UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

TEZĂ DE DOCTORAT

Contribuţii la studiul Conjecturii Stanley privind idealele monomiale

Rezumat

Conducător ştiinţific:
Prof.dr. Dorin POPESCU

Doctorand:
Andrei ZAROJANU

Septembrie 2014

Cuprins

Introducere

In celebrul sau articol *Linear Diophantine equations and local cohomology* [41] Richard Stanley a enuntat o conjectura surprinzatoare prezicand o limita superioara pentru depth-ul unui modul multigraduat. Aceasta limita superioara conjecturata poarta numele de Stanley depth al unui modul. Notiunea de Stanley depth este de natura combinatoriala in timp ce depth-ul este un invariant omologic. Astfel conjectura este surprinzatoare deoarece compara doi invarianti ai unui modul de naturi foarte diferite. Conjectura a fost facuta in 1982, iar Apel a fost primul care a studiat-o si a demonstrat-o in unele cazuri particulare in [2], articol publicat in anul 2003. Descompunerile Stanley au fost din nou cercetate in anul 2006 de catre Herzog si Popescu in numeroase articole, iar de atunci subiectul a devenit foarte popular in randul mai multor publicatii privind diferite aspecte a Stanley depth. Desi au fost numeroase incercari de a demonstra sau contrazice conjectura Stanley, aceasta este inca larg deschisa. Conjectura este demonstrata in cazurile particulare cand modulul M este:

- un modul almost clean [15];
- de forma $M = S/I$ unde I este un ideal lexsegment initial sau final [21], sau un ideal Cohen-Macaulay generic sau cogeneric [2], sau un ideal monomial Cohen-Macaulay de codimensiune 2 [12], sau un ideal monomial Gorenstein de codimensiune 3 [12], sau un ideal muchie a unui graf complet k-partit [20].
- un ideal monomial I astfel incat I este intersectia a patru ideale prime monomiale [29], sau intersectia a 3 ideale monmiale primare [43], sau un ideal intersectie aproape completa [6], sau un ideal monomial daca dimensiunea Krull a inelului este mai mica sau egala cu 5 [28].

In primul capitol prezentam unele contributii aduse studiului conjecturii Stanley asupra idealelor monmiale. In Sectiunea 1 fixam terminologia si notiunile folosite, introducem conceptul de filtrari prime si aratam cum ele induc descompuneri Stanley (vezi [15]), astfel demonstrand existenta acestora. Apoi definim limita inferioara a lui Lyubeznik pentru depth-ul lui S/I, unde I este un ideal monomial, numita size-ul lui I. Este demonstrat in [16] ca aceeasi limita inferioara este adevarata si pentru Stanley depth, lucru care nu este surprinzator, daca presupunem conejctura adevarata. In a doua sectiune demonstram conjectura Stanley pentru o intersectie de doua ideale primare Teorema 1.2.2 si pentru o intersectie de trei ideale primare Teorema 1.2.3, rezultate pe care le-am publicat in [43]. Ultima sectiune incepe cu calculul Stanley depth-ului unui modul. In principiu, pentru a face acest lucru, trebuie considerate toate descompunerile Stanley. Acestea sunt o infinitate. Astfel apare intrebarea daca exista un algortim pentru calcularea Stanley depth-ului. In [15] gasim Teoremele 1.3.1 si 1.3.2 care dau un raspuns pozitiv pentru $M = I/J$, unde $J \subset I$ sunt ideale monoomiale. Metoda consta in atribuirea unui poset finit $P^g_{I/J}$ modulului I/J. $P^g_{I/J}$ este definit ca fiind posetul caracteristic a lui I/J cu proprietatea ca din fiecare partitie a sa se poate construi o descompunere Stanley a lui I/J. Presupunem acum ca I este generat de monoame libere de patrate de grad $\geq d$, unde d este un numar natural. Putem presupune ca $J = 0$, sau J este generat in grad $\geq d+1$ dupa aplicarea unui izomorfism multigraduat. Un prim pas in demonstrarea Conjecturii Stanley este sa consideram cazul $\operatorname{sdepth} I/J = d$, iar acesta a fost demonstrat de Popescu in Teorema 1.3.4. Conjectura 1.3.5 extinde teorema anterioara intr-un mod natural si Teorema 1.3.17 da un raspuns partial. Aceste rezultate le-am publicat in [35].

Seria Hilbert a unui modul poate fi calculata din orice descompunere Stanley a modulului. Astfel putem obtine o margine superioara pentru Stanley depth care depinde doar de seria Hilbert a modulului, numita Hilbert depth. In al doilea capitol prezentam aceasta idee. In prima sectiune comparam descompunerile Hilbert cu descompunerile Stanley si prezentam doua teoreme ale lui Ichim si Moyano [17] care calculeaza Hilbert depth-ul unui modul intr-un numar finit de pasi. La o prima vedere ar parea ca este usor de calculat Hilbert depth-ul unui modul, odata ce este cunoscuta functia Hilbert, dar este la fel de complicat ca si calcularea Stanley depth-ului. In a doua sectiune prezentam algoritmi pentru calcularea Hilbert depth-ului unui modul, Algoritmul 1, si pentru calcularea Stanley depth-ului unui modul, Algoritmul 2, rezultate pe care le-am publicat in [18]. Am folosit o functie recursiva pentru a acoperi toate partitiile si am implementat algoritmii intr-un program in CoCoA [7], cu ajutorul caruia am reusit sa rezolvam complet unele probleme deschise propuse de Herzog in [11].

In ultimul capitol studiem notiunea de ideale muchie binomiale. Ele sunt o generalizare a idealului determinantal generat de minorii de rang 2 a unei matrice $2 \times n$ de variabile. In ultimii ani, multe proprietati ale idealelor muchie binomiale au fost studiate in relatie cu informatiile combinatoriale ale grafului si au fost cercetate aplicatii catre statistica, vezi [9], [14]. Regularitatea unui ideal muchie binomial a fost studiata in [24]. In [24, Teorema 1.1] a fost demonstrat ca daca G este un graf conex, atunci $\ell \leq \operatorname{reg}(S/J_G) \leq n-1$ unde ℓ reprezinta lungimea celui mai lung drum in G. Noi aratam in Teorema 3.2.3 ca daca in plus G este inchis, atunci $\operatorname{reg}(S/J_G) = \operatorname{reg}(S/\operatorname{in}_{\mathrm{lex}}(J_G)) = \ell$. In particular, reiese faptul ca regularitatea lui J_G si $\operatorname{in}_{\mathrm{lex}}(J_G)$ nu depind de caracteristica corpului de baza. Aceste rezultate le-am publicat in [10].

In [24], autorii au conjecturat ca daca G este conex, atunci $\operatorname{reg} S/J_G = n-1$ daca si numai daca G este un graf linie. Aceasta conjectura este rezolvata de Teorema 3.2.3 pentru grafurile inchise.

In [38] este conjecturat ca $\operatorname{reg}(S/J_G) \leq r$, unde r este numarul maxim de cliq-uri ale lui G. Este evident ca aceasta conjectura se deduce din [24, Teorema 1.1] in cazul in care

$r \geq n-1$. Asadar, ramane de verificat cazul in care $r < n-1$, adica cazul in care G este cordal.

Dam un raspuns pozitiv conjecturii Madani-Kiani [38] pentru o clasa de grafuri cordale, care includ arborii; vezi Teorema 3.2.13. In particular deducem conjectura Matsuda-Murai pentru arbori, vezi Corolarul 3.2.14. Mai mult, acest lucru implica faptul ca pentru grafuri cordale, conjectura Matsuda-Murai se deduce din conjectura Madani-Kiani. Intr-adevar, sa presupunem ca a doua conjectura este adevarata si ca G este un graf cordal astfel incat $\operatorname{reg}(S/J_G) = n-1$. Acest lucru implica ca G are $n-1$ cliq-uri, adica G este un arbore cu regularitate maxima. Din Corolarul 3.2.14 rezulta ca G trebuie sa fie un graf linie.

Doresc sa multumesc domnului prof. dr. Dorin Popescu pentru tot sprijinul acordat, pentru numeroasele discutii si sfaturi fara de care aceasta lucrare nu ar fi putut fi elaborata. De asemenea doresc sa aduc multumiri doamnei prof. dr. Viviana Ene si domnului dr. Bogdan Ichim pentru ajutorul si lucrarile comune care stau la baza capitolelelor trei si, respectiv, doi.

Capitolul 1

Stanley Depth

1.1 Introducere

Definitia 1.1.1. Fie K un corp, $S = K[x_1,...,x_n]$ inelul de polinoame in n variabile si M un S-modul finit generat $\mathbb{Z}^n$-graduat. Fie $u \in M$ un element omogen din M si Z o submultime a lui $\{x_1,...,x_n\}$. Notam prin $uK[Z]$ K-subspatiul lui M generat de toate elementele uv unde v este un monom in $K[Z]$. K-subspatiul $\mathbb{Z}^n$-graduat $uK[Z] \subset M$ se numeste *spatiu Stanley de dimensiune* $|Z|$, daca $uK[Z]$ este un $K[Z]$-modul liber.

Definitia 1.1.2. O descompunere Stanley a lui M este o prezentare a K-spatiului vectorial $\mathbb{Z}^n$-graduat M in o suma directa de spatii Stanley

$$\mathscr{D} : M = \bigoplus_{i=1}^{m} u_i K[Z_i]$$

in categoria K-spatiilor vectoriale $\mathbb{Z}^n$-graduate. Fiecare sumand este un K-subspatiu $\mathbb{Z}^n$-graduat a lui M si descompunerea este compatibila cu $\mathbb{Z}^n$ graduarea, adica pentru fiecare $a \in \mathbb{Z}^n$ avem $M_a = \oplus_{i=1}^m (u_i K[Z_i])_a$.

Definitia 1.1.3. Numarul sdepth $\mathscr{D}$ = min $\{|Z_i| : i = \overline{1,m}\}$ se numeste Stanley depth a lui $\mathscr{D}$. Stanley depth a lui M se defineste

$$\text{sdepth } M = \max \{ \text{ sdepth } \mathscr{D} : \mathscr{D} \text{ este o descompunere Stanley a lui M } \}.$$

Conjectura 1.1.4. *(Stanley [41])* $\operatorname{depth} M \leq \operatorname{sdepth} M$ *pentru orice S-modul* $\mathbb{Z}^n$*-graduat* M.

Conjectura este larg deschisa. Totusi, in ultimii ani au fost aduse contributii importante in rezolvarea acesteia.

Un caz particular de interes mare este acela cand M este izomorf cu un ideal monomial $I \subset S$ sau izomorf cu inelul factor S/I. Monoamele $u \in I$ formeaza o K-baza omogena a lui I, in timpo ce clasele modulo I a monoamelor $u \in S \setminus I$ formeaza o K-baza omogena a lui S/I.

Exemplul 1.1.5. In Figura 1 vedem descompuenrile Stanley ale lui $I = (x_1^3x_2, x_1x_2^3)$ si respectiv S/I. Zona gri reprezinta K-spatiul vectorial generat de monoamele din I. Zona hasurata, liniile duble si punctele ingrosate reprezinta spatii Stanley de dimensiune 2,1 respectiv 0.

$$\mathscr{D}_1 : I = x_1x_2^3K[x_1,x_2] \oplus x_1^3x_2^2K[x_1] \oplus x_1^3x_2K[x_1],$$

si

$$\mathscr{D}_2 : S/I = K[x_2] \oplus x_1K[x_1] \oplus x_1x_2K \oplus x_1x_2^2K \oplus x_1^2x_2K \oplus x_1^2x_2^2K.$$

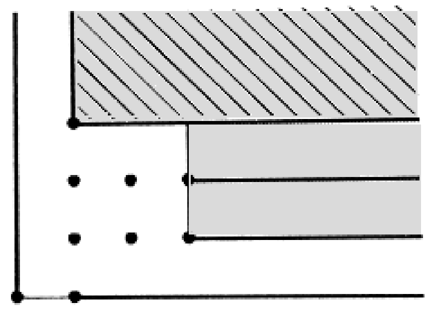


Figura 1. O descompunere Stanley a lui I si S/I

Avem $\operatorname{sdepth}(I) \geq \operatorname{sdepth}\mathscr{D}_1 = 1 = \operatorname{depth} I$, si $\operatorname{sdepth}(S/I) \geq \operatorname{sdepth}\mathscr{D}_2 = 0 = \operatorname{depth} S/I$. Astfel conjectura Stanley este verificata in acest caz particular.

O intrebare naturala este daca o descompunere Stanley exista intotdeauna si daca putem calcula Stanley depth-ul unui modul.

Lema 1.1.6. *(Herzog, Vladoiu, Zheng[15, Lemma 1.1.]) Orice S-modul finit generat $\mathbb{Z}^n$-graduat M admite o descompunere Stanley.*

Definitia 1.1.7. Fie $I \subset S$ un ideal monomial si $I = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i$ o descompunere primara redusa a lui I, unde Q_i sunt ideale monomiale primare. Notam $P_i = \sqrt{Q_i}$. Lyubeznik a definit in [23] $\operatorname{size} I$ ca fiind numarul $v + (n-h) - 1$, unde $h = \operatorname{ht} \sum_{j=1}^{s} Q_j$ si v este numarul minim t astfel incat exista $1 \leq j_1 < ... < j_t \leq s$ cu

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{t} Q_{j_k}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{s} Q_j}.$$

Se observa ca $\sqrt{\sum_{k=1}^{t} Q_{j_k}} = \sum_{k=1}^{t} P_{j_k}$ si $\sqrt{\sum_{j=1}^{s} Q_j} = \sum_{j=1}^{s} P_j$, astfel size I depinde doar de idealele prime asociate lui S/I.

Lucrand cu depth, sdepth si size putem presupune ca $\sum_{j=1}^{s} P_j = \mathfrak{m}$. In caz contrar, fie $Z = \{x_i \notin \sum_{j=1}^{s} P_j\}, T = K[X \setminus Z]$ si $J = I \cap T$ $(X = \{x_1, ..., x_n\})$. Atunci suma idealelor prime asociate lui J este idealul maximal din T, si

$$\operatorname{depth} I = \operatorname{depth} J + |Z|, \operatorname{sdepth} I = \operatorname{sdepth} J + |Z| \text{ and } \operatorname{size} I = \operatorname{size} J + |Z|.$$

Primele doua egalitati sunt consecinte directe din [15, Lemma 3.6.], iar ultima egalitate rezulta din definitie.

In [16] autorii au extins o metoda, introdusa in lucrarile [26] si [29], de a descompune un ideal monomial $I \subset S$ in subspatii $\mathbb{Z}^n$-graduate. Descompunerea depinde de alegerea unei submultimi Y a multimii de variabile $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, si de scrierea lui I ca intersectia primara iredundanta $I = \bigcap_{j=1}^{s} Q_j$. In continuare vom considera ca fiecare ideal Q_j este P_j-primar.

Fara sa pierdem generalitatea putem presupune ca $Y = \{x_1, \dots, x_r\}$ pentru $0 \le r \le n$. Atunci multimea variabilelor se imparte in doua multimi $\{x_1, \dots, x_r\}$ si $\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$.

Fie o submultime $\tau \subset [s]$, atunci notam cu I_τ K-spatiul vectorial $\mathbb{Z}^n$-graduat generat de multimea monoamelor de forma $w = uv$ unde u si v sunt monoame care satisfac proprietatile

$$u \in K[x_1, \dots, x_r] \quad \text{and} \quad u \in \bigcap_{j \notin \tau} Q_j \setminus \sum_{j \in \tau} Q_j,$$

$$v \in K[x_{r+1}, \dots, x_n] \quad \text{and} \quad v \in \bigcap_{j \in \tau} Q_j.$$

Urmatoarea propozitie extinde afiramtia echivalenta demonstrata de Popescu [29] pentru ideale monomiale libere de patrate.

Propozitia 1.1.8. *(Herzog, Popescu, Vladoiu [16, Propozitia 2.1.]) Cu notatiile introduse, idealul I are o descompunere $\mathscr{D}_Y : I = \oplus_{\tau \subset [s]} I_\tau$ in o suma directa de K-subspatii $\mathbb{Z}^n$ graduate ale lui I.*

Propozitia 1.1.9. *(Lyubeznik [23, Propozitia 2]) Fie L un ideal monomial in S. Atunci* $\operatorname{depth} S/L \ge \operatorname{size} L$.

Din propozitia anterioara obtinem ca $\operatorname{size} L + 1$ este o limita inferioara pentru $\operatorname{depth} L$. Urmatoarea teorema spune ca este de asemenea o limita inferioara pentru $\operatorname{sdepth} L$.

Teorema 1.1.10. *(Herzog, Popescu, Vladoiu [16, Teorema 3.1.]) Fie I un ideal monomial in S. Atunci* $\operatorname{sdepth} I \ge 1 + \operatorname{size} I$.

1.2 Conjectura Stanley pentru intersectii de trei ideale monomiale ireductibile

Lema 1.2.1. *Fie $I \subset S$ un ideal monomial si $I = \bigcap_{i=1}^{3} Q_i$ o descompunere primara redusa a lui I, unde Q_i este P_i - primar. Presupunem ca $P_i \neq \mathfrak{m}$ oricare ar fi $i \in [3]$. Atunci*

(a) *Daca* $Q_1 \subset Q_2 + Q_3$ *si* $P_1 \not\subset P_i$ *for* $i = 2,3$, *atunci*
$\operatorname{depth}_S S/I = 1 + \min\{\dim S/(P_1 + P_2), \dim S/(P_1 + P_3)\}$.

(b) *Daca* $Q_1 \subset Q_2 + Q_3$ *si* $P_1 \subset P_2, P_1 \not\subset P_3$, *atunci*
$\operatorname{depth}_S S/I = \min\{\dim S/P_2, 1 + \dim S/(P_1 + P_3)\}$.

(c) *Daca* $Q_1 \subset Q_2 + Q_3$ *si* $P_1 \subset P_i$ *pentru* $i = 2,3$ *atunci*
$\operatorname{depth}_S S/I = \min\{\dim S/P_2, \dim S/P_3\}$.

(d) *Daca* $Q_i \not\subset \sum\limits_{j=1,\ j\neq i}^{3} Q_j$, *oricare ar fi i atunci* $\operatorname{depth}_S S/I = 1$ *daca si numai daca* $\operatorname{size} I = 1$.

(e) *Daca* $Q_i \not\subset \sum\limits_{j=1,\ j\neq i}^{3} Q_j$, *oricare ar fi i atunci* $\operatorname{depth}_S S/I = 2$ *daca si numai daca* $\operatorname{size} I = 2$.

Teorema 1.2.2. *Fie I un ideal monomial si* $I = Q_1 \cap Q_2$ *o intersectie primara redusa a lui I , unde* Q_i *este* P_i *primar. Atunci conjectura Stanley este verificata pentru I.*

Teorema 1.2.3. *Fie I un ideal monomial si* $I = \bigcap\limits_{i=1}^{3} Q_i$ *o intersectie primara redusa a lui* I, *unde* Q_i *este* P_i *primar. Atunci conjectura Stanley este verificata pentru I.*

1.3 Depth-ul unor ideale monomiale speciale

Fie $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ inelul de polinoame in n variabile peste corpul K si $I \supsetneq J$ doua ideale monomiale libere de patrate din S.

In [15] autorii prezinta un algoritm de calculare a Stanley depth-ului pentru I/J. Ei au demonstrat ca in cazul idealelor monomiale este suficient sa lucram cu poseturi pentru calcularea Stanley depth-ului. In continuarea prezentam principalele rezultate din articol.

Fixam o ordine partial ordonata pe $\mathbb{N}^n$ in felul urmator: $a \leq b$ daca si numai daca $a(i) \leq b(i), i = \overline{1,n}$. Se observa ca $x^a | x^b$ daca si numai daca $a \leq b$, unde oricare ar fi $c \in \mathbb{N}^n$ prin x^c intelegem monomul $x_1^{c(1)} x_2^{c(2)} \ldots x_n^{c(n)}$. $\mathbb{N}^n$ cu ordinea partial ordonata introdusa este o latice distributiva cu conjunctia $a \wedge b$ si disjunctia $a \vee b$ definite in felul urmator: $(a \wedge b)(i) = \min\ \{a(i), b(i)\}$ si $(a \vee b)(i) = \max\ \{a(i), b(i)\}$. Notam prin ε_j vectorul cu 1 pe pozitia j si 0 in rest.

Fie I si J ideale monomiale generate de monoamele $x^{a_1}, \ldots, x^{a_r}$ respectiv $x^{b_1}, \ldots, x^{b_s}$. Alegem $g \in \mathbb{N}^n$ astfel incat $a_i \leq g$ si $b_j \leq g$ oricare ar fi i si j. Notam $P^g_{I/J}$ multimea formata din toti $c \in \mathbb{N}^n$ cu $c \leq g$ asfel incat $a_i \leq c$ pentru un i si $c \ngeq b_j$ oricare ar fi j. Multimea $P^g_{I/J}$ vazuta ca o submultime a lui $\mathbb{N}^n$ este finita. O vom numi posetul caracteristic al lui I/J in raport cu g. Exista o alegere naturala pentru g, adica conjunctia dintre toti a_i si b_j. Pentru acest g, posetul $P^g_{I/J}$ are cel mai mic numar de elemente si il vom nota doar $P_{I/J}$.

Fie P un poset si $a,b \in P$ $[a,b] = \{c \in P : a \leq c \leq b\}$ se numeste interval, iar $[a,b] \neq \emptyset$ daca si numai daca $a \leq b$. Fie P un poset finit. O partitie a lui P este o reuniune disjuncta de intervale.

$$\mathscr{P} : P = \bigcup_{i=1}^{r} [a_i, b_i]$$

Pentru a descrie o descompunere Stanley a lui I/J provenita dintr-o partitie a lui $P_{I/J}^{g}$ vom introduce urmatoarele notatii: pentru fiecare $b \in P_{I/J}^{g}$, definim $Z_b = \{x_j : b(j) = g(j)\}$ si introducem functia

$$\rho : P_{I/J}^{g} \to \mathscr{Z}_{\geq 0}, \ \ c \mapsto \rho(c),$$

unde $\rho(c) = |\{j : c(j) = g(j)\}| (= |Z_c|)$.

Teorema 1.3.1. *(Herzog, Vladoiu, Zheng [15, Teorema 2.1.]) Fie $\mathscr{P} : P_{I/J}^{g} = \bigcup_{i=1}^{r} [c_i, d_i]$ o partitie a lui $P_{I/J}^{g}$. Atunci*

$$\mathscr{D}(\mathscr{P}) : I/J = \bigoplus_{i=1}^{r} (\bigoplus_{c} x^c K[Z_{d_i}])$$

este o descompunere Stanley a lui I/J, unde suma directa interioara se face pentru toti $c \in [c_i, d_i]$ pentru care $c(j) = c_i(j)$ oricare ar fi j cu $x_j \in Z_{d_i}$. De asemenea, sdepth $\mathscr{D}(\mathscr{P})$ = min$\{\rho(d_i) : i = \overline{1,r}\}$.

Teorema 1.3.2. *(Herzog, Vladoiu, Zheng [15, Teorema 2.4.]) Fie $\mathscr{D}$ o descompunere Stanley a lui I/J. Atunci, exista o partitie $\mathscr{P}$ a lui $P_{I/J}^{g}$ astfel incat*

$$sdepth\ \mathscr{D}(\mathscr{P}) \geq sdepth\ \mathscr{D}.$$

Asadar, sdepth(I/J) poate fi calculat ca maximul dintre sdepth $\mathscr{D}(\mathscr{P})$, unde $\mathscr{P}$ parcurge partitiile (in numar finit) ale lui $P_{I/J}^{g}$.

Folosind teoremele anterioare putem da o definitie alternativa pentru Stanley depth-ul idealelor monomiale.

Definitia 1.3.3. Fie $P_{I\setminus J}$ posetul monoamelor libere de patrate din $I \setminus J$ cu ordinea data de divizibilitate. Fie $\mathscr{P}$ o partitie a lui $P_{I\setminus J}$ in intervale $[u,v] = \{w \in P_{I\setminus J} : u|w, w|v\}$, si fie $P_{I\setminus J} = \cup_i [u_i, v_i]$, unde reuniunea este disjuncta. Definim sdepth $\mathscr{P} = \min_i \deg v_i$ si *Stanley depth*-ul lui I/J este $\operatorname{sdepth}_S I/J = \max_{\mathscr{P}} \operatorname{sdepth} \mathscr{P}$, unde $\mathscr{P}$ parcurge multimea tuturor partitiilor lui $P_{I\setminus J}$.

Vom considera acum cazul cand I este generat de monoame libere de patrate de grad $\geq d$, pentru un numar natural d. Putem presupune ca $J = 0$, sau ca J este generat in grad $\geq d+1$ dupa aplicarea unui izomorfism multigraduat. Fir r numarul monoamelor libere de patrate de grad d din I si B (resp. C) multimile monoamele libere de patrate de grad $d+1$ (resp. $d+2$) din $I \setminus J$. Notam $s = |B|$, $q = |C|$.

Un prim pas in demonstrarea conjecturii este considerarea cazului $\operatorname{sdepth} I/J = d$.

Teorema 1.3.4. *(D. Popescu [31, Teorema 4.3.]) Daca* $\operatorname{sdepth}_S I/J = d$ *atunci* $\operatorname{depth}_S I/J = d$*, astfel conjectura Stanley este verificata in acest caz.*

Urmatorul pas in demonstrarea conjecturii este considerarea cazului $\operatorname{sdepth} I/J = d+1$. Acest caz este demonstrat cand $s > r+q$, sau $r > q$, sau $s < 2r$ in [32] si [39]. Enuntam urmatoarea conjectura mai slaba.

Conjectura 1.3.5. *Fie* $I \subset S$ *generat minimal de monoamele libere de patrate* $f_1, \ldots, f_k$ *de grad* d*, si o multime* H *de monoame libere de patrate de grad* $\geq d+1$*. Daca* $\operatorname{sdepth}_S I/J = d+1$*, atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \leq d+1$

Sa presupunem ca I este generat de o variabila si alte monoame libere de patrate de grad ≥ 2. Vom arata ca aproape intotdeauna cand $\operatorname{sdepth}_S I/J \leq 2$ atunci $\operatorname{depth}_S I/J \leq 2$ (Teorema 1.3.15).

Lema 1.3.6. *Fie* $d = 1$*,* $I = (x_1, \ldots, x_r)$ *pentru* $1 \leq r < n$ *si* $J \subset I$ *un ideal monomial liber de patrate generat in grad* ≥ 2*. Fie* B *multimea tuturor monoamelor libere de patrate de grad* 2 *din* $I \setminus J$*. Sa presupunem ca* $\operatorname{depth}_S I/(J + ((x_j) \cap B)) = 1$ *pentru un indice* $r < j \leq n$*. Atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \leq 2$*.*

Exemplul 1.3.7. *Fie* $n = 4$*,* $r = 2$*,* $d = 1$*,* $I = (x_1, x_2)$*,* $J = (x_1x_2)$ *si* $B = \{x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4\}$*. Atunci* $F = I/(J + (x_1) \cap B) \cong (x_1, x_2)/((x_1) \cap (x_2, x_3, x_4))$ *are sdepth-ul si depth-ul* $= 1$*, dar* $\operatorname{depth}_S I/J = 3$*. Astfel lema anterioara poate fi falsa daca* $j < r$*. Mai precis,* $\operatorname{depth}_S F = 1$ *pentru ca* $z = x_1 e_{234}$ *induce un element nenul* $H_3(x; F)$ *dar* e_1 *nu se gaseste in* e_{234}*. Avem* $\partial_3(z) = x_1x_2e_{34} - x_1x_3e_{24} + x_1x_4e_{23} \in (J + (x_1) \cap B)$ *si* $z \notin \operatorname{Im} \partial_4$ *deoarece are gradul* 1*, iar elementele din* $\operatorname{Im} \partial_4$ *au cel putin gradul 2. Astfel, folosind [4, Teorema 1.6.17], obtinem* $\operatorname{depth}_S F = 1$*.*

Propozitia 1.3.8. *Fie* $I \subset S$ *generat de* $\{x_1, \ldots, x_r\}$ *unde* $1 \leq r \leq n$ *si de unele monoame libere de patrate de grad* ≥ 2*, si* $x_i x_t x_k \in J$ *oricare ar fi* $i \in [r]$ *si* $r < t < k \leq n$*. Atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \leq 2$*.*

Exemplul 1.3.9. *Fie* $n = 4$*,* $I = (x_1, x_2, x_3)$*,* $J = (x_1x_3)$ *si astfel* $B = \{x_1x_2, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4\}$ *si* $C = \{x_1x_2x_4, x_2x_3x_4\}$*. Avem* $s = 5$*,* $r = 3$*,* $q = 2$*, deci suntem in cazul* $s = r+q$*. Se observa ca fiecare* $c \in C$ *se divide cu un monom de forma* $x_i x_j$ *pentru un indeice* $1 \leq i < j \leq 3$ *si astfel din propozitia precedenta avem* $\operatorname{depth}_S I/J \leq 2$*. De asemenea se observa ca* $z = x_1 e_2 \wedge e_3 - x_2 e_1 \wedge e_3 + x_3 e_1 \wedge e_2$ *induce un element nenul in* $H_2(x; I/J)$ *si din nou obtinem* $\operatorname{depth}_S I/J \leq 2$*.*

Lema 1.3.10. *Daca un monom* u *de grad* k *din* $I \setminus J$ *are toti multiplii de grad* $k+1$ *liberi de patrate in* J *atunci* $\operatorname{depth} I/J \leq k$*.*

Lema 1.3.11. *Fie* $J \subset I$ *ideale monomiale libere de patrate generate in grad* $\geq d+1$*, respectiv* $\geq d$ *si fie* V *un ideal generat de e monoame libere de patrate de grad* $\geq d+2$*, care nu se afla in* I*. Atunci* $\operatorname{sdepth}_S (I+V)/J \leq d+1$ *(resp.* $\operatorname{depth}_S (I+V)/J \leq d+1$*) implica* $\operatorname{sdepth}_S I/J \leq d+1$ *(resp.* $\operatorname{depth}_S I/J \leq d+1$*). Reciproca pentru depth este de asemenea adevarata.*

Lema 1.3.12. *Fie $I \subset S$ un ideal generat de $x_1,\ldots,x_r$ si o multime nevida E de monoame libere de patrate de grad 2 in variabilele $x_{r+1},\ldots,x_n$, si* $\operatorname{sdepth}_S I/J = 2$. *Fie $x_1x_t \in B$ pentru un indice t, $r < t \le n$, $I' = (x_2,\ldots,x_r) + (B \setminus \{x_1x_t\})$, $J' = J \cap I'$ si $\mathscr{P}$ o partitie a lui I'/J' cu sdepth 3. Prespunem ca fiecare monom liber de patrate $u \in S$ de grad 2, care nu se afla in I, satisface $x_1u \in J$. Atunci*

1. *Oricare ar fi $a \in (B \setminus (x_2,\ldots,x_r,x_1x_t)) \cap (x_t)$ cu $x_1a \notin J$ intervalul $[a, x_1a]$ se afla in $\mathscr{P}$.*
2. *Daca $c = x_tx_ix_j \notin J$, $r < i < j \le n$, $i,j \ne t$ si $x_1x_tx_i, x_1x_tx_j \notin J$ atunci $b = c/x_t \in B$ si daca in plus $x_1b \notin J$ atunci c nu se afla intr-un interval de forma $[a,c]$, $a \in B$ a lui $\mathscr{P}$.*

Lema 1.3.13. *Sa presupunem ca $I \subset S$ este generat de x_1 si o multime nevida E de monomae libere de patrate de grad 2 in $x_2,\ldots,x_n$ si* $\operatorname{sdepth}_S I/J = 2$. *Daca $x_1a \notin J$ oricare ar fi $a \in E$ si orice monom liber de patrate $u \in S$ de grad 2, care nu se afla in I, satisface $x_1u \in J$. Atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \le 2$.

Propozitia 1.3.14. *Sa presupunem ca $I \subset S$ este generat de x_1 si o multime nevida E de monomae libere de patrate de grad 2 in $x_2,\ldots,x_n$ si* $\operatorname{sdepth}_S I/J = 2$. *Fie $E' = \{a \in E : x_1a \in C\}$ si $E'' = E \setminus E'$. Daca orice monom liber de patrate $u \in S$ de grad 2, care nu apartine lui I, satisface $x_1u \in J$ si una dintre urmatoarele conditii este adevarata:*

1. $|E''| \le |C \setminus (x_1, E')|$
2. $|E''| > |C \setminus (x_1, E')|$ *and* $|B| \ne |C| + 1$.

Atunci $\operatorname{depth}_S I/J \le 2$.

Teorema 1.3.15. *Sa presupunem ca $I \subset S$ este generat de x_1 si o multime nevida E de monoame libere de patrate de grad 2 in $x_2,\ldots,x_n$ si* $\operatorname{sdepth}_S I/J = 2$. *Fie $E' = \{a \in E : x_1a \in C\}$ si $E'' = E \setminus E'$. Daca una din urmatoarele conditii este:*

1. $|E''| \le |C \setminus (x_1, E')|$
2. $|E''| > |C \setminus (x_1, E')|$ *and* $|B| \ne |C| + 1$.

Atunci $\operatorname{depth}_S I/J \le 2$.

Exemplul 1.3.16. *Fie $n = 3$, $r = 1$, $I = (x_1, x_2x_3)$, $J = 0$. Avem $c = x_1x_2x_3 \notin J$ si $x_2x_3 \in I$. Se observa ca* $\operatorname{sdepth}_S I = \operatorname{depth}_S I = 2$.

Folosind partitiile si Definitia 1.3.3 am reusit sa extindem rezultatul din Teorema 1.3.15 pentru cazul $d \ge 1$ si sa rezolvam alte cazuri particulare ale Conjecturii 1.3.5.

Teorema 1.3.17. *Conjectura 1.3.5 este adevarata in urmatoarele doua cazuri:*

1. $k = 1$,

2. $1 < k \leq 3$, $H = \emptyset$.

Lema 1.3.18. *Fie $I \subset S$ un ideal generat de monoamele liebre de patrate $\{f_1,\dots,f_r\}$ de grad d, si o multime E de monoame libere de patrate de grad $\geq d+1$. Presupunem ca* $\operatorname{sdepth}_S I/J \leq d+1$ *si Conjectura 1.3.5 este verificata pentru $k < r$ si pentru $k = r$, $|H| < |E|$ daca $E \neq \emptyset$. Daca $C \not\subset (f_2,\dots,f_r,E)$, sau $C \not\subset (f_1,\dots,f_r,E\setminus\{a\})$ pentru un monom $a \in E$ atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \leq d+1$.

Presupunem ca $E \neq \emptyset$ si $s \leq q+1$. Putem considera ca $|B \setminus E| \geq 2$ deoarece altfel $\operatorname{depth}_S I/J \leq d+1$ pentru ca monomul f in I/J este anihilat de toate variabilele in afara de una si de cele din $\operatorname{supp} f$. Pentru $b = fx_i \in B$ notam $I_b = (B\setminus\{b\})$, $J_b = J \cap I_b$. Daca $\operatorname{sdepth}_S I_b/J_b \geq d+2$ atunci fie $\mathscr{P}_b$ o partitie a lui I_b/J_b cu sdepth $d+2$. Putem alege $\mathscr{P}_b$ astfel incat fiecare interval care are in capatul din stanga un monom liber de patrate de grad d sau $d+1$, sa aiba in capatul din dreapta un monom din C. In $\mathscr{P}_b$ avem pentru orice monom $b' \in B\setminus\{b\}$ un interval $[b', c_{b'}]$. Definim functia $h : B\setminus\{b\} \to C$ astfel $b' \to c_{b'}$. Atunci h este injectie si $|\operatorname{Im} h| = s-1 \leq q$ (daca $s = 1+q$ atunci h este bijectie). Putem presupune ca toate intervalele din $\mathscr{P}_b$ care au in capatul din stanga un monom v de grad $\geq d+2$ sunt de forma $[v,v]$.

Lema 1.3.19. *Sa presupunem ca urmatoarele conditii sunt indeplinite:*

1. $s \leq q+1$,
2. $\operatorname{sdepth}_S I_b/J_b \geq d+2$, *for a* $b \in B \cap (f)$,
3. $C \subset ((f)\cap(E)) \cup (\cup_{a,a'\in E, a\neq a'}(a)\cap(a'))$.

Atunci $\operatorname{sdepth}_S I/J \geq d+2$, *sau exista un ideal nenul $I' \subsetneq I$ generat de o submultime a lui $\{f\}\cup B$ astfel incat* $\operatorname{sdepth}_S I'/J' \leq d+1$ *pentru $J' = J \cap I'$ si* $\operatorname{depth}_S I/(J,I') \geq d+1$.

Teorema 1.3.20. *Fie $I \subset S$ un ideal generat de un monom f, de grad d si o multime $E \neq \emptyset$ de monoame de grad $d+1$. Daca* $\operatorname{sdepth}_S I/J \leq d+1$ *atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \leq d+1$.

Teorema 1.3.20 rezulta din propozitia urmatoare, cazul $s > q+1$ fiind o consecinta a [32, Teorema 1.3.].

Propozitia 1.3.21. *Fie $I \subset S$ un ideal generat de monomul liber de patrate f de grad d, si o multime E de monoame libere de patrate de grad $\geq d+1$. Daca* $\operatorname{sdepth}_S I/J = d+1$ *si $s \leq q+1$ atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \leq d+1$.

Lema 1.3.22. *Fie $I = (x_1,x_2)$ si $E = \emptyset$. Daca* $\operatorname{sdepth}_S I/J = 2$ *atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \leq 2$.

Lema 1.3.23. *Fie $I \subset S$ un ideal generat de monoamele libere de patrate $\{f_1,f_2,f_3\}$ de grad d si* $\operatorname{sdepth} I/J = d+1$. *Daca exista $c \in C \cap ((f_3)\setminus(f_1,f_2))$ atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \leq d+1$.

Propozitia 1.3.24. *Fie $I = (x_1,x_2,x_3)$ si $E = \emptyset$. Daca* $\operatorname{sdepth}_S I/J = 2$ *atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \leq 2$.

Propozitia 1.3.25. *Fie $I \subset S$ un ideal generat de doua monoame libere de patrate $\{f_1, f_2\}$ de grad d. Daca* $\operatorname{sdepth}_S I/J \leq d+1$ *atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \leq d+1$.

Lema 1.3.26. *Fie $I \subset S$ un ideal generat de trei monoame libere de patrate $\{f_1, f_2, f_3\}$ de grad d,* $\operatorname{sdepth}_S I/J = d+1$. *Notam cu w_{ij} cel mai mic multiplu comun al lui f_i, f_j, $1 \leq i < j \leq 3$. Daca $w_{12}, w_{13}, w_{23} \in B$ si sunt diferite, atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \leq d+1$.

Lema 1.3.27. *Daca $C \subset (w_{12}, w_{13}, w_{23})$ si* $\operatorname{sdepth}_S I/J \leq d+1$ *atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \leq d+1$.

Teorema 1.3.28. *Fie $I \subset S$ un ideal generat de trei monoame libere de patrate $\{f_1, f_2, f_3\}$ de grad d, si* $\operatorname{sdepth}_S I/J = d+1$, *atunci* $\operatorname{depth}_S I/J \leq d+1$.

Capitolul 2

Hilbert Depth

2.1 Introducere

Seriile Hilbert sunt cel mai important invariant numeric al modulelor finit generate multi-graduate M peste inelul de polinoame in n variabile R, si ele formeaza o legatura intre algebra comutativa si aplicatiile sale combinatoriale. Un nou tip de descompuneri pentru modulele multigraduate M care depind doar de seria Hilbert a lui M au fost introduse de Bruns, Uliczka si Krattenthaler in [5] si numite descompuneri Hilbert. Ele sunt mai slabe fata de descompunerile Stanley deoarece nu este necesar ca sumanzii sa fie submodule ale lui M, ci doar spatii vectoriale izomorfe cu subinele de polinoame. Hilbert depth se defineste corespunzator descompunerilor.

Definitia 2.1.1. (Bruns, Krattenthaler, Uliczka [5, Definitia 2.4.]) O descompunere Hilbert a lui M este o familie finita

$$\mathfrak{D} : (R_i, s_i)_{i \in I}$$

astfel incat R_i sunt subalgebre generate de o submultime de variabile ale lui R oricare ar fi $i \in I$, $s_i \in \mathbb{Z}^n$, si

$$M \cong \bigoplus_{i \in I} R_i(-s_i)$$

ca K-spatii vectoriale.

O descompunere Stanley descrie M ca o suma directa de submodule peste subalgebrele corespunzatoare, pe cand pentru descompunerile Hilbert avem nevoie doar de un izomorfism cu suma directa de module peste aceste subalgebre. Se observa ca descompunerile Hilbert ale lui M depind doar de functia Hilbert a lui M. Ca si in cazul descompunerilor Stanley, putem defini $\operatorname{depth} \mathfrak{D}$.

Definitia 2.1.2. O descompuenre Hilbert pastreaza structura de R modul si astfel avem definita notiunea de depth, care este numita depth a descompunerii Hilbert $\mathfrak{D}$ si va fi notata $\operatorname{depth} \mathfrak{D}$. *Hilbert depth a* unui modul M este

$$\max\{\operatorname{depth} \mathfrak{D} \mid \mathfrak{D} \text{ este o descompunere Hilbert a lui } M\}$$

si va fi notata $\operatorname{hdepth} M$.

Se observa ca orice descompunere Stanley este si o descompunere Hilbert si astfel avem inegalitatea $\operatorname{hdepth} M \geq \operatorname{sdepth} M$. In urmatorul exemplu vedem ca aceasta inegalitate poate fi stricta.

Exemplul 2.1.3. Fie $R = K[X_1, X_2]$ si $M = K \oplus X_2K[X_2] \oplus X_2K[X_1, X_2] = R/(X_1, X_2) \oplus X_2R/(X_1) \oplus X_2R$. Atunci $K[X_2](-(0,0)) \oplus K[X_1, X_2](-(0,1))$ este o descompunere Hilbert a lui M si astfel avem $\operatorname{hdepth} M \geq 1$. Deoarece $M_{(0,0)} = K$ si orice element din K este anihilat de idealul (X_1, X_2), avem ca $\operatorname{depth} M = 0$ si conform [[6], Teorema 1.4.] obtinem ca $\operatorname{sdepth} M = 0$. In concluzie reiese ca $\operatorname{sdepth} M < \operatorname{hdepth} M$.

In [17] autorii au prezentat un algoritm de calculare a Hilbert depth-ului unui modul, asemanator cu cel din [15] care calculeaza Stanley depth-ul pentru un cat de ideale monomiale. In continuare prezentam principalele rezultate din lucrare.

Fie $H_M(X) = \sum_{a \in \mathbb{N}^n} H(M, a) X^a$ seria Hilbert a lui M si $g \in \mathbb{N}^n$ astfel incat numerele Betti multigraduate ale lui M satisfac inegalitatile $\beta_{0,a} = \beta_{1,a} = 0$ cu exceptia cazului in care $0 \preceq a \preceq g$, unde notam $a \preceq b$ daca si numai daca $a_i \leq b_i$ pentru $i = 1, \ldots, n$. Atunci modulul M este pozitiv g-determinat. Seria Hilbert a lui M poate fi construita din polinomul

$$H_M(X)_{\preceq g} := \sum_{0 \preceq a \preceq g} H(M, a) X^a.$$

Fie $a, b \in \mathbb{Z}^n$ astfel incat $a \preceq b$, atunci notam polinomul

$$Q[a, b](X) := \sum_{a \preceq c \preceq b} X^c$$

si il definim ca fiind *polinomul indus de intervalul* $[a, b]$.

Definitia 2.1.4. (Ichim, Moyano [17, Definitia 3.1.]) Definim o *partitie Hilbert* a polinomului $H_M(X)_{\preceq g}$ ca fiind expresia

$$\mathfrak{P} : H_M(X)_{\preceq g} = \sum_{i \in I_{\mathfrak{P}}} Q[a^i, b^i](X)$$

ca o suma finita de polinoame induse de intervalele $[a^i, b^i]$ (notatia $I_{\mathfrak{P}}$ evidenteaza dependenta de $\mathfrak{P}$ si astfel faptul ca suma este finita).

Pentru a descrie o descompunere Hilbert a lui M care provine din partitia Hilbert $\mathfrak{P}$ a lui $H_M(X)_{\preceq g}$, avem nevoie de urmatoarele notatii. Pentru $a \preceq g$ notam $Z_a = \{X_j \mid a_j = g_j\}$. In continuare notam cu $K[Z_a]$ subalgebra generata de submultimea de variabile Z_a. Definim si functia

$$\rho : \{0 \preceq a \preceq g\} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad \rho(a) := |Z_a|,$$

si pentru $0 \preceq a \preceq b \preceq g$ notam

$$\mathscr{G}[a, b] = \{c \in [a, b] \mid c_j = a_j \text{ oricare ar fi } j \in \mathbb{N} \text{ cu } X_j \in Z_b\}.$$

Teorema 2.1.5. *(Ichim, Moyano [17, Teorema 3.3.]) Urmatoarele afirmatii sunt adevarate:*

1. *Fie* $\mathfrak{P} : H_M(X)_{\preceq g} = \sum_{i=1}^{r} Q[a^i, b^i](X)$ *o partitie Hilbert a lui* $H_M(X)_{\preceq g}$*. Atunci*

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{P}) : M \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(\bigoplus_{c \in \mathscr{G}[a^i, b^i]} K[Z_{b^i}](-c) \Big)$$

   este o descompunere Hilbert a lui M*. In plus,*

$$\operatorname{hdepth} \mathfrak{D}(\mathfrak{P}) = \min\{\rho(b^i) : \ i = 1, \dots, r\}.$$

2. *Fie* $\mathfrak{D}$ *o descompunere Hilbert a lui* M*. Atunci exista o partitie Hilbert* $\mathfrak{P}$ *a lui* $H_M(X)_{\preceq g}$ *astfel incat*

$$\operatorname{hdepth} \mathfrak{D}(\mathfrak{P}) \geq \operatorname{hdepth} \mathfrak{D}.$$

   In particular, $\operatorname{hdepth} M$ *poate fi calculat ca fiind maximul valorilor* $\operatorname{hdepth} \mathfrak{D}(\mathfrak{P})$*, unde* $\mathfrak{P}$ *parcurge multimea finita de partitii Hilbert a lui* $H_M(X)_{\preceq g}$*.*

Corolarul 2.1.6. *(Ichim, Moyano [17, Corolarul 3.4.]) Fie* M *un* R*-modul finit generat multigraduat. Atunci*

$$\operatorname{hdepth} M = \max\{\operatorname{hdepth} \mathfrak{D}(\mathfrak{P}) : \mathfrak{P} \textit{ este o partitie Hilbert a lui } H_M(X)_{\preceq g}\}.$$

In particular, exista o partitie Hilbert $\mathfrak{P} : H_M(X)_{\preceq g} = \sum_{i=1}^{r} Q[a^i, b^i](X)$ *a lui* $H_M(X)_{\preceq g}$ *astfel incat*

$$\operatorname{hdepth} M = \min\{\rho(b^i) : \ i = 1, \dots, r\}.$$

Se observa ca $\operatorname{sdepth} M = \operatorname{hdepth} M$ daca $\dim_K M_a \leq 1$ oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^n$ si $R_s M_t \neq 0$ cand $R_s, M_t, M_{s+t} \neq 0$ (vezi [5, Propozitia 2.8]). De exemplu aceasta egalitate este adevarata cand $M = I/J$ unde $J \subset I$ sunt ideale monomiale. In acest caz particular, Teorema 1.3.1 ofera o metoda pentru a calcula $\operatorname{sdepth} M = \operatorname{hdepth} M$.

Urmatoarea propozitie ne zice cand o descompunere Hilbert poate induce o descompunere Stanley.

Propozitia 2.1.7. *(Ichim, Moyano [17, Propozitia 4.4.]) Fie* $\mathfrak{P} : H_M(X)_{\preceq g} = \sum_{i=1}^{r} Q[a^i, b^i](X)$ *o partitie Hilbert a lui* $H_M(X)_{\preceq g}$*, si*

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{P}) : M \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(\bigoplus_{c \in \mathscr{G}[a^i, b^i]} K[Z_{b^i}](-c) \Big) = \bigoplus_{i \in I_{\mathfrak{P}}} R_i(-s_i)$$

descompunerea Hilbert a lui M *indusa de ea (se observa ca* $I_{\mathfrak{P}}$ *este finita, deoarece depinde de partitia Hilbert* $\mathfrak{P}$*, si* $s_i \preceq g$*). Oricare ar fi* $i \in I_{\mathfrak{P}}$*, alegem* $0 \neq m_i \in M_{s_i}$*. Urmatoarele conditii sunt echivalente:*

1. *Descompunerea*

$$M = \bigoplus_{i \in I_{\mathfrak{P}}} m_i R_i$$

este o descompunere Stanley a lui M.

2. *Oricare ar fi $i \in I_{\mathfrak{P}}$ avem ca $R_i \bigcap \operatorname{Ann} m_i = 0$, si daca*

$$\sum_{i \in I_{\mathfrak{P}}} m_i (\sum_{s_i + t_{i_j} \preceq g} \alpha_{i_j} X^{t_{i_j}}) = 0$$

cu $\alpha_{i_j} \in K$, $X^{t_{i_j}} \in R_i$, atunci $\alpha_{i_j} = 0$ oricare ar fi i_j.

Toate descompunerile Stanley induse de alegeri convenabile ale elementelor m_i au acelasi sdepth *egal cu* $\operatorname{hdepth} \mathfrak{D}(\mathfrak{P})$.

Urmatoarea teorema este asemanatoare cu Teorema 2.1.5 cu exceptia faptului ca schimbam hdepth cu sdepth. Astfel vedem ca putem calcula sdepth si hdepth lucrand doar cu partitiile Hilbert ale unui modul.

Teorema 2.1.8. *(Ichim, Moyano [17, Teorema 4.6.]) Fie $\mathfrak{F}$ o descompunere Stanley a lui M. Atunci exista o partitie Hilbert $\mathfrak{P}$ a lui $H_M(X)_{\preceq g}$ care induce o descompunere Hilbert*

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{P}) : M \cong \bigoplus_{i \in I_{\mathfrak{P}}} R_i(-s_i)$$

si $0 \neq m_i \in M_{s_i}$ oricare ar fi $i \in I_{\mathfrak{P}}$, astfel incat descompunerea Hilbert $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ induce o descompunere Stanley

$$\overline{\mathfrak{D}(\mathfrak{P})} : M = \bigoplus_{i \in I_{\mathfrak{P}}} m_i R_i$$

cu $\operatorname{sdepth} \overline{\mathfrak{D}(\mathfrak{P})} \geq \operatorname{sdepth} \mathfrak{F}$.

2.2 Un algoritm pentru calcularea Hilbert depth-ului unui modul multigraduat

In aceasta sectiune introducem un algoritm de calcul pentru Hilbert depth-ul unui modul multigraduat finit generat M peste inelul de polinoame $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ standard multigraduat. Acesta e bazat pe Teorema 2.1.5 si cateva imbunatatiri. Algoritmul se poate adapta pentru calculul Stanley depth a lui M daca $\dim_K M_a \leq 1$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}^n$. In continuare, oferim o implementare experimentala a algoritmului [18] in CoCoA [7] si o folosim pentru a gasi exemple interesante. In consecinta, prezentam raspunsuri complete la urmatoarele intrebari puse de Herzog in [11]:

Problema 2.2.1. *[11, Problema 1.66] Gasiti un algoritm de calcul pentru Stanley depth a unui R-modul multigraduat finit generat M cu* $\dim_K M_a \leq 1$ *pentru orice $a \in \mathbb{Z}^n$.*

Problema 2.2.2. *[11, Problema 1.67] Fie M si N R-module multigraduate finit generate. Atunci*

$$\operatorname{sdepth}(M \oplus N) \geq \operatorname{Min}\{\operatorname{sdepth}(M), \operatorname{sdepth}(N)\}.$$

Avem egalitate?

Problema 2.2.3. *[11, Text dupa Problema 1.67] In cazul particular in care $I \subset R$ este ideal monomial, avem* $\operatorname{sdepth}(R \oplus I) = \operatorname{sdepth} I$*?*

Cum am vazut in sectiunea anterioara Hilbert depth-ul lui M poate fi calculat considerand toate partitiile Hilbert ale lui $H_M(X)_{\preceq g}$. In practica, numarul partitiilor posibile poate deveni usor imens. Din multe motive (de exemplu pentru implementarea metodei intr-un program pentru calculator) este nevoie de restrangere (cat mai mult posibil) a cautarilor pentru o partitie care in final va da Hilbert dept-ul. In aceasta sectiune aratam ca o imbunatatire este posibila. Rezultatele noastre extinde unele idei ale lui Giancarlo Rinaldo din [37] si ale lui Shen din [40] de calcul a Stanley depth-ului din cazul unui cat de ideale monomiale in cazul generat de module finit generate.

Deoarece majoritatea rezultatelor din aceasta sectiune depind de numarul $g \in \mathbb{N}^n$ astfel incat M este pozitiv g-determinat, vom presupune ca g este fixat si cunoscut din calcule anterioare.

Definitia 2.2.4. Fie B o submultime a lui $\mathbb{N}^n$ si $0 \leq s \leq n$. Definim doua submultimi a lui B,

$$B_{<s} := \{a \in B : \rho(a) < s\} \quad \text{si} \quad B_{\geq s} := \{a \in B : \rho(a) \geq s\}.$$

Scopul nostru este sa verificam daca M are o partitie $\mathfrak{P}$ a carei hdepth este egal cu s. Pentru a ne atinge scopul notam $B = \{a : \ X^a$ este un monom al polinomului $H_M(X)_{\preceq g}\}$ si descriem multimea B ca fiind reuniunea disjuncta a celor doua multimi definite anterior

$$B = B_{<s} \cup B_{\geq s}.$$

Se observa ca $\mathfrak{P}$ este o partitie Hilbert a lui $H_M(X)_{\preceq g}$, astfel putem scrie $\mathfrak{P} = A + A'$, astfel incat

$$A = \sum_{i \in I} Q[a^i, b^i](X), \quad A' = \sum_{j \in I'} Q[a^j, b^j](X)$$

unde $a^i \in B_{<s}$ si $a^j \in B_{\geq s}$ oricare ar fi $i \in I$ si $j \in I'$. Atunci $\mathfrak{P}$ poate fi vazuta ca o partitie noua $\mathfrak{P}' = A + A''$ cu

$$A'' = \sum_{j \in I''} Q[a^j, a^j](X)$$

unde $a^j \in B_{\geq s}$ oricare ar fi $j \in I''$.

Prin urmare, daca o partitie $\mathfrak{P}$ cu hdepth $= s$ exista, atunci partea A din $\mathfrak{P}$ este formata din intervale $Q[a,b](X)$ unde $a \in B_{<s}$ si $b \in B_{\geq s}$. La o prima vedere, pentru a gasi A, trebuie sa consideram pentru fiecare element $a \in B_{<s}$ toti candidatii posibili $b \in B_{\geq s}$ cu $a \preceq b$. In continuare aratam ca aceasta lista poate fi redusa considerabil.

Propozitia 2.2.5. *Fie $P = Q[a,b](X)$ un polinom astfel incat $b \preceq g$ si $\rho(a) < s \leq \rho(b)$. Atunci oricare ar fi*

$$b^0 \in \mathrm{Min}\{x \,:\, a \preceq x \preceq b,\ \rho(x) \geq s\}$$

exista o descompunere disjuncta a lui P

$$P = P_0 + \sum_{i=1}^{r} P_i, \qquad (*)$$

astfel incat P_0 este polinomul indus de intervalul $[a,b^0]$, P_i este polinomul indus de intervalul $[a^i,b^i]$, $b^r = b$ si $\rho(b^i) \geq s$ oricare ar fi $i = 1,\ldots,r$.

Observatia 2.2.6. In Propozitia 2.2.5 avem ca $\rho(b^0) = s$. Putem presupune ca $a = (0,...,0) \in \mathbb{N}^n$. Atunci, daca $\rho(b^0) = t > s$, putem presupune ca $b_i^0 = g_i$, oricare ar fi $i = 1,\ldots,t$. Astfel avem ca $a < b' = (b_1^0,...,b_s^0,0,...,0) < b^0$, $\rho(b') = s$ si obtinem o contradictie cu minimalitatea lui b^0.

Definitia 2.2.7. Fie $a \in B_{<s}$. Definim multimea

$$B_{=s}(a) := \{x \in B_{\geq s} : a \preceq x,\ \rho(x) = s\}.$$

Teorema 2.2.8. *Sa presupunem ca* $\operatorname{hdepth} M \geq s$. *Atunci exista o partitie Hilbert*

$$\mathfrak{P} : H_M(X)_{\preceq g} = \sum_{i=1}^{r} Q[a^i,b^i](X)$$

astfel incat daca $\rho(a^i) < s$ atunci $b^i \in B_{=s}(a)$.

Exemplul 2.2.9. Fie $R = K[X_1,X_2]$ cu $\deg(X_1) = (1,0)$ si $\deg(X_2) = (0,1)$, $M = R \oplus (X_1,X_2)R$. Atunci putem alege $g = (1,1)$ si

$$H_M(X_1,X_2)_{\preceq(1,1)} = 1 + 2X_1 + 2X_2 + 2X_1X_2.$$

Pentru a folosi Corolarul 2.1.6 ca sa obtinem $\operatorname{hdepth} M \geq 1$ (pentru detalii vezi [17, Exemplul 3.5]), trebuie calculata intreaba partitie Hilbert, de exemplu urmatoarea

$$\mathfrak{P}_1 : (1 + X_1 + X_2 + X_1X_2) + (X_1 + X_1X_2) + X_2.$$

Deoarece in acest caz $s = 1$, avem ca $B_{<1} = \{(0,0)\}$ si $B_{=1}((0,0)) = \{(1,0),(0,1)\}$. Folosind Teorema 2.2.8 avem de acoperit doar $(0,0)$ cu un interval care se termina cu un element din $B_{=1}((0,0))$, iar calculul se reduce la obtinerea uneia dintre urmatoarele doua variante:

$$\mathfrak{C}_1 : (1 + X_1), \quad \mathfrak{C}_2 : (1 + X_2).$$

In continuarea descriem un algoritm recursiv pentru calcularea Hilbert depth-ului unui modul multigraduat. Algoritmul este prezentat ca o functie care va fi apelata recursiv, astfel realizand o cautare de tip backtracking pentru o partitie Hilbert cu un hdepth cunoscut. Algoritmul poate fi folosit si pentru a calcula Stanley depth-ul in cazul unui factor de ideale monomiale. In [37, Algoritmul 1] este prezentat un algoritm nerecursiv pentru calculul Stanley depth-ului in cazul unui cat de ideale monomiale.

Algorithm 1: Functie care verifica recursiv daca hdepth $\geq s$

Data: $g \in \mathbb{N}^n$, $s \in \mathbb{N}$ and a polynomial $P(X) = H_M(X)_{\preceq g} \in \mathbb{N}[X_1, \ldots, X_n]$
Result: *true* if hdepth $M \geq s$
Boolean **CheckHilbertDepth**(g,s,P);
begin
    if $P \notin \mathbb{N}[X_1, \ldots, X_n]$ **then**
        return *false*;
    Container $E =$ **FindElementsToCover**(g,s,P);
    if `size`$(E) = 0$ **then**
        return *true*;
    else
        for i=`begin`(E) **to** i=`end`(E) **do**
            Container $C[i]$:=**FindPossibleCovers**$(g,s,P,E[i])$;
            if `size`$(C[i]) = 0$ **then**
                return *false*;
            for j=`begin`$(C[i])$ **to** j=`end`$(C[i])$ **do**
                Polynomial $\widetilde{P}(X) = P(X) - Q[E[i], C[i][j]](X)$;
                if **CheckHilbertDepth**$(g,s,\widetilde{P})$=*true* **then**
                    return *true*;
        return *false*;

La fiecare apelare a functiei **CheckHilbertDepth** aceasta verifica un interval $[a,b]$ pentru a vedea daca polinomul indus de acesta poate face parte dintr-o partitie Hilbert convenabila. Toate intervalele posibile sunt verificate in o cautare backtracking. Un nod din arborele de cautare este reprezentat de un polinom P.

Acum presupunem in plus ca $\dim_K M_a \leq 1$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}^n$ si modificam Algoritmul 1 pentru calcularea Stanley depth-ului in acest caz. Algoritmul verifica suplimentar daca partitia Hilbert calculata de Algoritmul 1 induce o descompunere Stanley.

Algorithm 2: Functie care verifica recursiv daca sdepth $\geq s$

```
Data: g ∈ ℕ^n, s ∈ ℕ and a polynomial P(X) = H_M(X)_{⪯g} ∈ ℕ[X_1,...,X_n]
Result: true if sdepth M ≥ s
Boolean CheckStanleyDepth(g,s,P);
begin
1   if P ∉ ℕ[X_1,...,X_n] then
        return false;
    Container E = FindElementsToCover(g,s,P);
    if size(E) = 0 then
        return true;
    else
        for i=begin(E) to i=end(E) do
            Container C[i]:=FindPossibleCovers(g,s,P,E[i]);
            if size(C[i]) = 0 then
                return false;
            for j=begin(C[i]) to j=end(C[i]) do
2               while a ∈ 𝒢[E(i),C[i][j]] do
3                   if K[Z_{C[i][j]}] ∩ Ann M_a ≠ 0 then
                        return false;
                Polynomial P̃(X) = P(X) − Q[E[i],C[i][j]](X);
                if CheckStanleyDepth(g,s,P̃) = true then
                    return true;
        return false;
```

In continuare prezentam rezultatele experimentelor noastre cu implementarea Algoritmului 1 in sistemul de calcul CoCoA [7]. Aceasta implementare, precum si unele exemple sunt disponibile pe internet, vezi [19].

Incurajati de rezultatele obtinute in [27], am reusit sa rezolvam complet Problemele 2.2.2 si 2.2.3.

Urmatorul exemplu in dimensiune 4 arata ca raspunsul la Problema 2.2.2 este *Nu*.

Exemplul 2.2.10. Fie $n = 4, M = R^2$ si $N = \mathfrak{m}$, unde $\mathfrak{m} \subset R$ este idealul maximal. Este cunoscut faptul ca $\min\{\text{sdepth}(M), \text{sdepth}(N)\} = 2$. Am reusit sa gasim o partitie Hilbert a lui $R^2 \oplus \mathfrak{m}$ care induce o descompunere Stanley cu sdepth $= 3$. Astfel

$$3 = \text{sdepth}(M \oplus N) = \text{hdepth}(M \oplus N) > \text{Min}\{\text{sdepth}(M), \text{sdepth}(N)\} = 2.$$

Urmatorul exemplu in dimensiune 6 arata ca raspunsul la Problema 2.2.3 este *Nu*.

Exemplul 2.2.11. Fie $n = 6$ si $I = \mathfrak{m}$, unde $\mathfrak{m} \subset R$ este idealul maximal. Este cunoscut faptul ca $\text{sdepth}(I) = \text{hdepth}(I) = 3$ si folosind aceleasi metode ca in exemplul anterior am reusit sa aratam ca

$$4 = \operatorname{sdepth}(R \oplus I) = \operatorname{hdepth}(R \oplus I) > \operatorname{sdepth}(I) = \operatorname{hdepth}(I) = 3.$$

Capitolul 3

Ideale muchie binomiale

3.1 Introducere

Definitia 3.1.1. ([14]) Fie G un graf simplu cu multimea varfurilor $[n] = \{1, \ldots, n\}$, adica, G nu are bucle si muchii duble. In continuare fie K un corp si $S = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ inelul de polinoame in $2n$ variabile. Pentru $i < j$ notam $f_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$. Definim idealul *muchie binomial* $J_G \subset S$ a lui G ca fiind idealul generat de binoamele $f_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ astfel incat $i < j$ si $\{i, j\}$ este o muhcie in G.

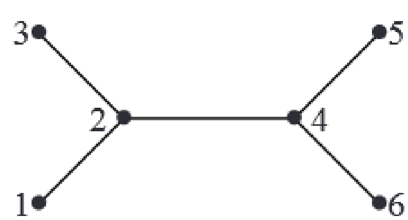
Se observa ca daca G are un varf izolat i, si G' este restrictia lui G la multimea varfurilor $[n] \setminus \{i\}$, atunci $J_G = J_{G'}$.

Clasa idealelor muchie binomiale sunt o generalizare a idealului determinantal generat de minorii de rang 2 a unei matrice $2 \times n$ de variabile. Intr-adevar, idealul generat de minorii de rang 2 a unei matrice $2 \times n$ poate fi interpretat ca idealul muchie binomial a unui graf complet cu varfurile $[n]$.

Exemplul 3.1.2. Fie G un graf cu $n = 6, V(G) = \{1,2,3,4,5,6\}$ si

$E(G) = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{4,5\},\{4,6\}\}$. Atunci $J_G \subset K[x_1,...,x_6,y_1,...,y_6]$ si

$J_G = (f_{12}, f_{23}, f_{24}, f_{45}, f_{46}) = (x_1y_2 - x_2y_1, x_2y_3 - x_3y_2, x_2y_4 - x_4y_2, x_4y_5 - x_5y_4, x_4y_6 - x_6y_4)$.



(a)

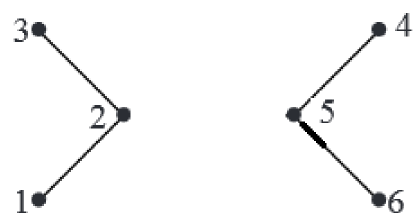
Teorema 3.1.3. *([14] Teorema 1.1.) Fie G un graf simplu cu multimea varfurilor $[n]$, si fie $<$ ordinea lexicografica peste $S = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ indusa de $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > y_1 > y_2 > \cdots > y_n$. Atunci urmatoarele conditii sunt echivalente:*

(a) *Generatorii f_{ij} a lui J_G formeaza o baza Gröbner patratica;*

(b) *Oricare ar fi muchiile $\{i, j\}$ si $\{k,l\}$ cu $i < j$ si $k < l$ avem $\{j,l\} \in E(G)$ daca $i = k$, si $\{i,k\} \in E(G)$ daca $j = l$.*

Spunem ca un graf G peste $[n]$ este *inchis cu ordinea varfurilor data*, daca G satisface conditia (b) a Teoremei 3.1.3, si spunem ca un graf G cu multimea varfurilor $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ este *inchis*, daca varfurile sale pot fi numerotate cu multimea $1, 2, \dots, n$ astfel incat pentru aceasta numerotare G este inchis.

Exemplul 3.1.4. Graful din figura (a) nu este inchis deoarece nu avem muchiile $\{3,4\}$ si $\{5,6\}$. Dar daca scoatem din $E(G)$ muchia $\{2,4\}$ si renotam varfurile obtinem un graf inchis.



Definitia 3.1.5. O *coarda* a unui ciclu C este o muchie $\{i, j\}$ a lui G astfel incat i si j sunt varfuri ale lui C cu $\{i, j\} \notin E(C)$. Un *graf cordal* este un graf finit a carui cicluri de lungime > 3 au o coarda. Fiecare subgraf indus a unui graf cordal este de asemenea cordal.

Definitia 3.1.6. O submultime C a lui $[n]$ se numeste *cliq* a lui G daca si numai daca i si j apartin lui C cu $i \neq j$ avem $\{i, j\} \in E(G)$. *Complexul cliq-urilor* unui graf finit G peste $[n]$ este complexul simplicial $\Delta(G)$ peste n a carui fete sunt cliq-urile lui G.

Teorema 3.1.7. *(Dirac [8]) Un graf G este cordal daca si numai daca admite o* ordine de eliminare perfecta*, adica, o ordonare $i_1, \dots, i_n$ a vrafurilor $1,...,n$ a lui G astfel incat oricare ar fi $1 < j \leq n$, multimea $C_{i_j} = \{i_k \in [n] \colon 1 \leq k < j, \{i_k, i_j\} \in E(G)\}$ este un cliq a lui G.*

Fie Δ un complex simplicial. O fateta F a lui Δ se numeste *frunza*, daca F este singura fateta, sau daca exista o fateta G, numita *ramura* a lui F, care se intersecteaza cu F maximal. Altfel spus, pentru fiecare fateta H a lui Δ cu $H \neq F$ avem $H \cap F \subset G \cap F$. Fiecare frunza F are cel putin un *varf liber*, adica, un vraf care apartine numai lui F. Pe de alta parte, daca o fateta admite un varf liber, nu este neaparat o frunza.

Complexul simplicial Δ se numeste *quasi-padure* daca fatetele sale pot fi numerotate $F_1, \dots, F_r$ astfel incat oricare ar fi $i > 1$ fateta F_i este o frunza a complexului simplicial cu fatetele $F_1,\dots,F_{i-1}$. O astfel de numerotare a fatetelor se numeste o *ordine a frunzelor*. O quasi-padure conexa se numeste *quasi-arbore*.

O afirmatie echivalenta cu Teorema lui Dirac spune ca G este cordal daca si numai daca $\Delta(G)$ este o quasi-padure.

Propozitia 3.1.8. *([14] Proposition 1.2.) Daca G este inchis, atunci G este cordal si nu are subgrafuri induse formate din trei muchii diferite e_1, e_2, e_3 cu $e_1 \cap e_2 \cap e_3 \neq \emptyset$.*

Un graf cu trei muchii diferite e_1, e_2, e_3 astfel incat $e_1 \cap e_2 \cap e_3 \neq \emptyset$ se numeste *ghiara*. Asadar Propozitia 3.1.8 spune ca un graf inchis este cordal si fara ghiare.

Teorema 3.1.9. *(Ene, Herzog, Hibi [9, Teorema 2.2.]) Fie G un graf peste $[n]$. Urmatoarele conditii sunt echivalente:*

(a) *G este inchis;*

(b) *exista o numerotare a lui G astfel incat toate fatetele lui $\Delta(G)$ sunt intervale $[a,b] \subset [n]$.*

In plus, daca conditiile echivalente sunt verificate si fatetele $F_1,\dots,F_r$ ale lui $\Delta(G)$ sunt numerotate astfel incat $\min(F_1) < \min(F_2) < \cdots < \min(F_r)$*, atunci $F_1,\dots,F_r$ este o ordine a frunzelor a lui $\Delta(G)$.*

Observatia 3.1.10. Fie G un graf inchis. Atunci $\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(J_G) = (x_i y_j : \{i,j\} \in E(G))$ este idealul muchie a unui graf bipartit pe multimea varfurilor $\{x_1,\dots,x_n\} \cup \{y_1,\dots,y_n\}$. Notam $\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(G)$ ca fiind acest graf. Prin urmare, avem $\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(J_G) = I(\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(G))$.

In [14] autorii au studiat idealele prime asociate lui J_G. Inainte sa le prezentam principalele rezultate, avem nevoie de urmatoare notatie.

Definitia 3.1.11. ([14]) Fie G un graf simplu peste $[n]$. Oricare ar fi submultimea $S \subset [n]$ definim idealul prim P_S. Fie $T = [n] \setminus S$, si $G_1,\dots,G_{c(S)}$ componentele conexe ale lui G_T. Aici G_T este *restrictia* lui G la T a carui muchii sunt muchiile $\{i,j\}$ ale lui G pentru care $i,j \in T$. Oricare ar fi G_i notam cu $\widetilde{G}_i$ graful complet pe multimea varfurilor $V(G_i)$. Notam

$$P_S(G) = (\bigcup_{i \in S} \{x_i, y_i\}, J_{\widetilde{G_1}}, \dots, J_{\widetilde{G}_{c(S)}}).$$

Teorema 3.1.12. *([14] Teorema 3.2.) Fie G un garf simplu peste multimea varfurilor $[n]$. Atunci $J_G = \bigcap_{S \subset [n]} P_S(G)$.*

Corolarul 3.1.13. *([14] Corolarul 3.9.) Fie G un graf conex simplu peste multimea varfurilor $[n]$, si $S \subset [n]$. Atunci $P_S(G)$ este un ideal prim minimal a lui J_G daca si numai daca $S = \emptyset$ sau $S \neq \emptyset$ si oricare ar fi $i \in S$ avem $c(S \setminus \{i\}) < c(S)$.*

3.2 Regularitatea idealelor muchie binomiale

In aceasta sectiune studiem regularitatea idealelor muchie binomiale. Pentru un graf inchis G aratam ca regularitatea idealului muchie binomial J_G coincide cu regularitatea lui $\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(J_G)$ si poate fi calculata in functie de unele date combinatoriale ale lui G.

Definitia 3.2.1. Fie H un graf simplu, atunci $\mathrm{indmatch}(H)$ este numarul maxim de muchii in o potrivire indusa H. Prin o *potrivire indusa* intelegem un graf indus a lui H care este format din muchii disjuncte. Se observa ca $\mathrm{indmatch}(H)$ este de fapt *gradul monomial* a idealului muchie $I(H)$, care este lungimea maxima a unui sir regulat de monoame in $I(H)$.

Numim un graf H *slab cordal* daca orice ciclu indus din H si din $\overline{H}$ (graful complementar lui H) are cel mult lungimea 4.

Teorema 3.2.2 ([42])**.** *Daca H este un graf slab cordal peste multimea varfurilor $[n]$, atunci*

$$\mathrm{reg}(K[x_1,\ldots,x_n]/I(H)) = \mathrm{indmatch}(H).$$

Teorema 3.2.3. *Fie G un graf inchis peste multimea varfurilor $[n]$ cu componentele conexe $G_1,\ldots,G_r$. Atunci*

$$\mathrm{reg}(S/J_G) = \mathrm{reg}(S/\,\mathrm{in}_<(J_G))) = \ell_1+\cdots+\ell_r,$$

unde, pentru $1\le i\le r$, ℓ_i este lungimea celui mai lung drum indus din G_i.

Exemplul 3.2.4. Fie G graful din figura 1. Atunci

$$\mathrm{reg}(S/J_G) = \mathrm{reg}(S/\,\mathrm{in}_<(J_G))) = \ell = 3.$$

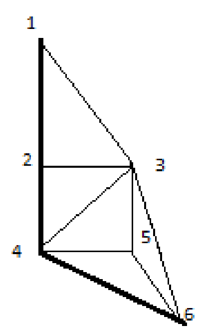


Figura 1

Pentru demonstratia teoremei anterioare avem nevoie de urmatoarele rezultate.

Teorema 3.2.5. *(Matsuda, Murai [24, Teorema 1.1.]) Fie G un graf simplu peste $[n]$ si fie ℓ lungimea celui mai lung drum indus in G. Atunci*

$$\ell+1 \le \mathrm{reg}(J_G) \le n.$$

Lema 3.2.6. *Fie G un graf conex inchis peste* $[n]$*. Atunci graful bipartit* $H = \mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(G)$ *peste multimea varfurilor* $\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$ *este slab cordal.*

Corolarul 3.2.7. *Fie G un graf inchis peste* $[n]$ *si* $H = \mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(G)$*. Atunci*

$$\mathrm{reg}(S/I(H)) = \mathrm{indmatch}(H).$$

Propozitia 3.2.8. *Fie G un graf conex inchis peste* $[n]$ *si* $H = \mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(G)$*. Atunci* $\mathrm{indmatch}(H) = \ell$*, unde* ℓ *este lungimea celui mai lung drum indus din G.*

Corolarul 3.2.9. *Fie G un graf inchis. Atunci regularitatea lui* J_G *si a lui* $\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(J_G)$ *nu depind de caracteristica corpului de baza.*

In [24], Matsuda si Murai au conjecturat ca daca G este un graf conex peste multimea de varfuri n, atunci $\mathrm{reg}(S/J_G) = n - 1$ daca si numai daca G este un graf linie. Teorema 3.2.3 da un raspuns pozitiv pentru grafurile inchise.

Corolarul 3.2.10. *Fie G un graf conex inchis peste* $[n]$*. Atunci* $\mathrm{reg}(S/J_G) = n - 1$ *daca si numai daca G este un graf linie.*

In [38], este propusa urmatoare conjectura.

Conjectura 3.2.11. *Fie G un graf. Atunci* $\mathrm{reg}(S/J_G) \le r$*, unde r este numarul de cliq-uri maximale din G.*

Se observa, ca pentru grafuri cordale, aceasta conjectura implica conjectura lui Matsuda si Murai, daca aratam ca cea din urma este adevarata pentru arbori.

Teorema 3.2.12. *(Ene, Herzog, Hibi [9, Teorema 1.1.]) Fie G un graf cordal peste* $[n]$ *cu proprietatea ca orice doua cliq-uri maximale distincte se intersecteaza in cel mult un varf. Atunci* $\mathrm{depth}\, S/J_G = n + c$*, unde c este numarul componentelor conexe din G.*

In plus, urmatoarele conditii sunt echivalente:

(a) J_G *este nemixtat.*

(b) J_G *este Cohen-Macaulay.*

(c) *Fiecare varf din G este intersectia a cel mult doua cliq-uri maximale.*

In continuare, demonstram intai Conjectura 3.2.11 pentru idealele muchie binomiale asociate unei clase speciale de grafuri cordale introduse in Teorema 3.2.12, iar, apoi demonstram conjectura lui Matsuda si Murai pentru aceasta clasa speciala de grafuri, care include si arborii.

Teorema 3.2.13. *Fie G un graf cordal peste* $[n]$ *cu proprietatea ca orice doua cliq-uri maximale distincte se intersecteaza in cel mult un varf. Atunci* $\mathrm{reg}(S/J_G) \le r$ *unde r este numarul de cliq-uri maximale din G.*

Corolarul 3.2.14. *Fie G un graf conex cordal peste* $[n]$ *cu proprietatea ca orice doua cliq-uri maximale distincte se intersecteaza in cel mult un varf. Daca* $\mathrm{reg}(S/J_G) = n - 1$*, atunci G este un graf linie.*

Bibliografie

[1] T. Albu, Ş. Raianu *Lecţii de Algebră Comutativă*. Universitatea Bucureşti, 1984.

[2] J. Apel, *On a conjecture of R. P. Stanley. II. Quotients modulo monomial ideals* , J. Algebraic Combin. **17** (2003), 57-74.

[3] W. Bruns, J. Gubeladze, *Polytopes, Rings and K-Theory*, Springer (2009).

[4] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings* Revised edition. Cambridge University Press (1998).

[5] W. Bruns, C. Krattenthaler, J. Uliczka, *Stanley decompositions and Hilbert depth in the Koszul complex*, J. Commut. Algebra, **2** (2010), 327–357.

[6] M. Cimpoeas, *The Stanley conjecture on monomial almost complete intersection ideals*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, **55(103)** (2012), 35–39.

[7] CoCoATeam, *CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra.* Available at http://cocoa.dima.unige.it

[8] G. A. Dirac, On rigid circuit graphs, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **38** (1961), 71–76.

[9] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, *Cohen-Macaulay binomial edge ideals*, Nagoya Math. J. **204** (2011), 57–68.

[10] V. Ene, A. Zarojanu, *On the regularity of binomial edge ideals* Mathematische Nachrichten, 1522-2616, DOI: 10.1002/mana.201300186, 2014.

[11] J. Herzog, *A survey on Stanley depth.* In "Monomial Ideals, Computations and Applications", A. Bigatti, P. Giménez, E. Sáenz-de-Cabezón (Eds.), Proceedings of MONICA 2011. Springer Lecture Notes in Mathematics **2083** (2013).

[12]] J. Herzog, A. S. Jahan, S. Yassemi, *Stanley decompositions and partitionable simplicial complexes* , J. Algebraic Combin. **27** (2008), 113-125.

[13] J. Herzog, T. Hibi, *Monomial Ideals*, Graduate Texts in Mathematics **260**, Springer, 2010.

[14] J. Herzog, T. Hibi, F. Hreinsdotir, T. Kahle, J. Rauh, *Binomial edge ideals and conditional independence statements*, Adv. Appl. Math. **45** (2010), 317–333.

[15] J. Herzog, M. Vladoiu, X. Zheng, *How to compute the Stanley depth of a monomial ideal,* J. Algebra, **322** (2009), 3151–3169.

[16] J. Herzog, D. Popescu, M. Vladoiu, *Stanley depth and size of a monomial ideal*, Proc. Amer. Math. Soc., **140** (2012), 493–504.

[17] B. Ichim, J. J. Moyano-Fernandez, *How to compute the multigraded Hilbert depth of a module*, Math. Nachr. **287** (2014), No. 11-12, 1274–1287.

[18] B. Ichim, A. Zarojanu, *Hdepth: An algorithm for computing the multigraded Hilbert depth of a module*, Experimental Mathematics, 23:3, 322–331, DOI: 10.1080/10586458.2014.908753.

[19] B. Ichim, A. Zarojanu, *Hdepth: An algorithm for computing the multigraded Hilbert depth of a module.* Implemented in CoCoA. Available from https://dl.dropboxusercontent.com/s/urhrasy5ntgbwzf/Hdepth.htm.

[20] M. Ishaq, M. I. Qureshi, *Stanley depth of edge ideals*, arXiv:1104.1018, (2011).

[21] M. Ishaq, *Lexsegment ideals are sequentially Cohen-Macaulay*, to appear in Algebra Cooloq.

[22] M. Ishaq, *Values and bounds of the Stanley depth*, Carpathian J. Math. **27** (2011), 217–224, arXiv:AC/1010.4692.

[23] G. Lyubeznik, *On the Arithmetical Rank of Monomial ideals*, J. Algebra **112** (1988), 86–89 .

[24] K. Matsuda, S. Murai, *Regularity bounds for binomial edge ideals,* J. Commut. Algebra **5** (2013), 141–149.

[25] I. Peeva, *Graded syzygies*, Algebra and Applications **14**, Springer, 2011

[26] A. Popescu, *Special Stanley Decompositions*, Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumanie, **53(101)** (2010), no 4, 363–372 , arXiv:AC/1008.3680.

[27] A. Popescu, *An algorithm to compute the Hilbert depth*, to appear in Journal of Symbolic Computation Volume 66, JanuaryFebruary 2015, Pages 17

[28] D. Popescu, *An inequality between depth and Stanley depth*, Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumanie **52(100)** (2009), 377–382,

[29] D. Popescu, *Stanley conjecture on intersections of four monomial prime ideals*, Comm. Alg., **41** (2013), 1–12, arXiv:AC/1009.5646.

[30] D. Popescu, *Depth and minimal number of generators of square free monomial ideals*, An. St. Univ. Ovidius, Constanta, **19** (2) (2011), 187–194.

[31] D. Popescu, *Depth of factors of square free monomial ideals*, Proceedings of AMS **142** (2014), 1965-1972, arXiv:AC/1110.1963.

[32] D. Popescu, *Upper bounds of depth of monomial ideals*, J. Commutat. Algebra, **5** (2013), 323–327, arXiv:AC/1206.3977.

[33] D. Popescu, A. Zarojanu, *Depth of some square free monomial ideals*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, **56(104)** (2013),117–124.

[34] D. Popescu, A. Zarojanu, *Depth of some special monomial ideals*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, **56(104)** 2013, 365–368, arXiv:AC/1301.5171v1.

[35] D. Popescu, A. Zarojanu, *Three generated, squarefree, monomial ideals*,To appear in Bulletin Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **58 (106)**, (2015), no 3 .

[36] A. Rauf, *Depth and Stanley depth of multigraded modules*, Comm. Algebra, **38** (2010),773–784.

[37] G. Rinaldo, *An algorithm to compute the Stanley depth of monomial ideals.* Le Matematiche Vol. LXIII – Fasc. II (2008). 243–256.

[38] S. Saeedi Madani, D. Kiani, *On the binomial edge ideal of a pair of graphs*, Electron. J. Combin, **20** (2013), no. 1, # P48.

[39] Y. Shen, *Lexsegment ideals of Hilbert depth 1*, (2012), arXiv:AC/1208.1822v1.

[40] Y. Shen, *Stanley depth of complete intersection monomial ideals and upper-discrete partions.* J. Algebra **321** (2009), 1285–1292.

[41] R. P. Stanley, *Linear Diophantine equations and local cohomology*, Invent. Math. **68** (1982) 175-193.

[42] R. Woodroofe, *Matching, coverings, and Castelnuovo-Mumford regularity*, J. Commut. Algebra **6** (2014), No. 2, 287–304.

[43] A. Zarojanu, *Stanley Conjecture on intersection of three monomial primary ideals*, Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumanie, **55(103)** (2012), 335–338.