)(\alpha\theta+1+\theta x)^{n-1}, \quad x>0$$

iar funcția de repartiție este

$$F_{1:n}(x) = 1-[1-F(x)]^n = 1-\Big[\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Big]^n, \quad x>0, \alpha, \theta>0$$

Sisteme paralele

Teorema 7.2. *Sistemele paralele sunt caracterizate de statistica de ordine $X_{n:n}$ a cărei densitate este*

$$f_{X_{n:n}}(x) = n\frac{\theta^2 e^{-\theta x}}{\alpha\theta+1}(\alpha+x)\Big[1-\frac{\alpha\theta+1+\theta x}{\alpha\theta+1}e^{-\theta x}\Big]^{n-1}, \quad x>0$$

iar funcția de repartiție este

$$F_{X_{n:n}}(x) = [F(x)]^n = \Big[1 - \frac{\alpha\theta + 1 + \theta x}{\alpha\theta + 1}e^{-\theta x}\Big]^n, \quad x > 0, \alpha, \theta > 0$$

Sisteme k-out-of-n

Teorema 7.3. *Sistemele k-out-of-n sunt caracterizate de statistica de ordine $X_{n-k+1:n}$ a cărei densitate este*

$$f_{X_{n-k+1:n}}(x) = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\frac{\theta^2}{(\alpha\theta+1)^k}e^{-\theta kx}(\alpha + x)(\alpha\theta + 1 + \theta x)^{k-1} \cdot \Big[1 - \frac{\alpha\theta + 1 + \theta x}{\alpha\theta + 1}e^{-\theta x}\Big]^{n-k}, \quad x > 0$$

iar funcția de repartiție este

$$F_{X_{n-k+1:n}} = \sum_{r=n-k+1}^{n} C_n^r [F(x)]^r [1 - F(x)]^{n-r} = \sum_{r=n-k+1}^{n} C_n^r \Big[1 - \frac{\alpha\theta + 1 + \theta x}{\alpha\theta + 1}e^{-\theta x}\Big]^r \Big[\frac{\alpha\theta + 1 + \theta x}{\alpha\theta + 1}e^{-\theta x}\Big]^{n-r},$$

$x > 0, \alpha, \theta > 0$

7.2 Model Cox D.R., Nakagawa T. de acumulare pentru daune independente identic repartizate Lindley generalizat

Cox D.R. [30] a propus un model de acumulare de daune general având la bază teoria proceselor de reînnoire. Acest model este pentru o unitate în funcțiune. Considerând acest model Nakagawa T. [94] a dezvoltat trei strategii optime de înlocuire/mentenanță.

Fie un model standard de acumulare de daune pentru o unitate în funcțiune. Această unitate este supusă la șocuri care cauzează distrugeri unității. Șocurile vin în mod aleator. Fie $(X_i)_i, i = 1, 2, ...$ timpii dintre două șocuri aleatoare. Presupunem că $X_i \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$. Fie $(W_j)_j, j = 1, 2, ...$ daunele produse de șocuri astfel încât W_j să fie dauna produsă de șocul i. W_j sunt independente identic repartizate Lindley generalizat, $W_j \sim GL(\alpha, \theta), \alpha, \theta > 0$, $0 < E(W_j) < \infty$, iar $W_0 \equiv 0$. Avem că W_j este independent de X_i, $i \neq j$.

Fie N(t) numărul total de șocuri care au loc până la momentul t,$t \geq 0$. Definim

$$D(t) = \sum_{j=0}^{N(t)} W_j, \quad N(t) = 0, 1, 2, ...$$

dauna totală până la momentul t.

Presupunem că unitatea cedează atunci cînd dauna totală depășește un nivel prestabilit K $(0 < K < \infty)$.

Propoziție 7.1. *Funcția de supraviețuire a daunei totale $D(t)$ la momentul t este*

- $P(D(t) > x) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big[\sum_{k=0}^{j} C_j^k p^k (1-p)^{j-k} \gamma(2j-k, \theta x) - \sum_{k=0}^{j+1} C_{j+1}^k p^k (1-p)^{j-k} \gamma(2(j+1)-k, \theta x) \Big] \gamma(j+1, \lambda t)$

Propoziție 7.2. *Probabilitatea ca unitatea să cedeze la șocul (n+1) este*

$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^k \gamma(2n-k, \theta K) - \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k p^k (1-p)^{n+1-k} \gamma(2(n+1)-k, \theta K)$$

7.2.1 Optimizarea costurilor cu daune independente identic repartizate Lindley generalizat

Problema de optimizare în teoria fiabilității constă în optimizarea costurilor de reparații și de înlocuire. Pentru acest lucru, fiecare companie are strategii de mentenanță și înlocuire a pieselor dintr-un sistem. Considerăm trei modele: Modelul 1- unitatea este înlocuită la momentul T ($0 < T \leq \infty$) sau când acesta cedează, Modelul 2- unitate este înlocuită la șocul N sau la cedare, Modelul 3- unitatea este înlocuită la dauna acumulată Z sau la cedare.

7.3 Model de mentenanță Lam Y., Zhang Y.L. cu timpi de funcționare $(X_n)_n$ independenți identic repartizați Lindley generalizat

Fie un sistem cu o componentă și o cauză externă aleatoare care deteriorează sistemul, micșorând timpul de funcționare.

Propoziție 7.3. *Timpul total redus al perioadei de funcționare în $(t_{n-1}, t_{n-1} + t]$ este*

$$TR_{(t_{n-1}, t_{n-1}+t]} = \sum_{i=1}^{N(t_{n-1}, t_{n-1}+t]} W_i \sim Gamma(N(t_{n-1}, t_{n-1}+t], \lambda)$$

Propoziție 7.4. *Timpul real de funcționare a sistemului după cea de-a (n-1) reparație este*

- $$P(X_n' > t' | N(t_{n-1}, t_{n-1}+t] = k) = \frac{\lambda^k \theta_1 e^{-\theta_1 t'}}{(\alpha_1\theta_1 + 1)} \Big(\frac{\alpha_1\theta_1 + 1}{\theta_1} + t'\Big)^{k+1} \Gamma(k) \cdot \Psi(k, k+2, \Big(\frac{\alpha_1\theta_1 + 1}{\theta_1} + t'\Big)(\theta_1 + \lambda))$$

unde F_n este funcția de repartiție a lui X_n, iar H_k funcția de repartiție a lui $\sum_{i=1}^{k} W_i \sim Gamma(k, \lambda)$.

Propoziție 7.5. *Funcția de repartiție a timpului real de funcționare a sistemului după cea de-a (n-1) reparație este*

$$P(X_n' \leq t') = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t'} \frac{(\lambda t')^k}{k!} \Big[\Gamma(k) - \frac{\lambda^{2k} \theta_1 e^{-\theta_1 t'} \Gamma(k)}{\alpha_1\theta_1 + 1} \Big(\frac{\alpha_1\theta_1 + 1}{\theta_1} + t'\Big)^{k-1} \cdot \Psi(k, k+2, (\lambda + \theta_1)\Big(\frac{\alpha_1\theta_1 + 1}{\theta_1} + t'\Big))\Big]$$

Fie

$$h(N) = \frac{(c+r)\dfrac{\alpha_2\theta_2+2}{\theta_2(\alpha_2\theta_2+1)}\Big(\sum_{i=1}^{N}\mu_i^{'} - \mu_{N+1}^{'}(N-1)+\delta\Big)}{(R+c_p\delta+r\delta)(\mu_{N+1}^{'}+\dfrac{\alpha_2\theta_2+2}{\theta_2(\alpha_2\theta_2+1)})}$$

Teorema 7.4. *Strategia de mentenanță optimă N^* este determinată astfel*

$$N^* = min\{N|h(N) \geq 1\}$$

N^* este unic dacă și numai dacă $h(N^*) > 1$.

7.4 Rețelele Ad-Hoc ZRP Ben Liang, Zgymunt J. Haas pentru durate Lindley generalizat ale legăturilor up și down

Într-o rețea Ad-Hoc fiecare nod participă în rulare trimitând mai departe informația de la celelalte noduri, astfel traseul informației este determinat în mod dinamic în funcție de conexiunile pe moment ale rețelei. O trăsătură a rețelelor Ad-Hoc este aceea că au loc schimbări constante. Conexiunile dintre noduri sunt în continuă schimbare datorită mediului, la fiecare moment apar noi conexiuni, unele se distrug sau distanța dintre ele fie se mărește fie se micșorează.

Determinarea mediei întârzierii rutei

Presupunem că nodul sursă n_s are o rută cache spre nodul destinație n_d care este validată de ultima cerere de rutare și care are TTL=T secunde. Fie D numărul de salturi ale rutei. Fie ca următoarea cerere de rutare la n_d să sosească la timpul t_a după ce ruta cache dintre n_s și n_d este stabilită.

Fie $Q_n(T)$ probabilitatea ca atunci când o cerere de rutare să sosească înainte ca TTL să expire, iar primele n legături ale rutei cache nu sunt defecte.

Propoziție 7.6. *Probabilitatea ca primele n legături ale rutei cache să nu fie defecte, atunci când o cerere de rutare sosește înainte ca TTL să expire este*

$$Q_n(T) = 1 - \frac{n}{\theta(1-e^{-T\lambda_a})}\Big\{(\alpha\theta+1)\Big[\Psi(1,n+1,\theta^{-1}(\lambda_a+n\theta)(\alpha\theta+2)) - e^{-T\lambda_a}\Psi(1,n+1,n(\alpha\theta+2))\Big]$$
$$+ (\alpha\theta+2)\Big[\Psi(2,n+2,\theta^{-1}(\lambda_a+n\theta)(\alpha\theta+2)) - e^{-T\lambda_a}\Psi(2,n+2,n(\alpha\theta+2))\Big]\Big\}$$

Optimul TTL

Fie $h(\delta)$ probabilitatea ca o anumită legătură în legătura cache să fie up la momentul δ după ultima cerere de rutare.

Presupunem că o cerere de rutare sosește la momentul δ după ultima cerere de rutare. Fie T valoarea TTL pentru ruta cache.

Propoziție 7.7. *Dacă $\delta > T$, ruta cache nu este folosită, iar întârzierea de rutare este*

$$C_{\delta>T}(\delta, T) = 2LD$$

Dacă $\delta < T$, întârzierea de rutare este

$$C_{\delta<T}(\delta, T) = 2L\Big[D + \frac{h(\delta)^D - 1}{h(\delta) - 1} - 2Dh(\delta)^D\Big]$$

Propoziție 7.8. *[20] Media întârzierii de rutare este*

$$C(T) = 2LD - 2L\int_0^T \Big[2Dh(\delta)^D - \frac{h(\delta)^D - 1}{h(\delta) - 1}\Big] f_a(\delta) d\delta$$

Bibliografie

[1] Adamidis K. și S. Loukas, *A lifetime distribution with decreasing failure rate*. Statist. Probab. Lett., 39, 35-42, 1998

[2] Afify, E. d-E., *Order statistics from Pareto distributions*. Journal of Applied Science 6, 2151-2157, 2006

[3] Ahmad, Abd el-baset A., *Moments of order statistics from doubly truncated continuous distributions and characterizations*. Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics 35, 479-494, 2001

[4] Ahmad, K., E., Fakhny, M.E. and Jaheen, Z.F., *Empirical Bayes estimation of P(Y<X) and characterizations of Burr type-X model*. Journal of Statistical Planing and Inference, 64, 297-308, 1997

[5] Ammar M. Sarhan, Lotfe Tadj, David C. Hamilton, *A new lifetime distribution and its power transformation*. Journal of Probability and Statistics, Vol. 2014, ID 532024, 14 pages, 2014

[6] Arnold B.C., Balakrishnan N., and Nagaraja H.N., *A First Course in Order Statistics*. John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1992

[7] Arnljot Hoyland, Marvin Rausand, *System Reliability Theory-Models, Statistical Methods and Applications, Second Edition*. John Wiley & Sons Inc. Publications, 2004

[8] Asgharzadeh A., Hassan S., Bakouch, L. Esmaeili, *Pareto Poisson-Lindley distribution with applications*. Journal of Applied Statistics, Volume 40, Issue 8, 2013

[9] Ashour S.K., Abo-Kasem O.E., *Bayesian and Non-Bayesian Estimation for Two Generalized Exponential Populations Under Joint Type II Censored Scheme*. Pak.j.stat.oper.res. Vol.X, No.1, pp 57-72 2014

[10] Balakrishnan, N., Cohen, A.C., *Order Statistics and Interference: Estimation Methods*. Academic, Boston, 1991

[11] Balakrishnan, N. and Joshi, P. C., *Moments of order statistics from doubly truncated Pareto distribution*. Journal of the Indian Statistical Association 20, 109-117, 1982

[12] Balakrishnan, N., Malik, H.J. and Ahmed, S. E., *Recurrence relations and identities for moments of order statistics, II: Specific continuous distributions*. Commun.Statist.-Theor. Meth., 17, 2657-2694, 1988

[13] Balakrishnan, N and Rasouli, A., *Exact likelihood inference for two exponential populations under joint type II censoring*. Computational Statistics & Data analysis, 52, 2725-2738, 2008

[14] Balakrishnan N., Feng S., *Exact likelihood inference for k exponential populations under joint Type-II censoring*. Communications in Statistics-Simulation and Computation. 2014

[15] Barlow, R.E.,Proschan, F., *Statistical Theory, Reliability and Life Testing*. Holt, Reinehart and Winston, New York, 1975

[16] Barlow R.E, Proschan F., Hunter L.C., *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965

[17] Barreto-Souza W., A. L. de Morais, și G. M. Cordeiro, *The Weibull-geometric distribution*. J. Statist. Comput. Simul. 81, 645-657, 2011

[18] Barreto-Souza W., și H. S. Bakouch, *A new lifetime model with decreasing failure rate*. Statistics 47, 465-476, 2013

[19] Băncescu I., M. Drăgulin, *Some optimization models based on generalized Lindley distribution*-to be sumitted

[20] Ben Liang, Zygmunt J. Haas, *Optimizing Route-Cache Lifetime in Ad-Hoc Networks*. IEEE INFOCOM, 2003

[21] Bekçi, M. *Recurrence relations for the moment of order statistics from the uniform distributions*. Scientific Research and Essay 4, 1302-1305, 2009

[22] Birnbaum, Z.W., Saunders, S.C., *A new family of life distribution*. Journal of Appl. Probab., 6, 319-327, 1969a

[23] Birnbaum, Z.W., Saunders, S.C., *Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue*. Journal of Appl. Probab., 6, 328-347, 1969b

[24] Bogdanoff JL., Kozin F. *Probabilistic Models of Cumulative Damage*. John Wiley & Sons, New York, 1985

[25] Chahkandi, M., Ganjali, M., *On some lifetime distributions with decreasing failure rate*. Computational Statistics & Data Analysis, 53, 4433-4440, 2009

[26] Chein-Tai L. and Shun-Jie K., *Estimation of P(Y¡X) for Location Scale Distributions under Joint Progressively Type-II Right Censored*. Ovality Technology & Qunatitative Management, 10(3), 339-352, 2013

[27] Childs, A. și Balakrishnan, N., *Generalized recurrence relations for moment of order statistics from non-identical Pareto and truncated Pareto random variables with applications to robustness*. Handbook of Statistics, 16, 403-438, North-Holland Amsterdam, 1998

[28] Coșcun Kuș, *A new lifetime distribution*. Computational Statistics and Data Analysis 51, issue 9, p. 4497-4509, 2007

[29] Cover T., Thomas J., *Elements of Information Theory, 2nd Edition*. New York: Wiley-Interscience, 2006

[30] Cox D.R., *Renewal Theory*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967

[31] Craiu V., *Repartiții. Selecție. Estimarea punctuală (pentru uzul studenților)*. Editura Universității din București, 1997

[32] *Statistică matematică (manual pentru uzul studenților) Part.1*. Editura Universității din București, 1997

[33] David, H. A., *Order statistics*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1981

[34] Dedu, S., Ciumara, R., *Restricted Optimal Retention in Stop-Loss Reinsurance under VaR and CTE risk measures*. Proceedings of The Romanian Academy, 11, 3, 213-217, 2010

[35] Dedu, S., *Optimization of some risk measures in stop-loss reinsurance with multiple retention levels*. Mathematical Reports, 14, 2, 131-139, 2012

[36] Devroye, Luc., *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer Verlag, Berlin, 1986

[37] Diab L.S., Hiba Z. Muhammed, *Quasi Lindley geometric distribution*. International Journal of Computer Applications, Vol. 95, Nr. 13, 2014

[38] Dominique Lord, Srinivas Reddy Geedipally, *The Negative Binomial Lindley Distribution as a Tool for Analyzing Crash Data Characterized by a Large Amount of Zeros*. Accident Analysis & Prevention, Elsevier, Volume 43, 1738-1742, 2011

[39] Drăgulin Mircea, *Bayesian analysis of Lindley distribution with partial information*. Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), Bacău, 18-21 septembrie 2014

[40] Drăgulin Mircea, Vasile Preda, *A new family of Lindley-type distributions with applications*. Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), Bacău, 18-21 septembrie 2014

[41] Drăgulin Mircea, Romică Trandafir, *About some Extensions of Lindley Distribution*. A 17-a Conferință a societății de probabilități și statistică din România, Universitatea Tehnică de Construcții București, 25 aprilie 2014

[42] Drăgulin Mircea, Gheorghe Carmen Adriana, *Mixture Lorenz Curves. Three new models*. 18^{th} European Young Statisticians Meeting, Osijek, Croația 26-30 august 2013

[43] Drăgulin Mircea, *Generalized Lindley distribution and Its Power Transformation*. International Journal of Risk Theory, Vol 4(no.2), Alexandru Myller Publishing, Iași, 2014

[44] Drăgulin Mircea, *Asupra unor clase de modele statistice de fiabilitate*. A 16-a Conferință a Societății de Probabilități și Statistică din România, București, 26 aprilie 2013

[45] Drăgulin M., Trandafir R., Preda V., *A new type of Lindley distribution with two parameters. Some proprieties and applications*-to be sumitted.

[46] Drăgulin M., Băncescu I., *Bayesian and Non-Bayesian estimation for two generalized Lindley populations under joint type II censored scheme*-to be sumitted

[47] Drăgulin M., *Mixed Generalized Lindley distributions: Poisson, Binomial and Geometric type. Characteristics and applications*-to be sumitted

[48] Drăgulin M., Băncescu I., S. Dedu, *Renewal processes and generalized Lindley Poisson, generalized Lindley Binomial distributions*-to be sumitted

[49] Drăgulin M., *Reliability of systems with lifetime distribution generalized Lindley*-to be sumitted

[50] Dumitrescu M., Florea D., Tudor C., *Elemente de teoria probabilităților și statistică matematică*. Tipografia Universității București, 1983

[51] Dumitrescu M., *Curs de statistică*. Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea din București

[52] Dumitrescu M., *Statistica proceselor stocastice și aplicații (Note de curs)*. Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea din București

[53] Dumitrescu M., *Analiza statistică a proceselor tehnologice (Note de curs)*. Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea din București

[54] Faton Merovci and Vikas Kumar Sharma, *The Beta-Lindley distribution: properties and applications*. Journal of Applied Mathematics, Hindawi Publishing Corporation, 10, 2014

[55] Feller W., *An introduction to probability theory and its Application*. Vol II, John Willy & Sons Inc., 1966

[56] Feller W., *On the integral equation of renewal theory*. Ann. Math. Statist, Volume 12, 243-267, 1941

[57] Feller W., *Fluctuation theory of recurrent events*. Trans. Amer. Math. Soc, Volume 69, 98-119, 1949

[58] Efron B., Robert J. Tibshirani, *An introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, 1993

[59] Efron B., *The jackknife, the bootstrap, and other resampling plans* Society of Industrial and Applied Mathematics CBMS-NSF Monographs, 1982

[60] Franco, M. and Ruiz, J.M., *Characterization based on conditional expectation of adjacent order statistics: A unified approach*. Proceedings of the American Mathematical Society, 123(3), 861-874, 1999

[61] Gayan Warahena-Liyatange and Mavis Pararai, *A generalized power Lindley distribution with applications* Asian Journal of Mathematics and Applications, ISSN 2307-7743, 23, 2014

[62] Ghitany M. E., D. K. Al-Mutairi, și S. Nadarajah, *Zero-truncated Poisson-Lindley distribution and its application*. Math.Comput. Simul 79 279-287 2008

[63] Ghitany M.E. a, B. Atieh a, S. Nadarajah b *Lindley distribution and its application*. Mathematics and Computers in Simulation, Elsevier, 78, 493-506, 2008

[64] Ghitany M.E., Al-Mutairi D.K. and Nadarajah S., *Zero-truncated Poisson Lindley distribution and its application*. Math. Comput. Simul., 79, 279-287, 2008

[65] Ghitany M.E., Al-Mutairi D.K., Balakrishnan N. and Al-Enezi L.J, *Power Lindley distribution and associated inference*. Computational Statistics and Data Analysis, 64, 20-33, 2013

[66] Ghitany M.E., Alqallaf F., Al-Mutairi D.K. and Husain H.A., *A two parameter weighted Lindley distribution and its applications to survival data*. Mathematics and Computers in Simulation, 81(6), 1190-1201, 2011

[67] Gleser, R. E., *Bathtub and related failure rate characterizations*. Journal of the American Statistical Association, 75, 667-672, 1980

[68] Gnedenko B.V., Beleaev I. K., Soloviev A.D., *Metode matematice în teoria siguranței*. Editura technică, 1968

[69] Gokhan Gokdere, *Computing the moments of order statistics from truncated Pareto distributions based on the conditional expectation*. Pak.j.stat.oper.res, Vol. X, No.1, p 9-15, 2014

[70] Gonzalez L.A.P., Văduva I., *Simulation of some mixed lifetime distributions*. A 13-a Conferință a Societății de Probabilități și Statistică din România, 16-17 Aprilie 2010

[71] Gupto, R.D. and Kunder, D., *Generalized Exponetial Distributions*. Australian and New Zealand Journal of Statistics, 41(2),173-188, 1999

[72] Haas Z.J., Pearlman M.R., *Providing Ad-hoc Connectivity with the Reconfigurable Wireless Networks*. Ad-Hoc Networks, Charles Perkins, ed. Addison Wesley Longman, 2000

[73] Hamedani, G. H., *Characterizations of Exponential Distributions*. Pak.j.stat.oper.res., 4(1), 17-24, 2013

[74] Harter, H. L., *The Chronological Annotated Bibliography of Order Statistics (vol. 1-8)*. American Sciences Press, Columbus, Ohio, 1978-1992

[75] Hassein Zamani și Noriszura Ismail, *Negative Binomial Lindley Distribution and Its Application*. Journal of Mathematics and Statistics, 6 (1), 4-9, ISSN 1549-3644 2010

[76] Hojjatollah Zakerzadeh, Eisa Mahmoudi, *A new two-parameter lifetime distribution: model and properties*. Computational Statistics and Data Analysis, 2012

[77] Hossein Zamani and Noriszura Ismail, *Negative Binomial Lindley distribution and its application*. Journal of Mathematics and Statistics, Science Publications, 6(1), ISSN 1549-3644, 4-9, 2010

[78] Iosifescu M., Mihoc GH., Theodorescu R., *Teoria probabilităților și statistică matematică*. Editura Technică, 1966

[79] Jerald F. Lawless, *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, Second Edition, 2003

[80] Jodra P. *Computer generation of random variables with Lindley or Poisson-Lindley distribution via the Lambert W function*. Mathematics and Computers in Simulation, vol. 81, Issue 4, pp 851-859 2010

[81] Kelleher, J.J., *Tactical communications network modeling and reliability analysis: overview*. JSLAI Report JC-2091-GT-F3 under contract DAAL02-89-C-0040, Noiembrie 1991 (AD-A245339)

[82] Kundu D., Gupta R.D., *Estimation of $P(Y < X)$ for Weibull distributions*. IEEE Transactions on Reliability, 61, 270-280, 2006

[83] Lam Y., *Geometric process and its applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2007

[84] Lam Y., Zhang Y.L., *A geometric process maintenance model for a deteriorating system under a random environment*. IEEE Transactions on Reliability 53, 83-89, 2003

[85] Lindley D.V., *Fiducial distributions and Bayes theorem*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B 20, 102-107, 1958

[86] Lindley D.V., *Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint, Part II: Inference*. Cambridge University Press, New York, 1965

[87] Lu W. și D. Shi, *A new compounding life distribution: The Weibull-Poisson distribution*. J. Appl. Statist., 39, 21-38, 2012

[88] Maindonald J., Braun J., *Data Analysis and Graphics Using R*. Cambridge University Press, Cambrigde, 2nd edition, 2007

[89] Malik, H.J., Balakrishnan, N. and Ahmed, S.E., *Recurrence relations and identities for moments of order statistics, I: Arbitrary continuous distributions*. Commum.Statist.-Theor. Meth.,17, 2623-2655 1988

[90] Mihoc GH., Craiu V., *Tratat de statistică matematică vol I. Selecție și Estimație*. Editura Academiei RSR, 1975

[91] Mohie, El-Din M.M., Mahmoud, M.A.W., Abu-Youssef, S.E. Sultan, K.S., *Order Statistics from doubly truncated linear-exponential distribution and its characterizations*. Commum.Statist.-Simul. and Comput., 26(1), 281-290, 1997

[92] Nadarajah, S., *Explicit expressions for moment of Pareto order statistics*. Quantitative Finance 10, 585-589, 2010

[93] Nakagawa T. *On a replacement problem of a cumulative damage model*. Oper Res Q 27:895-900, 1976

[94] Nakagawa T., *Shock and Damage Models in Reliability Theory*. Springer-Verlag London Limited, 2007

[95] Papoulis A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, Third Edition*. Mc-Graw-Hill, 1991

[96] Perkins C. E., *Ad Hoc Networking*. Addison-Wesley Longman, 2001.

[97] Preda V., *Probleme de statistică matematică. Estimări*. Editura Universității, București, 1992

[98] Preda, V., Ciumara, R., *The Weibull-Logarithmic distribution in lifetime analysis and its properties* Proceedings of the XIII International Conference on Applied Stochastic Models and Data Analysis, 56-61, 2009

[99] Preda, V., Ciumara, R., *Applications of some new inequalities for moments of order statistics and L-moments*. Proceedings of the 20th International Conference Euro Mini Conference Continuous Optimization and Knowledge-Based Technologies, Europt'2008, 311-316, 2008

[100] Preda, V., Panaitescu, E., Ciumara, R., *The modified exponential-Poisson distribution*. Proceedings of the Romanian Academy, 12, 1, 22-29, 2011

[101] Preda, V., Dedu, S., Sheraz, M., *New measure selection for Hunt-Devolder semi-Markov regime switching interest rate models*. Physica A 407, 350-359, 2014

[102] Preda, V., Dedu, S., Ciumara, R., *Restricted Optimal Retention in Stop-Loss Reinsurance under VaR Risk Measure*. Mathematical Methods, Computational Techniques, Intelligent Systems, Mathematics and Computers in Science and Engineering - A Series of Reference Books and Textbooks, 143-145, 2010

[103] Preda, V., Dedu, S., Ciumara, R., *A Unified Approach for Optimal Retention in a Stop-Loss reinsurance under the VaR and CTE Risk Measures*. Proceedings of the XIII International Conference on Applied Stochastic Models and Data Analysis, 395-399, 2009

[104] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I., *Integrals and series, Volume 1, Elementary Functions*. Overseas Publishers Association OPA, 1986

[105] Qian CH., Nakamura S., Nakagawa T. *Replacement policies for cumulative damage model with maintenance cost*. Scientiae Mathematicae 3: 117-126 2000

[106] Rama Shanker, Shambhu, Ravi Shanker, *A two parameter Lindley distribution for modeling waiting and survival times data*. Applied Mathematics, Scientific Research, 4, 363-368, 2013

[107] Rasouli, A., Balakrishnan N., *Exact likelihood inference for two exponential populations under joint progressive type II censoring*. Communications in Statistics Theory and Methods, 39(12), 2172-2191, 2010

[108] Rausand M, Hoyland A, *System Reliability Theory*. John Wiley & Sons, Hoboken NJ, 2004

[109] Reiss, R. D., *Approximate distributions of order statistics*. Springer, Verlag, New York, Inc., USA, 1989

[110] Renyi A., *On measures of entropy and information, in: Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, vol. I*. University of California Press, Berkeley, 1961, 547-561

[111] Ross M, *Stochastic Processes*. Second Edition, John Wiley and Sons, New York, 1996

[112] Samir K. Ashour, Mahmoud A. Eltehiwy, *Exponentiated power Lindley distribution*. Journal of Advanced Research, Cairo University 2014

[113] Sankaran M., *The discrete Poisson-Lindley distribution*. Biometrics, 26, 145-149, 1970

[114] Saralees Nadarajah, Hassan S. Bakouch, Rasool Tahmasbi, *A generalized Lindley distribution*. Indian Statistical Institute, 2012

[115] Sarhon, A.E., Greenberg, B.G., *Contributions to Order Statistics*. Wiley, New York, 1962a

[116] Shafay A., R., Balakrishnan, N., Abdel-Aty Y., *Bayesian Inference Based on a Jointly Type II Censored Sample from two exponential Populations*. Communications in Statistics-Simulation and Computation 43, 1-14, 2013

[117] Shaked M., J.G. Shanthikumar, *Stochastic orders and their applications*. Boston: Academic Press, 1994

[118] Sheu SH, Chien YH, *Optimal age-replacement policy of a system subject to shocks with random lead-time*. Eur J Oper Res 159:132-144, 2004

[119] Skoulakis G., *A general shock model for a reliability system*. J Appl Probab 37:925-935, 2000

[120] Scot, T.C.,Fee, G.,Grotendorst,J., *Asymptotic series of Generalized Lambert W Function*. SIGSAM (ACM Special interest Group in Symbolic and Algebraic Manipulation), 47(185), 75-83, 2013

[121] Takacs, L., *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, New York, 1960

[122] Tong H., *On the estimation of $Pr(Y < X)$ for exponential families*. IEEE Transactions on Reliability, 26, 54-56, 1977

[123] Trandafir Romică, *Metode de generare a variabilelor aleatoare bazate pe unele transformări de variabile aleatoare uniforme*. Studii și Cercetări Matematice, No. 4, pp. 367-373, 1985

[124] Trandafir Romică, Ion Mierluș-Mazilu, *On Numerical Simulation of Some Random Variables*. Proceedings of the 27th Summer School Applications of Mathematics in Engineering and Economics, Sozopol, Bulgaria, pp. 524-530, 10-17 iunie 2001

[125] Văduva I., *Contribuții la teoria estimațiilor statistice ale densității de repartiție și aplicații*. Studii și Cercetări Matematice, Tom.20 Nr.18, 1968

[126] Văduva, I., *Computer generation of gamma random variables by rejection and composition procedures*. Math. Oper. Forsch.u.Statist. Ser.Statistics, Berlin vol 8, Nr. 4, p.545-576, 1977

[127] Văduva, I., *Fast algorithms for computer generation of random vectors used in reliability and applications*. Preprint, Nr. 1603, TH Darmstadt, FB. Mathematik Jan 1994

[128] Văduva, I., *Fiabilitatea programelor*. Editura Universității din București, 2003

[129] Văduva, I., *On some Reliability Models based on Censored Data*. SIMPEC (Proc. 5-th Biennial International Symposium, 14-15 May 2004, Brașov, România), Vol. I, Informarket Printing House, p.18-25, 2004

[130] Văduva, I., *Modele de simulare*. Editura Universității din București, 2004

[131] Văduva, I., *Computers Generation of Random Vectors Based on Transformation of Uniform Distributed Vectors*. Proc. Sixth Conf. Probab. Theory, Brașov, Sept. 1982