

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

TEZĂ DE DOCTORAT

Metode numerice în studiul comportamentului ireversibil al materialelor elasto-plastice

Rezumat

Andronache (Stoicuța) Nadia Elena

Conducător științific
Prof. dr. Sanda Cleja-Țigoiu

București

2013

Introducere

Aplicațiile industriale se pot realiza numai în prezența unui cadru teoretic care să permită descrierea matematică a comportării materialelor, ținându-se cont de condițiile specifice de solicitare ale acestora. Pentru a putea studia comportarea materialelor cu proprietăți ireversibile este necesară atât cunoașterea reprezentărilor constitutive ale acestora, cât și formularea problemelor cu date inițiale și la limită. Caracterul ireversibil al deformațiilor plastice necesită adoptarea unei descrieri incrementale a legilor de curgere plastică. Pe de altă parte, dezvoltarea tehnicii de calcul permite abordarea numerică a problemelor complexe formulate în teoria plasticității.

Teza de doctorat are drept scop formularea de algoritmi numerici pentru problemele cu date inițiale și la limită în cadrul constitutiv al elasto-plasticității clasice. Sunt reconsiderate acele probleme în care există omisiuni, au fost parțial formalizate sau nu au fost corect formulate. Lucrarea este structurată pe patru capitole, la care se adaugă bibliografia.

În Paragraful 1.1 al primului capitol sunt descrise succint modelele elasto-plastice cu ecrusare mixtă de tip Prager și de tip Armstrong-Frederick, precum și modelul elasto-plastic cu ecrusare izotropă. În Paragraful 1.2 este descrisă problema cu date inițiale și pe frontieră scrisă în viteze, asociată modelului elasto-plastic cu ecrusare mixtă de tip Prager [16].

Capitolul 2 descrie un Algoritm de tip Simo-Hughes în elasto-plasticitatea cu ecrusare izotropă. În [17], metoda aplicată de Simo și Hughes presupune parcurgerea a trei etape: elastic predictor pentru starea elastică de încercare deci o soluție de tip elastic; plastic corector în care consistența este restabilită prin algoritmul de revenire pe suprafața de plasticitate și în final construcția tensorului coeficienților elasto-plastici tangenți. În Paragraful 2.1. este formulată problema matematică a modelului elasto-plastic cu ecrusare izotropă. Problema variațională discretă și aplicarea metodei elementului finit sunt descrise în Paragraful 2.2. Algoritmul metodei radiale de revenire este prezentat în Paragraful 2.3.

Capitolul 3 are ca obiect prezentarea de Algoritmi de tip Simo-Hughes modificați în elasto-plasticitatea de tip Prager cu stare plană de tensiune. În Paragraful 3.1. este descrisă problema elasto-plastică cu ecrusare mixtă de tip Prager și stare plană de tensiune, în cadrul constitutiv clasic specific micilor deformații. În problema propusă, componenta normală a deformației ε_{33} și a deformației plastice ε_{33}^p nu sunt omise în cadrul modelului. Se modifică expresia factorului plastic $\lambda^{(r)}$, precum și expresia tensorului coeficienților elasto-plastici tangenți \mathcal{E}^{ep} prin aplicarea algoritmului metodei radiale de revenire. Algoritmul general de rezolvare a problemei realizează cuplarea dintre metoda radială de revenire și metoda elementului finit. Prin particularizare, cazul variabilei cinematice de ecrusare α zero, se studiază în Paragraful 3.2 modele cu ecrusare izotropă în spațiul tensiunilor plane.

Capitolului 4 introduce inegalitățile variaționale în elasto-plasticitatea cu ecrusare de tip Armstrong-Frederick [1] cazul micilor deformații. Se introduce inegalitatea care se formulează la un moment generic de timp, pornind de la ecuația de echilibru derivată și cuplată cu reformularea condițiilor de tip Kuhn-Tucker și consistența printr-o inegalitate scalară. Formularea problemei cu date inițiale și la limită scrisă în viteze asociată modelului elasto-plastic cu ecrusare de tip Armstrong-Frederick este realizată în Paragraful 4.1. Inegalitatea variațională discretă și aproximarea internă a acesteia prin elemente finite este descrisă în paragraful următor. În final se asociază funcționala care permite determinarea prin punctele de minim a soluțiilor inegalității variaționale. În ultimul paragraf s-a analizat modul în care se formulează inegalitatea variațională în cazul stării de tensiune plană, prin reformularea problemei de inegalitate variațională cuplată cu algoritmul specific de actualizare.

Capitolul 1. Problema elasto-plastică cu ecrusare mixtă

Vom introduce modelele elasto-plactice pornind de la formele de reprezentare ale variabilelor interne de stare în cazul ecrusării izotrope și mixte. Distingem modelele elasto-plactice cu ecrusare mixtă de tip Prager [16] și de tip Armstrong-Frederick [1]. În Paragraful 1.2. este descrisă problema cu date inițiale și pe frontieră scrisă în viteze, asociată modelului elasto-plastic cu ecrusare mixtă de tip Prager [16].

1.1. Modele constitutive în elasto-plasticitatea cu mici deformații

Ipotezele specifice modelelor elasto-plactice cu mici deformații se pot găsi în Cleja-Țigoiu și Cristescu [7]. Pentru istoricul și evoluția conceptelor ce intervin în ecuațiile constitutive se pot urmări Simo și Hughes [17]. Modelele elasto-plactice descrise în acest paragraf sunt cele propuse de Prager [16] sau Armstrong și Frederick [1]. Prin particularizarea modelului Armstrong-Frederick se obține modelul Prager. Diferite reprezentări pentru funcția de plasticitate (sau condiția de ecrusare) pot fi găsite în Simo și Hughes [17] sau Chaboche [3].

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domeniul ocupat de corpul elasto-plastic. Fie punctele materiale $x \in \Omega$ și momentul de timp $t \in I$, unde intervalul de timp $I = [0, T] \subset \mathbb{R}_+$. Vom nota cu $\bar{\Omega}$ închiderea domeniului Ω , Sim spațiul tensorilor simetrici și cu Sim_0 spațiul tensorilor simetrici de urmă nulă. Introducem următoarele notații:

- $u : \bar{\Omega} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ vectorul deplasării;
- $\sigma : \Omega \times I \rightarrow Sim$ tensorul tensiunii;
- $\alpha : \Omega \times I \rightarrow Sim_0$ variabila cinematică de ecrusare;
- $k : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ variabilă izotropă de ecrusare,

Vom prezenta câteva tipuri de modele elasto-plactice, modele ce vor fi utilizate în formularea problemelor cu date inițiale și la limită.

A. Modelul elasto-plastic cu ecrusare mixtă de tip Prager [16]

Propoziția 1.1. *Modelul tridimensional elasto-plastic cu ecrusare mixtă de tip Prager este descris de următorul sistem diferențial:*

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \mathcal{E}\dot{\varepsilon} - \frac{\langle\beta\rangle}{h} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \frac{1}{Hk + \sigma_Y} \mathcal{E}(\sigma' - \alpha) \\ \dot{\varepsilon}^p = \frac{\langle\beta\rangle}{h} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \frac{1}{Hk + \sigma_Y} (\sigma' - \alpha) \\ \dot{\alpha} = \frac{\langle\beta\rangle}{h} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \frac{C}{Hk + \sigma_Y} (\sigma' - \alpha) \\ \dot{k} = \frac{\langle\beta\rangle}{h} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \end{cases} \quad \text{unde} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\sigma, \alpha, k) = \|\sigma' - \alpha\| - \sqrt{\frac{2}{3}}[Hk + \sigma_Y] \\ \beta = \frac{1}{Hk + \sigma_Y} \mathcal{E}(\sigma' - \alpha) \cdot \dot{\varepsilon} \\ h = \frac{1}{(Hk + \sigma_Y)^2} (\sigma' - \alpha) \cdot \mathcal{E}(\sigma' - \alpha) + C + \sqrt{\frac{2}{3}}H \end{cases} \quad (2)$$

în ipoteza că $h > 0$ cu H , C și σ_Y constante de material.

B. Modelul elasto-plastic cu ecruisare izotropă [17]

Observația 1.1. Dacă în cadrul modelului de mai sus, considerăm variabila cinematică de ecruisare α nulă, atunci modelul elasto-plastic este cu ecruisare izotropă.

Propoziția 1.2. Modelul tridimensional elasto-plastic cu ecruisare izotropă este descris de următorul sistem diferențial:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \mathcal{E}\dot{\varepsilon} - \frac{\langle\beta\rangle}{h} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \frac{1}{Hk + \sigma_Y} \mathcal{E}\sigma' \\ \dot{\varepsilon}^p = \frac{\langle\beta\rangle}{h} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \frac{1}{Hk + \sigma_Y} \sigma' \\ \dot{k} = \frac{\langle\beta\rangle}{h} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \end{cases} \quad \text{unde} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\sigma, k) = \|\sigma'\| - \sqrt{\frac{2}{3}}[Hk + \sigma_Y] \\ \beta = \frac{1}{Hk + \sigma_Y} \mathcal{E}\sigma' \cdot \dot{\varepsilon} \\ h = \frac{1}{(Hk + \sigma_Y)^2} \sigma' \cdot \mathcal{E}\sigma' + \sqrt{\frac{2}{3}}H \end{cases} \quad (4)$$

în ipoteza că parametrul de ecruisare $h > 0$, iar H și σ_Y sunt constante de material.

C. Modelul elasto-plastic cu ecruisare mixtă de tip Armstrong- Frederick [1], [3]

Propoziția 1.3. Modelul tridimensional elasto-plastic neliniar cu ecruisare mixtă de tip Armstrong-Frederick este descris de următorul sistem diferențial:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \mathcal{E}\dot{\varepsilon} - \frac{\langle\beta\rangle}{h} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \frac{3}{2} \frac{1}{Q(1 - e^{-bk}) + \sigma_Y} \mathcal{E}(\sigma' - \alpha) \\ \dot{\varepsilon}^p = \frac{\langle\beta\rangle}{h} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \frac{3}{2} \frac{1}{Q(1 - e^{-bk}) + \sigma_Y} (\sigma' - \alpha) \\ \dot{\alpha} = \frac{\langle\beta\rangle}{h} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \left(C \frac{3}{2} \frac{1}{Q(1 - e^{-bk}) + \sigma_Y} (\sigma' - \alpha) - \gamma\alpha \right) \\ \dot{k} = \frac{\langle\beta\rangle}{h} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \end{cases} \quad \text{unde} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\sigma, \alpha, k) = \frac{3}{2} \|\sigma' - \alpha\| - [Q(1 - e^{-bk}) + \sigma_Y] \\ \beta = \frac{3}{2} \frac{1}{Q(1 - e^{-bk}) + \sigma_Y} \mathcal{E}(\sigma' - \alpha) \cdot \dot{\varepsilon} \\ h = \frac{3}{2} \frac{1}{(Q(1 - e^{-bk}) + \sigma_Y)^2} (\sigma' - \alpha) \cdot \mathcal{E}(\sigma' - \alpha) + C - \gamma \frac{3}{2} \frac{1}{Q(1 - e^{-bk}) + \sigma_Y} (\sigma' - \alpha) \cdot \alpha + Qbe^{-bk} \end{cases} \quad (6)$$

în ipoteza că parametrul de ecruisare $h > 0$, cu $Q, b, C, \gamma, \sigma_Y$ constante de material.

Observația 1.2. Dacă în expresia ecuației constitutive a variabilei cinemactice de ecruisare se consideră $\gamma = 0$, atunci modelul de mai sus coincide cu modelul lui Prager.

1.2. Problema elasto-plastică cu date inițiale și la limită

În acest paragraf vom prezenta teorema în care se descrie forma slabă a ecuației de echilibru pentru problema cvasistatică cu date inițiale și pe frontieră scrisă în viteze asociată modelului elasto-plastic cu ecruisare mixtă de tip Prager descris la **Punctul A**. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cu frontiera Lipschitz continuă $\partial\Omega = \Gamma$. Frontiera corpului este descompusă în două părți Γ_u și Γ_σ , cu $\bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_\sigma = \Gamma$ și $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$. Fie n normala exterioară frontierei $\partial\Omega$, iar $b : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reprezintă forțele masice.

Problema P1. Fie date funcțiile $b, f, g : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Să se determine funcțiile $\sigma, \varepsilon^p, \alpha$ și k definite pe $\Omega \times I$ care satisfac sistemul de ecuații de tip diferențial:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}) - \mathcal{E}\frac{\langle\beta\rangle}{h}\partial_\sigma\mathcal{F}\mathcal{H}(\mathcal{F}) \\ \dot{\varepsilon}^p = \frac{\langle\beta\rangle}{h}\partial_\sigma\mathcal{F}\mathcal{H}(\mathcal{F}) \\ \dot{\alpha} = \frac{\langle\beta\rangle}{h}C\partial_\sigma\mathcal{F}\mathcal{H}(\mathcal{F}) \\ \dot{k} = \frac{\langle\beta\rangle}{h}\mathcal{H}(\mathcal{F}) \end{cases} \quad (7)$$

în ipoteza că $h > 0$, unde

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\sigma, \alpha, k) = \|\sigma' - \alpha\| - F(k) \\ \partial_\sigma\mathcal{F} = \frac{\sigma' - \alpha}{\|\sigma' - \alpha\|} \\ \beta = \partial_\sigma\mathcal{F} \cdot \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}) \\ h = \partial_\sigma\mathcal{F} \cdot \mathcal{E}\partial_\sigma\mathcal{F} + C + \sqrt{\frac{2}{3}}H \end{cases} \quad (8)$$

și problema cvasistatică cu date inițiale și la limită scrisă în viteze:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\dot{\sigma} + \dot{b} = 0 \quad \text{pe } \Omega \times I \\ u(0) = u_0, \sigma(0) = \sigma_0, \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \\ \varepsilon^p(0) = \varepsilon_0^p, \alpha(0) = \alpha_0, k(0) = k_0 \\ \dot{\sigma}n = \dot{f} \quad \text{pe } \Gamma_\sigma \times I \\ \dot{u} = \dot{g} \quad \text{pe } \Gamma_u \times I \end{cases} \quad (9)$$

Definim spațiul vitezelor admisibile, la fiecare moment de timp t :

$$\mathcal{V}_{ad}(t) = \left\{ w \in L^2(\Omega); \frac{\partial w}{\partial x} \in L^2(\Omega), w|_{\Gamma_u} = \dot{g} \right\} \subset (H^1(\Omega))^3 \quad (10)$$

unde $L^2(\Omega)$ este spațiul funcțiilor pătratice integrabile pe Ω , iar $H^1(\Omega)$ este spațiul Sobolev.

Teorema 1.1. La fiecare moment de timp t , deplasarea $u : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisface egalitatea:

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}^{ep}\varepsilon(\dot{u}) \cdot \varepsilon(w) dx = L(w) \quad , \forall w \in \mathcal{V}_{ad} \quad (11)$$

unde funcționala liniară $L(\cdot) : \mathcal{V}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de:

$$L(w) = \int_{\Gamma_\sigma} f \cdot w d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \sigma n \cdot g d\Gamma + \int_{\Omega} b \cdot w dx. \quad (12)$$

Tensorul coeficienților elasto-plastici tangenți \mathcal{E}^{ep} este dat de relația:

$$\mathcal{E}^{ep} = \begin{cases} \mathcal{E}, & \text{dacă } \mathcal{H}(\mathcal{F}) = 0 \\ \mathcal{E} - \frac{1}{h}(\mathcal{E}\partial_\sigma\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}\partial_\sigma\mathcal{F}), & \text{dacă } \mathcal{H}(\mathcal{F}) = 1 \end{cases} \quad (13)$$

dar doar în ipoteza pentru care nu se produce nici o descărcare de-a lungul procesului,

$$\partial_\sigma\mathcal{F} \cdot \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}) > 0 \quad (14)$$

adică factorul plastic complementar β este pozitiv.

Capitolul 2. Algoritmi de tip Simo-Hughes în elasto-plasticitatea cu ecruisare izotropă

Rezultatele obținute în acest capitol sunt descrise în [6] ”Cleja- Țigoiu, S., **Stoicuța N.**, Raisa Pașcan, Numerical Approach To Some Problems in Elasto-Plasticity”. Este introdus cadrul constitutiv specific materialelor cu deformații finite plastice și vâsco-plastice. Este formulată problema vâsco-plastică cazul deformațiilor finite asociată problemei cu date la limită pentru materiale cu structură cristalină. În cazul micilor deformații este prezentat algoritmul de rezolvare a problemei cvasistatice în elasto-plasticitatea cu ecruisare izotropă. Egalitatea variațională discretă asociată problemei este rezolvată prin metoda elementului finit. Cu metoda radială de revenire este determinată expresia algoritmică a factorului plastic λ și tensorul coeficienților elasto-plastici tangenți \mathcal{E}^{ep} . Soluțiile numerice reprezentând curbele tensiune-deformație au fost obținute prin simularea numerică într-o problemă de deformare plană a unei plăci.

În acest capitol este prezentat un algoritm numeric de tip Simo-Hughes pentru rezolvarea problemei elasto-plastice cu ecruisare izotropă. Modelul este descris ca în Cleja-Țigoiu și Cristescu [7]. Modelul elasto-plastic cu ecruisare izotropă a fost descris în primul capitol la **Punctul B**.

Este formulată matematic problema cvasistatică cu date inițiale și la limită asociată modelului elasto-plastic cu ecruisare izotropă. Problema variațională discretă este prezentată într-o manieră asemănătoare cu cea din elasticitatea clasică, propusă de Han și Reddy [14]. Metoda elementului finit (MEF) este aplicată ca în Fish și Belytschko [12]. Asamblarea matricei forțelor interne și a vectorilor forțelor externe se va realiza la fel ca în Hughes [15]. Este aplicat algoritmul metodei radiale de revenire. Cu acest algoritm se determină modulii algoritmici elasto-plastici tangenți \mathcal{E}^{ep} . Algoritmul general de rezolvare a problemei propuse este descris la finalul capitolului. Exemplele numerice propuse ca studiu se realizează prin simulare pentru două placi trapezoidale cu și fără gaură.

Algoritmul numeric aplicat de Simo și Hughes în [17], pentru rezolvarea problemei elasto-plastice cu ecruisare mixtă este de tip predictor-corector și presupune parcurgerea a două etape:

- etapa numită *Predictor Elastic* (Elastic Predictor) pentru starea elastică de încercare (Trial Elastic State). Este specificat incrementul deplasării în intervalul $[t_n, t_{n+1}]$, cu ipoteza că *starea ireversibilă este înghețată la valoarea anterioară*. Dacă starea elastică de încercare este în interiorul suprafeței curente de plasticitate atunci comportamentul este elastic.

- etapa de *Corector Plastic*. *Algoritmul de revenire pe suprafața de plasticitate* (Plastic Corrector, Return Mapping). Dacă starea elastică de încercare este în exteriorul suprafeței de plasticitate, atunci aceasta este luată drept condiție inițială la momentul t_n pentru care factorul plastic este nul. Algoritmul de revenire pe suprafața de plasticitate realizează consistența procesului de deformare plastică;

- se construiesc modulii algoritmici elasto-plastic tangenți (Algorithmic Elasto-plastic Tangent Moduli) ca o consecință a consistenței procesului de deformare.

2.1. Formularea matematică a problemei

Vom utiliza convențiile standard adoptate de Simo și Hughes [17], prin care vom scrie următorii tensori sub formă vectorială pentru cazul bidimensional:

$$\sigma = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad 2\sigma_{12}]^T; \quad \varepsilon = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12}]^T; \quad \varepsilon^p = [\varepsilon_{11}^p \quad \varepsilon_{22}^p \quad 2\varepsilon_{12}^p]^T \quad (15)$$

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cu frontiera Lipschitz continuă $\partial\Omega = \Gamma$. Frontiera corpului este descompusă în două părți Γ_u și Γ_σ , cu $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \bar{\Gamma}$ și $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$. Fie n normala exterioară frontierei și $s = \sigma'$ partea deviatorică a tensorului de tensiune.

Problema P. Fie date funcțiile $b, f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. Să se găsească funcțiile $u, \sigma, \varepsilon, \varepsilon^p, k$ definite pe $\Omega \times [0, T]$ care satisfac următorul sistem:

$$P_1 : \begin{cases} \tilde{\mathcal{F}}(s, k) = \|s\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [Hk + \sigma_Y] \\ \dot{\varepsilon}^p = \lambda n \\ \dot{k} = \lambda \\ \lambda = \frac{\langle \beta \rangle}{h} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \\ \beta = n \cdot \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}) \\ h = n \cdot \mathcal{E}n + \sqrt{\frac{2}{3}} H \end{cases} \quad (16)$$

împreună cu ecuația constitutivă a tensorului tensiunii

$$\sigma = \mathcal{E}(\varepsilon(u) - \varepsilon^p) \quad (17)$$

și problema cvasistatică cu date inițiale și la limită:

$$P_2 : \begin{cases} \operatorname{div}(\sigma) + b = 0 \text{ pe } \Omega \times I \\ \sigma n = f \text{ pe } \Gamma_\sigma \times I \\ u = 0 \text{ pe } \Gamma_u \times I \\ \sigma(0) = 0, \varepsilon(0) = 0, \varepsilon^p(0) = 0, k(0) = 0, u(0) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Pentru a rezolva numeric **Problema P** este prezentată formularea variațională discretizată a problemei cvasistatice cu date inițiale și la limită, care devine una de tip pseudo-elastic. Se aplică metoda elementului finit la fiecare moment de timp t fixat. În pasul următor se aplică metoda radială de revenire pentru a rezolva Problema P_1 . La fiecare moment de timp t rezultă o relație finită implicită între valorile curente ale tensiunii, deformației și a variabilei interne de stare. În aceste condiții, tensorul coeficienților elasto-plastici tangenți $\mathcal{E}^{\varepsilon^p}$, poate fi asociat cu modelul. În final vom realiza cuplarea dintre metoda radială de revenire și metoda elementului finit.

2.2. Formularea variațională discretă a problemei și aplicarea (MEF)

Se consideră o diviziune a intervalului de timp $[0, T]$ cu t_0, t_1, \dots, t_N în care $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Problema P_2 formulată la momentul de timp t_{n+1} este echivalentă cu următoarea problemă pseudo-elastică:

Problema pseudo-elastică P_{n+1}^e . Să se găsească deplasarea u_{n+1} , soluție a egalității variaționale discretizate:

$$\int_{\Omega} \sigma(u_{n+1}) \cdot \varepsilon(w_{n+1}) dx = L(w_{n+1}) \quad , \forall w_{n+1} \in \mathcal{V}_{ad}^{0h} \quad (19)$$

în care $\sigma(u_{n+1})$ este câmpul tensorial dependent de deplasarea u_{n+1} , iar \mathcal{V}_{ad}^{0h} este spațiul finit dimensional al deplasărilor admisibile.

Funcționala $L(w_{n+1})$ este dată de:

$$L(w_{n+1}) = \int_{\Gamma_\sigma} f_{n+1} \cdot w_{n+1} d\Gamma + \int_{\Omega} b_{n+1} \cdot w_{n+1} dx \quad (20)$$

În urma aplicării elementului finit egalității variaționale discretizate date de (19), se ajunge la un sistem neliniar de forma (21) care va fi rezolvat în necunoscuta \hat{u}_{n+1} .

Teorema 2.1. *Câmpul discretizat al deplasării \hat{u}_{n+1} se găsește ca soluție a sistemului neliniar:*

$$\hat{G}(\hat{u}_{n+1}) \equiv F^{\text{int}}(\hat{u}_{n+1}) - F_{n+1}^{\text{ext}} = 0. \quad (21)$$

unde $F^{\text{int}}(\hat{u}_{n+1})$ este matricea asamblată a forțelor interne obținută în urma aplicării elementului finit, iar F_{n+1}^{ext} este vectorul asamblat al forțelor externe.

2.3. Metoda radială de revenire

Cu ajutorul acestei metode se determină algoritmul de consistență și tensorul coeficienților elasto-plastici tangenți \mathcal{E}^{ep} asociați Problemei P_1 . Pentru fiecare element din rețea e la momentul de timp t_{n+1} relația (17) devine:

$$[\sigma]_{n+1}^e = \mathcal{E}([\varepsilon_u]_{n+1}^e - [\varepsilon^p]_{n+1}^e) \quad (22)$$

unde tensorul elastic \mathcal{E} corespunde cazului izotrop linear elastic $\mathcal{E} = \lambda_a tr \varepsilon + 2\mu_a \varepsilon$, cu λ_a, μ_a sunt constantele lui Lamé.

Este aplicată metoda Euler implicită:

$$\begin{aligned} [\varepsilon^p]_{n+1}^e &= [\varepsilon^p]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^e \frac{[s]_{n+1}^e}{\|[s]_{n+1}^e\|}; \\ [k]_{n+1}^e &= [k]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^e \end{aligned} \quad (23)$$

unde $[\lambda^*]_{n+1}^e = [\lambda]_{n+1}^e \Delta t = [\lambda]_{n+1}^e (t_{n+1} - t_n)$ iar funcția de plasticitate scrisă la momentul t_{n+1} este:

$$\tilde{\mathcal{F}}([s]_{n+1}^e, [k]_{n+1}^e) = \|[s]_{n+1}^e\| - [H [k]_{n+1}^e + \sigma_Y] \quad (24)$$

Predictor elastic. Definim *starea elastică de încercare* (Trial state) prin înghețarea deformației plastice la momentul anterior:

$$\{\sigma\}_{n+1}^e \}^{tr} = k_a tr([\varepsilon_u]_{n+1}^e) \mathbf{1} + 2\mu_a ([\varepsilon'_u]_{n+1}^e - [\varepsilon^p]_n^e); \quad \{[s]_{n+1}^e\}^{tr} = 2\mu_a ([\varepsilon'_u]_{n+1}^e - [\varepsilon^p]_n^e) \quad (25)$$

unde k_a este modulul de forfecare, iar $\mathbf{1}$ este tensorul unitate.

În această etapă, tensorul deformației plastice $[\varepsilon^p]_{n+1}^e$ și variabila izotropă de ecrusare $[k]_{n+1}^e$ sunt înghețate ca valori anterioare:

$$[\varepsilon^p]_{n+1}^e = [\varepsilon^p]_n^e; \quad [k]_{n+1}^e = [k]_n^e \quad (26)$$

Corector plastic. Algoritmul de revenire pe suprafața de plasticitate. Scopul acestei etape este acela de a restaura consistența. Dacă starea elastică de încercare este în afara suprafeței de plasticitate, atunci acesta este luată drept condiție inițială pentru soluția problemei de corector plastic. Au loc următoarele relații:

$$[\sigma]_{n+1}^e = \{\sigma\}_{n+1}^e \}^{tr} - 2\mu_a [\lambda^*]_{n+1}^e \frac{[s]_{n+1}^e}{\|[s]_{n+1}^e\|}; \quad [s]_{n+1}^e = \{[s]_{n+1}^e\}^{tr} - 2\mu_a [\lambda^*]_{n+1}^e \frac{[s]_{n+1}^e}{\|[s]_{n+1}^e\|} \quad (27)$$

Factorul plastic $[\lambda^*]_{n+1}^e$ se determină din condiția discretă de consistență și condițiile Kuhn-Tucker discrete:

$$\tilde{\mathcal{F}}([s]_{n+1}^e, [k]_{n+1}^e) \leq 0, \quad [\lambda^*]_{n+1}^e \geq 0, \quad [\lambda^*]_{n+1}^e \tilde{\mathcal{F}}([s]_{n+1}^e, [k]_{n+1}^e) = 0 \quad (28)$$

Propoziția 2.1. *Au loc următoarele condiții de încărcare/descărcare:*

Dacă $\mathcal{F}^{tr}(\{[s]_{n+1}^e\}^{tr}, [k]_n^e) \leq 0$ atunci

$$[\lambda^*]_{n+1}^e = 0, \quad [s]_{n+1}^e = \{[s]_{n+1}^e\}^{tr}, \quad [\varepsilon^p]_{n+1}^e = [\varepsilon^p]_n^e, \quad [k]_{n+1}^e = [k]_n^e$$

Dacă $\mathcal{F}^{tr}(\{[s]_{n+1}^e\}^{tr}, [k]_n^e) > 0$, atunci factorul plastic algoritmic $[\lambda^]_{n+1}^e$ este diferit de zero și se calculează cu expresia:*

$$[\lambda^*]_{n+1}^e = \frac{\|\{[s]_{n+1}^e\}^{tr}\| - (H [k]_n^e + \sigma_Y)}{H + 2\mu} \quad (29)$$

unde $\mathcal{F}^{tr}(\{[s]_{n+1}^e\}^{tr}, [k]_n^e) = \|\{[s]_{n+1}^e\}^{tr}\| - [H [k]_n^e + \sigma_Y]$ este funcția de plasticitate test.

Expresia algoritmică a factorului plastic $[\lambda^*]_{n+1}^e$ intervine în rezolvarea sistemului diferențial descris în Problema (P_1).

Pentru ca algoritmul metodei radiale de revenire să fie complet determinat este necesar să determinăm expresia algoritmică a tensorului coeficienților elasto-plastici tangenți \mathcal{E}^{ep} . Acesta intervine în algoritmul de aplicare a metodei Newton-Raphson.

Sistemul neliniar (21) va fi rezolvat în necunoscuta \hat{u}_{n+1} cu metoda Newton-Raphson:

$$\hat{u}_{n+1}^{j+1} = \hat{u}_{n+1}^j - \beta_j \left[K \left(\hat{u}_{n+1}^j \right) \right]^{-1} \hat{G} \left(\hat{u}_{n+1}^j \right) \quad (30)$$

unde $\beta_j \in (0, 1]$, iar Jacobianul funcției este dat de următoarea expresie:

$$[K(\hat{u}_{n+1})] = \frac{nel}{e=1} \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(B^e(\xi, \eta))^T [\mathcal{E}^{ep}]_{n+1}^e B^e(\xi, \eta) |J^e(\xi, \eta)| \right] d\xi d\eta \right] \quad (31)$$

unde B^e este matricea ale cărei componente sunt derivatele funcțiilor de interpolare pe fiecare element e din rețea, iar J^e este jacobianul prin care se face trecerea de la coordonatele fizice (x_1, x_2) la coordonatele naturale (ξ, η) .

Tensorul coeficienților elasto-plastici tangenți \mathcal{E}^{ep} se calculează din relația:

$$[\mathcal{E}^{ep}]_{n+1}^e = \frac{\partial [\sigma]_{n+1}^e}{\partial [\varepsilon]_{n+1}^e} \quad (32)$$

Propoziția 2.2. *Expresia algoritmică a tensorului coeficienților elasto-plastici tangenți \mathcal{E}^{ep} este exprimată prin:*

$$[\mathcal{E}^{ep}]_{n+1}^e = \begin{cases} \mathcal{E} & , \mathcal{F}^{tr} \leq 0 \\ k_a \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu_a [\theta_1]_{n+1}^e \mathbf{I}_{dev} - 2\mu_a [\theta_2]_{n+1}^e [n]_{n+1}^e \otimes [n]_{n+1}^e & , \mathcal{F}^{tr} > 0 \end{cases} \quad (33)$$

$$[\theta_1]_{n+1}^e = 1 - [\lambda^*]_{n+1}^e \frac{2\mu_a}{\left\| \{[s]_{n+1}^e\}^{tr} \right\|}; \quad [\theta_2]_{n+1}^e = \frac{2\mu_a}{H + 2\mu_a} - \frac{2\mu_a [\lambda^*]_{n+1}^e}{\left\| \{[s]_{n+1}^e\}^{tr} \right\|} \quad (34)$$

unde $\mathbf{I}_{dev} := I - 1/3 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ este tensorul deviator.

În continuare vom prezenta algoritmul metodei radiale de revenire:

$$\left\{ [\sigma]_{n+1}^{e,j+1}, [\varepsilon^p]_{n+1}^{e,j+1}, [k]_{n+1}^{e,j+1} \right\} = \text{RadialReturn} \left\{ u_{n+1}^{e,j}, [\varepsilon^p]_n^e, [k]_n^e \right\} \quad (35)$$

1. calculăm tensiunea elastică de încercare pentru deformația $[\varepsilon_u]_{n+1}^{e,j+1} = [B]^e u_{n+1}^{e,j}$ prescrisă

$$\left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} = 2\mu_a \left([\varepsilon'_u]_{n+1}^{e,j+1} - [\varepsilon^p]_n^e \right); \quad \left\{ [\sigma]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} = k_a \text{tr} \left([\varepsilon_u]_{n+1}^{e,j+1} \right) \mathbf{1} + \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}$$

2. se verifică condiția de plasticitate pentru $\mathcal{F}_{n+1}^{tr,j+1} = \mathcal{F}^{tr} \left(\left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}, [k]_n^e \right)$:

ET1. Dacă $\mathcal{F}_{n+1}^{tr,j+1} \leq 0$ atunci

- pas elastic

$$[\sigma]_{n+1}^{e,j+1} = \left\{ [\sigma]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}; \quad [\varepsilon^p]_{n+1}^{e,j+1} = [\varepsilon^p]_n^e; \quad [k]_{n+1}^{e,j+1} = [k]_n^e; \quad [\mathcal{E}^{ep}]_{n+1}^{e,j+1} = \mathcal{E}$$

Altfel

- pas plastic: se trece la pasul 3

Sfârșit ET1.

3. metoda radială de revenire

$$\left\{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} = \frac{\left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}}{\left\| \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \right\|} ; [k]_{n+1}^{e,j+1} = [k]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1}$$

$$[\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} = \frac{\left\| \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \right\| - (H[k]_n^e + \sigma_Y)}{H + 2\mu_a}$$

$$[s]_{n+1}^{e,j+1} = \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} - 2\mu_a [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} \left\{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}$$

$$[\sigma]_{n+1}^{e,j+1} = \left\{ [\sigma]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} - 2\mu_a [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} \left\{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} ;$$

$$[\varepsilon^p]_{n+1}^{e,j+1} = [\varepsilon^p]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} \left\{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}$$

$$[\theta_1]_{n+1}^e = 1 - [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} \frac{2\mu_a}{\left\| \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \right\|} ;$$

$$[\theta_2]_{n+1}^e = \frac{2\mu_a}{H + 2\mu_a} - \frac{2\mu_a [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1}}{\left\| \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \right\|}$$

$$[\mathcal{E}^{ep}]_{n+1}^{e,j+1} = k_a \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu_a [\theta_1]_{n+1}^e \mathbf{I}_{\text{dev}} - 2\mu_a [\theta_2]_{n+1}^e [n]_{n+1}^{e,j+1} \otimes [n]_{n+1}^{e,j+1}$$

Revenire

Algoritm general de rezolvare al Problemei P:

1. inițializăm vectorii $n = 0$; $[\hat{u}]_1^0 = 0$; $[\varepsilon^p]_0 = 0$; $[k]_0 = 0$;
2. se execută o buclă iterativă cu referire la variabila de indexare n , $n = \overline{0, N}$ cu N fixat, în vederea incrementării timpului cu pasul Δt , $t_0 = 0$;
 - 2.1. se execută o buclă iterativă cu referire la variabila de indexare j , $j = 0, 1, \dots$, în vederea implementării metodei Newton-Raphson;
 - 2.2. se execută o buclă iterativă cu referire la numărul de elemente din rețea
 - vectorii locali $[\hat{u}]_{n+1}^{e,j}$, $[\varepsilon^p]_n^e$ și $[k]_n^e$ sunt extrași din vectorii globali $[\hat{u}]_{n+1}^j$, $[\varepsilon^p]_n$, $[k]_n$;
 - este aplicată procedura **Algoritm radial de revenire**;
 - este calculată matricea locală Jacobi, precum și vectorii locali ai forțelor interne și externe, după care se trece la asamblarea acestora pe fiecare element;
 - deplasările \hat{u}_{n+1}^{j+1} sunt determinate cu metoda Newton-Raphson:

$$\hat{u}_{n+1}^{j+1} = \hat{u}_{n+1}^j - \beta_j [\Delta \hat{u}]_{n+1}^j ; \quad [\Delta \hat{u}]_{n+1}^j = \left[K \left(\hat{u}_{n+1}^j \right) \right]^{-1} G \left(\hat{u}_{n+1}^j \right) ;$$

- eroarea metodei: $[ERR]_{n+1}^j = [\Delta \hat{u}]_{n+1}^j / \left\| \hat{u}_{n+1}^j \right\|$ Dacă $[ERR]_{n+1}^j < \text{TOL}$
 $\hat{u}_{n+2} \leftarrow \hat{u}_{n+1}^{j+1}$; $[\varepsilon^p]_{n+1} = [\varepsilon^p]_{n+1}^{j+1}$; $[k]_{n+1} = [k]_{n+1}^{j+1}$; $[\sigma]_{n+1} = [\sigma]_{n+1}^{j+1}$;
Revenire
Altfel $j \leftarrow j + 1$ salt la 2.2.

Exemplul 2.1. Vom alege o placă trapezoidală, pentru care marginea stângă este fixată, iar marginea de jos și cea din dreapta sunt libere de tensiuni, adică $f = 0$. Tracțiunea $f = 50 \sin t$ este aplicată pe marginea orizontală de sus, forțele interne fiind nule $b = 0$.

În placa trapezoidală cu gaură, vom face o gaură cu raza de 20 mm. Factorul de scală utilizat în reprezentările graficelor este 5 pentru ambele plăci.

Pentru a realiza discretizarea rețelei, atât placa fără gaură cât și cea cu gaură au fost împărțite în 2500 elemente, fiecare element având patru noduri, numărul total de noduri din rețea fiind de 2601.

Distribuția tensiunii Mises, notată $\sigma_{Mises} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2\sigma_{12}^2}$, este reprezentată la aceleași momente de timp t ca în figurile anterioare.

Materialul ales pentru realizarea simulării este oțel DP 600 [2]:

$$\{ E = 182000 [MPa]; \sigma_Y = 349,4 [MPa] \nu = 0,3; H = 1194 [MPa] \} \quad (36)$$

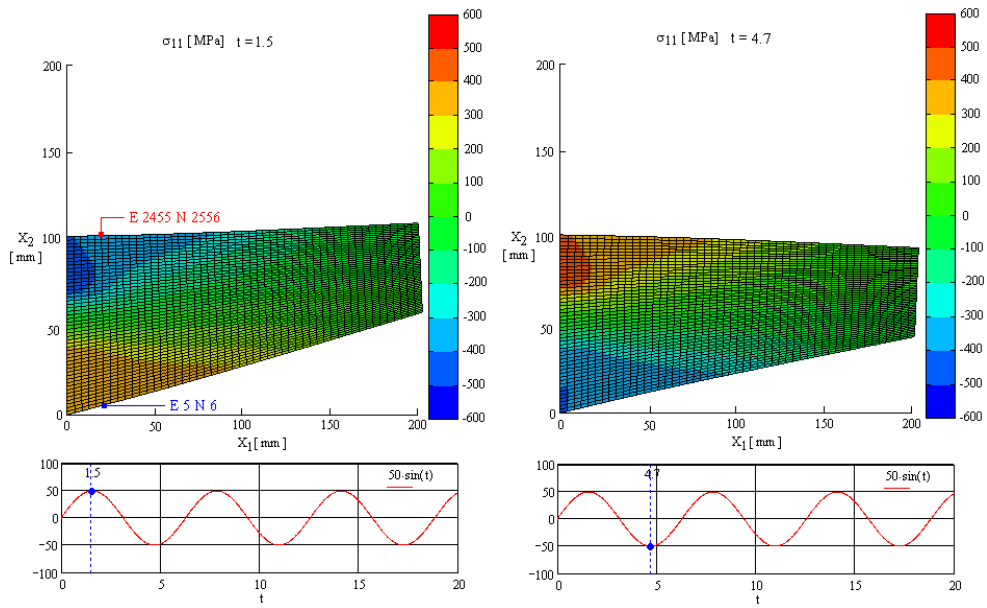


Figura 1: Distribuția tensiunii σ_{11} pentru placa fără gaură la $t = 1.5$ și $t = 4.7$, care corespunde maximului și minimului forței aplicate f - ecrusare izotropă

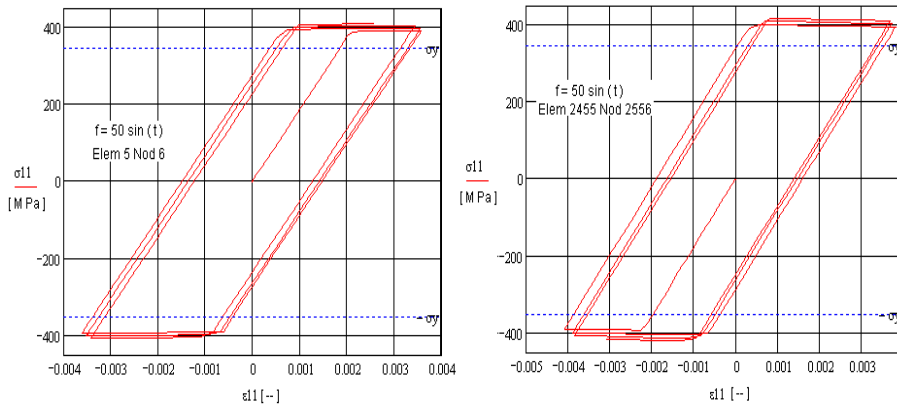


Figura 2: Graficele tensiunilor σ_{11} în raport cu deformațiile ϵ_{11} reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa fără gaură - ecrusare izotropă

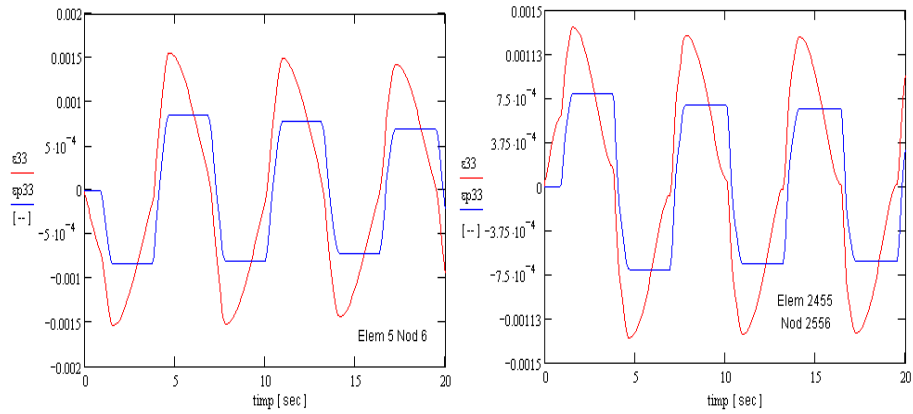


Figura 3: Graficele deformațiilor ε_{33} și ale deformațiilor plastice ε_{33}^p în raport cu timpul, reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa fără gaură - ecruisare izotropă

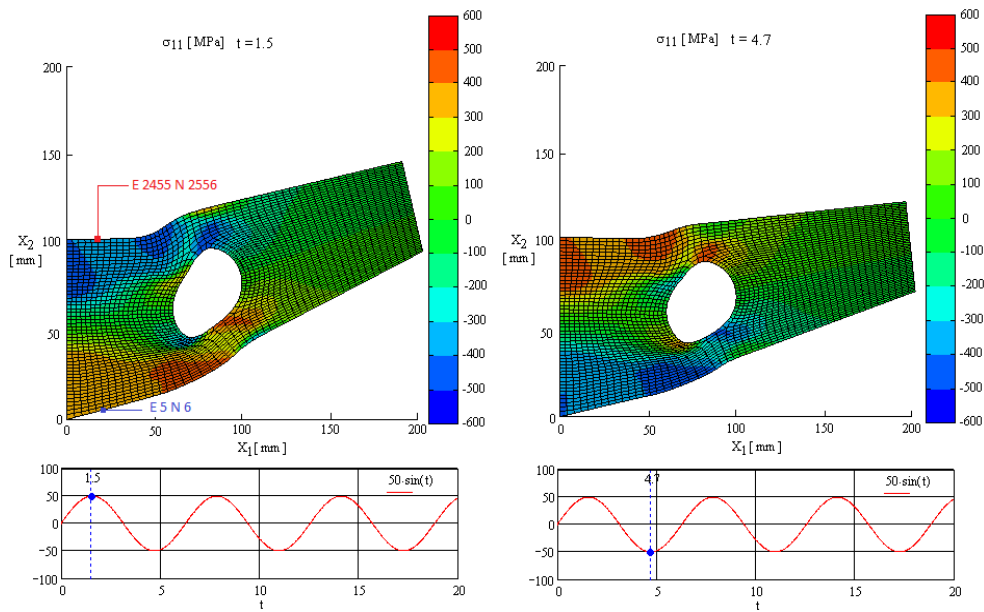


Figura 4: Distribuția tensiunii σ_{11} pentru placa cu gaură la $t = 1.5$ și $t = 4.7$, care corespunde maximului și minimului forței aplicate f - ecruisare izotropă

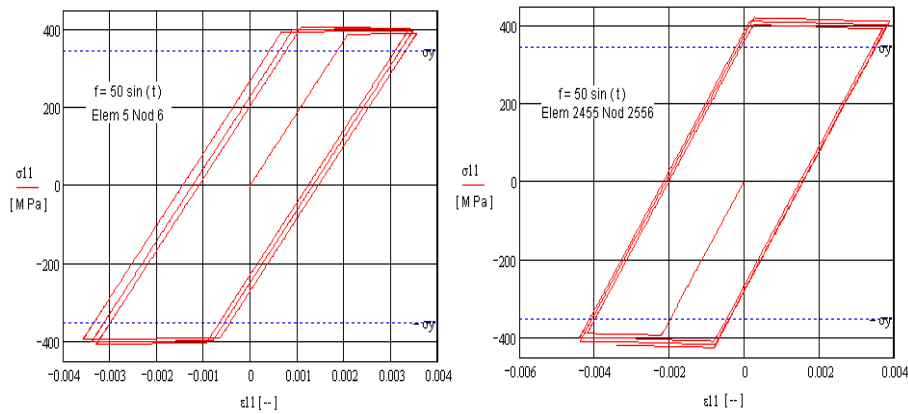


Figura 5: Graficele tensiunilor σ_{11} în raport cu deformațiile ε_{11} reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa cu gaură- ecruisare izotropă

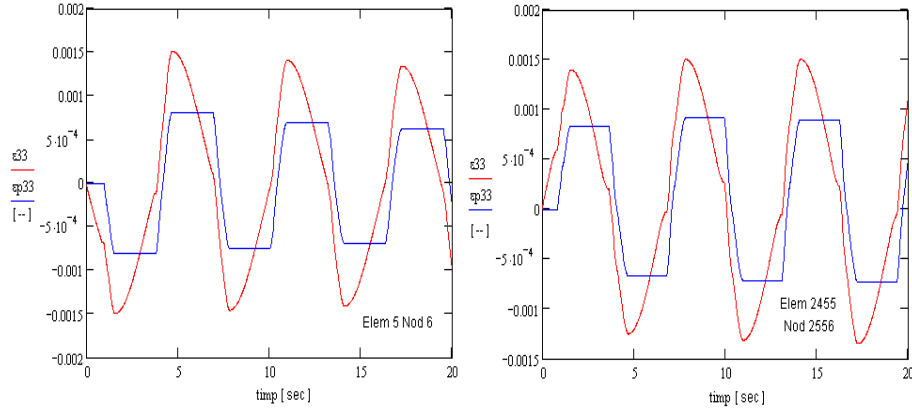


Figura 6: Graficele deformațiilor ε_{33} și ale deformațiilor plastice ε_{33}^p în raport cu timpul, reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa cu gaură - ecrusare izotropă

2.4. Concluzii

- Este descrisă **problema cvasistatică elasto-plastică cu date inițiale și la limită asociată modelului elasto-plastic cu ecrusare izotropă**;
- Se realizează simularea numerică a comportamentului unei plăci trapezoidale fără gaură și cu gaură, supusă la o încărcare periodică aplicată pe latura orizontală și încastrată pe latura verticală. În particulele materiale fixate se reprezintă curbele ciclice tensiune-deformație ce descriu răspunsul materialului deformat elasto-plastic;
- În cazul **procesului de tracțiune** al încărcării ciclice, la placa trapezoidală fără gaură, tensiunile maxime σ_{11}^{max} pozitive apar în colțul din stânga jos a plăcii în imediata vecinătate a zonei de încastrare, iar tensiunile σ_{11}^{max} negative apar în colțul opus (Fig. 1);
- În cazul **procesului de tracțiune** la placa cu gaură, tensiunile σ_{11}^{max} pozitive și negative sunt distribuite atât în vecinătatea zonei de încastrare cât și în vecinătatea găurii (Fig. 4);
- În cazul **procesului de compresiune**, efectele sunt inversate față de cele obținute la tracțiune atât la placa fără gaură cât și la placa cu gaură. De asemenea, la placa cu gaură se observă o concavitate în deformarea plăcii;
- În urma analizei la oboseală, atât a plăcii fără gaură, cât și a plăcii cu gaură (Fig. 2 și 5), pentru un număr de 3 cicluri cu o frecvență de $1/2 \pi$, se observă că tensiunea maximă atinsă la fiecare ciclu, crește față de ciclul anterior. În același timp, deformațiile scad odată cu creșterea numărului de cicluri, deși solicitarea la care este supusă placa are amplitudine constantă. Acesta înseamnă că și energia disipată scade;
- În Fig. 3 și 6, se observă că amplitudinea componentei deformației ε_{33} și cea a deformației plastice ε_{33}^p scade în timp.

Capitolul 3. Algoritmi de tip Simo-Hughes modificați în elasto-plasticitatea de tip Prager cu stare plană de tensiune

Rezultatele prezentate în acest capitol au fost trimise spre publicare în [10] ”Cleja- Țigoiu, S., **Stoicuța N.**, Revisited Simo algorithm for the plane stress state”. Principalul rezultat original obținut este algoritmul modificat de rezolvare a problemei elasto-plastice cu ecrusare mixtă, construit pentru stare de tensiune plană asociată cu stare de deformație plană generalizată. În Paragraful 3.1. este considerată problema elasto-plastică cu ecrusare mixtă de tip Prager cu stare plană de tensiune în cadrul constitutiv clasic specific micilor deformații. În algoritmul propus, se consideră atât componenta normală a deformației ε_{33} cât și componenta deformației plastice ε_{33}^p , care sunt omise în modelul propus de Simo și Hughes [17]. Se determină expresia algoritmică modificată a factorului plastic $\lambda^{(r)}$, și tensorul coeficienților elasto-plastici tangenți \mathcal{E}^{ep} prin aplicarea algoritmului metodei radiale de revenire modificate. O particularizare a acestei probleme, în cazul ecrusării izotrope este realizată în [8] ”**Stoicuța N.**, Cleja-Țigoiu, S., Numerical algorithm for solving the elasto-plastic problem with isotropic hardening and the plane stress state”, în rezumatul tezei de doctorat regăsindu-se în Paragraful 3.2. al acestui capitol. Este descris algoritmul de rezolvare a problemei elasto-plastice cu ecrusare izotropă și stare plană de tensiune. Acesta se obține prin particularizarea modelului descris în Paragraful 3.1., dacă considerăm variabila cinematică de ecrusare α nulă. Exemplele numerice sunt introduse la finalul fiecărui algoritm.

3.1. Problema elasto-plastică cu ecrusare mixtă de tip Prager, cazul stării plane de tensiune

Vom considera corpul \mathcal{B} ca fiind o placă $\Omega \times [0, h_g]$ cu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ și h_g grosimea plăcii, care este considerată a fi foarte mică. Notăm cu $\partial\Omega = \Gamma$ frontiera domeniului Ω cu $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Acesta este descompusă în două părți Γ_u și Γ_σ , cu $\bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_\sigma = \bar{\Gamma}$ și $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$.

Tensorul de tensiune plană și *variabila cinematică de ecrusare* α sunt de forma:

$$\sigma = \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij} e_i \otimes e_j, \quad \sigma \in Sim_{(2)}; \quad \alpha = \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} e_i \otimes e_j, \quad \alpha \in Sim \quad (37)$$

cu $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$, $\sigma' \equiv \sigma_{(2)}$ și $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$ și de urmă nulă $tr\alpha = 0$.

Starea de deformație generalizată este caracterizată de tensorul micilor deformații ε și are componenta ε_{33} nenulă pe direcția perpendiculară la suprafața de plasticitate, aceasta adaugându-se deformației plane $\varepsilon_{(2)}$:

$$\varepsilon = \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{33} e_3 \otimes e_3, \quad \varepsilon_{(2)} = \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij} e_i \otimes e_j, \quad \varepsilon_{(2)} \in Sim_{(2)}. \quad (38)$$

Modelului elasto-plastic cu ecrusare mixtă de tip Prager a fost descris în Capitolul 1 la **Punctul A.** În acest capitol adaptăm acest model la condițiile formulate în spațiul tensiunilor plane. Vom utiliza următoarele notații:

$$\begin{cases} s = \sigma'_{(2)}; & \sigma'_{33} = -tr s; & tr s = s_{11} + s_{22} \\ \hat{\alpha} = \alpha_{(2)}; & \alpha_{33} = -tr \hat{\alpha}; & tr \hat{\alpha} = \hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}_{22} \end{cases} \quad (39)$$

Trecerea de la $\sigma \equiv \sigma_{(2)} \subset Sim_{(2)}$ la $s = \sigma'_{(2)} = P\sigma_{(2)} \in Sim$ se poate face cu ajutorul inversei matricei P , matricea P având următoarea formă:

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s = P\sigma_{(2)} \quad (40)$$

Problema P. Fie date funcțiile $b, f, g : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Să se găsească funcțiile $u, \sigma, \varepsilon, \varepsilon^p, \alpha$ și k definite pe $\Omega \times [0, T)$, care satisfac următorul sistem diferențial:

$$(P_1) \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{(2)}^p = \lambda^{(r)} \frac{\tau}{\sqrt{\|\tau\|^2 + (\text{tr}(\tau))^2}} \\ \dot{\varepsilon}_{33}^p = -\lambda^{(r)} \frac{\text{tr}(\tau)}{\sqrt{\|\tau\|^2 + (\text{tr}(\tau))^2}} \\ \dot{\hat{\alpha}} = \lambda^{(r)} C \frac{\tau}{\sqrt{\|\tau\|^2 + (\text{tr}(\tau))^2}} \\ \dot{\alpha}_{33} = -\lambda^{(r)} C \frac{\text{tr}(\tau)}{\sqrt{\|\tau\|^2 + (\text{tr}(\tau))^2}} \\ \dot{k} = \lambda^{(r)} \\ \lambda^{(r)} = \frac{\langle \beta \rangle}{h} \mathcal{H}(\hat{\mathcal{F}}) \\ \hat{\mathcal{F}}(\tau, k) = \sqrt{\|\tau\|^2 + (\text{tr}(\tau))^2} - \sqrt{\frac{2}{3}}[Hk + \sigma_Y] \\ \tau = s - \hat{\alpha} \end{cases} \quad (41)$$

împreună cu ecuația constitutivă a tensorului de tensiune de forma:

$$\sigma = \mathcal{E}_{(2)}(\varepsilon_{(2)}(u) - \varepsilon_{(2)}^p), \quad (42)$$

și problema cvasistatică cu date inițiale și la limită:

$$(P_2) \begin{cases} \text{div} \sigma + b = 0 & \text{pe } \Omega \times I \\ u(0, x) = u_0(x), \sigma(0, x) = \sigma_0(x), \varepsilon(0, x) = \varepsilon_0(x) \\ \varepsilon^p(0, x) = \varepsilon_0^p(x), \alpha(0, x) = \alpha_0(x), k(0, x) = k_0(x) \\ \sigma n = f & \text{pe } \Gamma_\sigma \times I \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma_u \times I \end{cases} \quad (43)$$

Pentru a rezolva **Problema P** la fiecare moment de timp $t \in [0, T]$, pentru orice $x \in \Omega$, vom utiliza soluția iterativă a problemei cu date inițiale și la limită pentru ecuația de echilibru discretizată. Problema variațională discretă este generată de forma slabă a ecuației de echilibru și este aplicată metoda elementului finit pentru integrarea numerică. Este determinată expresia algoritmică a factorului plastic λ^r și tensorul coeficienților elasto-plastici tangenți \mathcal{E}^{ep} . Vom utiliza metoda radială de revenire propusă de Simo și Hughes [17] prin aplicarea metodei Euler implicită. Cuplarea metodei radiale de revenire cu metoda elementului finit se realizează prin intermediul formulării variaționale discretizate a problemei cu date inițiale și la limită (43). În final, sistemul de ecuații neliniare, în necunoscuta \hat{u}_{n+1} , este rezolvat cu ajutorul metodei Newton-Raphson.

3.1.1. Formularea variațională discretă și aplicarea metodei elementului finit

Pentru rezolvarea Problemei (P_2) , în primul rând vom discretiza intervalul de timp $[0, T]$ în $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ cu $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ și vom formula la momentul t_{n+1} problema pseudo-elastică:

Problema P_{n+1}^e . Să se găsească câmpul deplasării u_{n+1} , ca soluție a formulării variaționale discretizate:

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}_{(2)}([\varepsilon_{(2)}]_{n+1} - [\varepsilon_{(2)}^p]_{n+1}) \cdot \varepsilon(w_{n+1}) dx = L(w_{n+1}) \quad (44)$$

iar funcționala liniară $L(w_{n+1}) : \mathcal{V}_{ad}^0 \rightarrow \mathbb{R}$ este de forma:

$$L(w_{n+1}) = \int_{\Gamma_\sigma} f_{n+1} \cdot w_{n+1} d\Gamma_\sigma + \int_{\Omega} b_{n+1} \cdot w_{n+1} dx, \quad \forall w_{n+1} \in \mathcal{V}_{ad}^{0h} \quad (45)$$

Spațiul finit dimensional al vitezelor admisibile este definit prin:

$$\mathcal{V}_{ad}^{0h} = \left\{ w^h \in L^2(\Omega); \frac{\partial w^h}{\partial x} \in L^2(\Omega); w^h|_{\Gamma_u} = 0 \right\} \quad (46)$$

La fiecare iterație $n + 1$ este rezolvată problema pseudo-elastică P_{n+1}^e , unde w_{n+1} este funcția admisibilă asociată iterației $n + 1$. În urma implementării metodei elementului finit, rezultă un sistem neliniar în necunoscuta \hat{u}_{n+1} .

Teorema 3.1. *Câmpul discretizat al deplasării \hat{u}_{n+1} se găsește ca soluție a sistemului neliniar:*

$$G(\hat{u}_{n+1}) = F^{\text{int}}(\hat{u}_{n+1}) - F_{n+1}^{\text{ext}} = 0 \quad (47)$$

unde $F^{\text{int}}(\hat{u}_{n+1})$ este matricea asamblată a forțelor interne obținută în urma aplicării elementului finit, iar F_{n+1}^{ext} este vectorul asamblat al forțelor externe.

3.1.2. Metoda radială de revenire cuplată cu metoda Newton-Raphson

Pentru rezolvarea Problemei (P_1) vom aplica algoritmul metodei radiale de revenire la fiecare moment de timp t_{n+1} . Legătura dintre tensiune și deformație este exprimată printr-o ecuație implicită, aplicată la momentul de timp t_{n+1} și care depinde de istoria comportamentului ireversibil al materialului.

Ecuația constitutivă (42), la momentul de timp t_{n+1} , scrisă pe fiecare element e din rețea, este de forma:

$$[\sigma]_{n+1}^e = \mathcal{E}_{(2)}([\varepsilon_{(2)}]_{n+1}^e - [\varepsilon^p_{(2)}]_{n+1}^e) \quad (48)$$

unde tensorul $\mathcal{E}_{(2)} : Sim_{(2)} \rightarrow Sim_{(2)}$ caracterizează proprietățile elastice ale materialului și are următoarea reprezentare matriceală în spațiul tensiunilor plane:

$$\mathcal{E}_{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{1+\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{1+\nu} \end{pmatrix} \quad (49)$$

unde E este modulul lui Yang și ν coeficientul lui Poisson.

Vom aplica metoda Euler implicită ecuațiilor din sistemul (41):

$$\left\{ \begin{array}{l} [\varepsilon^p_{(2)}]_{n+1}^e = [\varepsilon^p_{(2)}]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^e \frac{[\tau]_{n+1}^e}{\sqrt{\|[\tau]_{n+1}^e\|^2 + (\text{tr}([\tau]_{n+1}^e))^2}}; \\ [\varepsilon^p_{33}]_{n+1}^e = [\varepsilon^p_{33}]_n^e - [\lambda^*]_{n+1}^e \frac{\text{tr}([\tau]_{n+1}^e)}{\sqrt{\|[\tau]_{n+1}^e\|^2 + (\text{tr}([\tau]_{n+1}^e))^2}}; \\ [\hat{\alpha}]_{n+1}^e = [\hat{\alpha}]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^e C \frac{[\tau]_{n+1}^e}{\sqrt{\|[\tau]_{n+1}^e\|^2 + (\text{tr}([\tau]_{n+1}^e))^2}}; \\ [\alpha_{33}]_{n+1}^e = [\alpha_{33}]_n^e - [\lambda^*]_{n+1}^e C \frac{\text{tr}([\tau]_{n+1}^e)}{\sqrt{\|[\tau]_{n+1}^e\|^2 + (\text{tr}([\tau]_{n+1}^e))^2}} \\ [k]_{n+1}^e = [k]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^e, \end{array} \right. \quad (50)$$

unde factorul plastic $[\lambda^*]_{n+1}^e = [\lambda^{(r)}]_{n+1}^e \Delta t = [\lambda^{(r)}]_{n+1}^e (t_{n+1} - t_n)$, iar funcția de plasticitate scrisă la momentul t_{n+1} este:

$$\hat{\mathcal{F}}([\tau]_{n+1}^e, [k]_{n+1}^e) = \sqrt{\|[\tau]_{n+1}^e\|^2 + (\text{tr}[\tau]_{n+1}^e)^2} - \sqrt{\frac{2}{3}}[H([k]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^e) + \sigma_Y] \quad (51)$$

În relațiile de mai sus, s-a notat cu $[\tau]_{n+1}^e = [s]_{n+1}^e - [\hat{\alpha}]_{n+1}^e$.

Elastic predictor. Definim *starea elastică de încercare* care este caracterizată de starea de înghețare a deformației plastice la momentul anterior de timp t_n , adică:

$$\{[s]_{n+1}^e\}^{tr} = \mathcal{E}_{(2)}([\varepsilon_{(2)}]_{n+1}^e - [\varepsilon_{(2)}^p]_n^e); \quad \text{și} \quad \{[\sigma]_{n+1}^e\}^{tr} = P^{-1} \{[s]_{n+1}^e\}^{tr}; \quad (52)$$

Tensorul deformației plastice și variabile interne de stare sunt înghețate ca valori anterioare:

$$[\varepsilon_{(2)}^p]_{n+1}^e = [\varepsilon_{(2)}^p]_n^e, \quad [\hat{\alpha}]_{n+1}^e = [\hat{\alpha}]_n^e, \quad [k]_{n+1}^e = [k]_n^e; \quad [\varepsilon_{33}^p]_{n+1}^e = [\varepsilon_{33}^p]_n^e, \quad [\alpha_{33}]_{n+1}^e = [\alpha_{33}]_n^e \quad (53)$$

cu $[\varepsilon_{33}^p]_n^e = -tr[\varepsilon_{(2)}^p]_n^e$ și $[\alpha_{33}]_n^e = -tr[\hat{\alpha}]_n^e$.

Plastic corector. Algoritm de revenire pe suprafața de plasticitate. Scopul acestei etape este acela de a restaura consistența, deci starea elastică de încercare să fie pe suprafață. Au loc următoarele relații:

$$\begin{aligned} [s]_{n+1}^e &= \{[s]_{n+1}^e\}^{tr} - [\lambda^*]_{n+1}^e P \mathcal{E}_{(2)} \frac{[\tau]_{n+1}^e}{\sqrt{\|[\tau]_{n+1}^e\|^2 + (\text{tr}([\tau]_{n+1}^e))^2}} \\ [\hat{\alpha}]_{n+1}^e &= [\hat{\alpha}]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^e C \frac{[\tau]_{n+1}^e}{\sqrt{\|[\tau]_{n+1}^e\|^2 + (\text{tr}([\tau]_{n+1}^e))^2}}; \\ [\tau]_{n+1}^e &= [s]_{n+1}^e - [\hat{\alpha}]_{n+1}^e \end{aligned} \quad (54)$$

Expresia algoritmică a factorului plastic $[\lambda^*]_{n+1}^e$ se determină din condiția de consistență discretă și condițiile Kuhn-Tucker discrete:

$$\hat{\mathcal{F}}([\tau]_{n+1}^e, [k]_{n+1}^e) \leq 0, \quad [\lambda^*]_{n+1}^e \geq 0, \quad [\lambda^*]_{n+1}^e \hat{\mathcal{F}}([\tau]_{n+1}^e, [k]_{n+1}^e) = 0 \quad (55)$$

Propoziția 3.1. *Au loc următoarele condiții de încărcare/descărcare:*

1. Dacă $\hat{\mathcal{F}}_{n+1}^{tr} \leq 0$ atunci $[\lambda^*]_{n+1} = 0$ și

$$[\varepsilon_{(2)}^p]_{n+1}^e = [\varepsilon_{(2)}^p]_n^e, \quad [\hat{\alpha}]_{n+1}^e = [\hat{\alpha}]_n^e, \quad [k]_{n+1}^e = [k]_n^e; \quad [\varepsilon_{33}^p]_{n+1}^e = [\varepsilon_{33}^p]_n^e, \quad [\alpha_{33}]_{n+1}^e = [\alpha_{33}]_n^e;$$

2. Dacă $\hat{\mathcal{F}}_{n+1}^{tr} > 0$ atunci $[\lambda^*]_{n+1} \neq 0$ și deci factorul plastic $[\lambda^*]_{n+1}$ este calculat pe suprafața de plasticitate $\hat{\mathcal{F}}(\tau_{n+1}, k_{n+1}) = 0$ prin:

$$[\lambda^*]_{n+1}^e = \frac{\sqrt{\|\{[\tau]_{n+1}^e\}^{tr}\|^2 + (\text{tr}(\{[\tau]_{n+1}^e\}^{tr}))^2} - \sqrt{\frac{2}{3}}[H[k]_n^e + \sigma_Y]}{\sqrt{\frac{2}{3}}H + \frac{E}{3(1-\nu)} + C} \quad (56)$$

unde $\hat{\mathcal{F}}_{n+1}^{tr} = \sqrt{\|\tau_{n+1}^{tr}\|^2 + (\text{tr}(\tau_{n+1}^{tr}))^2} - \sqrt{\frac{2}{3}}[H[k]_n^e + \sigma_Y]$ este funcția test.

Algoritmul metodei radiale de revenire este complet determinat dacă este determinat tensorul coeficienților elasto-plastici tangenți \mathcal{E}^{ep} . Expresia acestuia intervine în algoritmul de aplicare a metodei Newton-Raphson.

Sistemul de ecuații neliniare (47) în necunoscuta \hat{u}_{n+1} este rezolvat cu metoda Newton-Raphson:

$$\hat{u}_{n+1}^{j+1} = \hat{u}_{n+1}^j - \beta_j \left[K \left(\hat{u}_{n+1}^j \right) \right]^{-1} G \left(\hat{u}_{n+1}^j \right) \quad (57)$$

unde $\beta_j \in (0, 1]$, iar K este Jacobianul funcției G și este de forma dată în (31).

Propoziția 3.2. În cazul stării de tensiune plană asociată cu starea deformației plane, tensorul coeficienților elasto-plastici tangenți poate fi exprimat prin următoarea formă modificată:

$$[\mathcal{E}^{ep}]_{n+1}^e = \begin{cases} \mathcal{E}_{(2)} & , \hat{\mathcal{F}}^{tr} \leq 0 \\ \mathcal{E}_{(2)}[\Theta_1]_{n+1}^e - [\Theta_2]_{n+1}^e \{ [n]_{n+1}^e \}^{tr} \otimes (\mathcal{E}_{(2)} P \{ [n]_{n+1}^e \}^{tr} + \{ [n^\perp]_{n+1}^e \}^{tr} \mathcal{E}_{(2)} P I_{(2)}), & \hat{\mathcal{F}}^{tr} > 0 \end{cases} \quad (58)$$

$$[\Theta_1]_{n+1}^e = I_4 - \frac{[\lambda^*]_{n+1}^e}{\sqrt{\| \{ [\tau]_{n+1}^e \}^{tr} \|^2 + (tr \{ [\tau]_{n+1}^e \}^{tr})^2}} P \mathcal{E}_{(2)} \quad (59)$$

$$[\Theta_2]_{n+1}^e = \mathcal{E}_{(2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}H + \frac{E}{3(1-\nu)} + C}} - \frac{[\lambda^*]_{n+1}^e}{\sqrt{\| \{ [\tau]_{n+1}^e \}^{tr} \|^2 + (tr \{ [\tau]_{n+1}^e \}^{tr})^2}} \right). \quad (60)$$

Ținând cont de cele de mai sus, putem prezenta în continuare, algoritmul metodei radiale de revenire:

$$\{ [\sigma]_{n+1}^{e,j+1}, [\alpha]_{n+1}^{e,j+1}, [\varepsilon^p]_{n+1}^{e,j+1}, [k]_{n+1}^{e,j+1} \} = \text{RadialReturn} \left\{ \hat{u}_{n+1}^{e,j}, [\alpha]_n^e, [\varepsilon^p]_n^e, [k]_n^e \right\} \quad (61)$$

1. calculăm tensiunea elastică de încercare :

$$\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} = \mathcal{E}_{(2)} \left(\{ [\varepsilon_{(2)}]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} - [\varepsilon_{(2)}^p]_n^e \right); \{ [\sigma]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} = P^{-1} \left(\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} \right) \quad (62)$$

unde P și $\mathcal{E}_{(2)}$ sunt date de relațiile (40) și (49) .

2. verificăm semnul funcției de plasticitate

$$\{ \hat{\mathcal{F}}_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} = \sqrt{\| \{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} \|^2 + (\text{tr}(\{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr}))^2} - \sqrt{\frac{2}{3}}[H [k]_n^e + \sigma_Y]:$$

ET1. Dacă $\{ \hat{\mathcal{F}}_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} \leq 0$, atunci

• pas elastic:

$$[\sigma]_{n+1}^{e,j+1} = \{ [\sigma]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr}; [\tau]_{n+1}^{e,j+1} = \{ [\tau]_{n+1}^e \}^{tr}; [\hat{\alpha}]_{n+1}^{e,j+1} = [\hat{\alpha}]_n^e; [\varepsilon_{(2)}^p]_{n+1}^{e,j+1} = [\varepsilon_{(2)}^p]_n^e$$

$$[\alpha_{33}]_{n+1}^{e,j+1} = [\alpha_{33}]_n^e; [\varepsilon_{33}^p]_{n+1}^{e,j+1} = [\varepsilon_{33}^p]_n^e; [k]_{n+1}^{e,j+1} = [k]_n^e; [\mathcal{E}^{ep}]_{n+1}^{e,j+1} = \mathcal{E}_{(2)}$$

Altfel

• pas plastic: se trece la pasul 3.

Sfârșit

3. metoda radială de revenire

$$\{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} = \{ [\sigma]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} - [\hat{\alpha}]_n^e; \{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} = \frac{\{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr}}{\sqrt{\| \{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} \|^2 + (\text{tr}(\{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr}))^2}}$$

$$\{ [n^\perp]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} = \frac{\text{tr}(\{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr})}{\sqrt{\| \{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} \|^2 + (\text{tr}(\{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr}))^2}}$$

$$[\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} = \frac{\sqrt{\| \{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} \|^2 + (\text{tr}(\{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr}))^2} - \sqrt{\frac{2}{3}}[H[k]_n^e + \sigma_Y]}{\sqrt{\frac{2}{3}H + \frac{E}{3(1-\nu)} + C}}$$

$$\begin{aligned}
[\sigma]_{n+1}^{e,j+1} &= \left\{ [\sigma]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} - [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} P \mathcal{E}_{(2)} \left\{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \\
[\hat{\alpha}]_{n+1}^{e,j+1} &= [\hat{\alpha}]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} C \left\{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} ; [\alpha_{33}]_{n+1}^{e,j+1} = [\alpha_{33}]_n^e - [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} C \left\{ [n^\perp]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} ; \\
\left[\varepsilon_{(2)}^p \right]_{n+1}^{e,j+1} &= \left[\varepsilon_{(2)}^p \right]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} \left\{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} ; \left[\varepsilon_{33}^p \right]_{n+1}^{e,j+1} = \left[\varepsilon_{33}^p \right]_n^e - [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} \left\{ [n^\perp]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \\
[k]_{n+1}^{e,j+1} &= [k]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} ; [s]_{n+1}^{e,j+1} = P[\sigma]_{n+1}^{e,j+1} \\
[\Theta_1]_{n+1}^e &= I_4 - \frac{[\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1}}{\sqrt{\left\| \left\{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \right\|^2 + (\text{tr} [\tau]_{n+1}^{e,j+1})^2}} P \mathcal{E}_{(2)} \\
[\Theta_2]_{n+1}^e &= \mathcal{E}_{(2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}H + \frac{E}{3(1-\nu)} + C}} - \frac{[\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1}}{\sqrt{\left\| \left\{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \right\|^2 + (\text{tr} (\left\{ [\tau]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}))^2}} \right) \\
[\mathcal{E}^{ep}]_{n+1}^e &= \mathcal{E}_{(2)} [\Theta_1]_{n+1}^e - [\Theta_2]_{n+1}^e \left\{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \otimes (\mathcal{E}_{(2)} P \left\{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} + \left\{ [n^\perp]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \mathcal{E}_{(2)} P I_{(2)})
\end{aligned}$$

Revenire

3.1.3. Algoritm general de rezolvare al Problemei P

1. inițializăm vectorii $n = 0$; $[\hat{u}]_0 = 0$; $[\varepsilon^p]_0 = 0$; $[\alpha]_0 = 0$; $[k]_0 = 0$;
2. se execută o buclă iterativă cu referire la variabila de indexare n , $n = \overline{0, N}$ cu N fixat, în vederea incrementării timpului cu pasul Δt , $t_0 = 0$;
 - 2.1. se execută o buclă iterativă cu referire la variabila de indexare j , $j = \overline{0, 1, \dots}$, în vederea implementării metodei Newton-Raphson;
 - 2.2. se execută o buclă iterativă cu referire la numărul de elemente din rețea
 - vectorii locali \hat{u}_{n+1}^j , $[\varepsilon^p]_n^e$, $[\alpha]_n^e$ și $[k]_n^e$ sunt extrași din vectorii globali \hat{u}_{n+1}^j , $[\varepsilon^p]_n$, $[\alpha_n]$, $[k]_n$;
 - este aplicată procedura **Algoritm radial de revenire**;
 - este calculată matricea locală Jacobi, precum și vectorii locali ai forțelor interne și externe, după care se trece la asamblarea acestora pe fiecare element;
 - deplasările \hat{u}_{n+1}^{j+1} sunt determinate cu metoda Newton-Raphson

$$\hat{u}_{n+1}^{j+1} = \hat{u}_{n+1}^j - \beta_j [\Delta \hat{u}]_{n+1}^j ; \quad [\Delta \hat{u}]_{n+1}^j = \left[K \left(\hat{u}_{n+1}^j \right) \right]^{-1} G \left(\hat{u}_{n+1}^j \right) ;$$

- eroarea metodei: $[ERR]_{n+1}^j = [\Delta \hat{u}]_{n+1}^j / \left\| \hat{u}_{n+1}^j \right\|$

Dacă $[ERR]_{n+1}^j < \text{TOL}$

$$\hat{u}_{n+2} \leftarrow \hat{u}_{n+1}^{j+1} ; [\varepsilon^p]_{n+1} = [\varepsilon^p]_{n+1}^{j+1} ; [k]_{n+1} = [k]_{n+1}^{j+1} ; [\sigma]_{n+1} = [\sigma]_{n+1}^{j+1} ; [\alpha]_{n+1} = [\alpha]_{n+1}^{j+1} ;$$

Revenire

Altfel $j \leftarrow j + 1$ salt la 2.2.

Exemplul 3.1. Pentru acest exemplu, considerăm aceeași placă fără gaură și cu gaură descrisă în capitolul anterior. Forța aplicată este $f = 50\sin(t)$. Materialul ales pentru realizarea simulării este oțel DP 600, parametrii materialului în acest caz au valorile [2]:

$$\{ E = 182.000 [MPa]; \sigma_Y = 349,4 [MPa]; \nu = 0,3; C = 17.400 [MPa]; H = 1194 [MPa] \}$$

În continuare sunt reprezentate atât distribuțiile componentelor tensiunilor plane și Mises pentru placa cu gaură, cât și graficele tensiunii σ_{11} în raport cu deformația ϵ_{11} și graficele componente de deformație totale ϵ_{33} și ale componente de deformație plastice ϵ_{33}^p în nodurile alese în zona de încastrare.

Pentru a arăta eficiența algoritmului descris mai sus, de rezolvare a problemei cvasistatice cu date inițiale și la limită asociată modelului elasto-plastic cu ecrusare mixtă de tip Prager și stare de tensiune plană, în cazul plăcii cu gaură, vom considera alte două puncte materiale alese în jurul găurii, reprezentate prin nodurile 207 și 1225, la fel ca în Cleja-Țigoiu și Stoicuța [9].

În articol este pusă în evidență eficiența algoritmului Simo-Hughes modificat față de algoritmul propus de Simo și Hughes [17]. Sunt realizate teste ciclice obținute prin solicitări la întindere și compresiune pentru placa fără gaură și cu gaură. Graficele ce descriu curbele tensiune - deformație realizate pentru patru puncte materiale, doua alese în colțuri opuse aproape de zona de încastrare și două situate în partea de sus și jos a găurii plăcii trapezoidale, sunt reprezentate pentru ambele metode supuse analizei.

În [9], în nodurile din jurul găurii, în urma comparării reprezentărilor grafice s-a observat că valorile tensiunilor și ale deformațiilor sunt mai mari în cazul soluției cu stare de tensiune plană decât cele obținute prin soluția Simo-Hughes. O altă concluzie desprinsă este aceea că efectele componente de deformație ϵ_{33} sunt mult mai bine puse în evidență în nodurile din jurul găurii decât în cele din zona de încastrare. Tot în aceste noduri (din jurul găurii), se vad foarte bine diferențele soluțiile celor doi algoritmi.

În rezumatul tezei, în cele două noduri alese de o parte și de cealaltă a găurii, vom reprezenta graficele tensiunii σ_{11} în raport cu deformația ϵ_{11} , respectiv a tensiunii σ_{22} în raport cu deformația ϵ_{22} .

Pentru a se observa mult mai bine ciclurile obținute în reprezentările curbelor de tensiune-deformație, vom considera că intervalul de timp ales este $t \in [0, 40]$.

Vom face astfel comparații între soluțiile numerice obținute cu algoritmul propus de Simo-Hughes de rezolvare a problemei elasto-plastice cu ecrusare mixtă de tip Prager (roșu), respectiv cu algoritmul propus în primul paragraf al acestui capitol, numit algoritm de tip Simo-Hughes modificat (albastru) (Fig. 13 și 14).

Pentru placa fără gaură, în nodurile alese în jurul găurii, soluție găsită este una elastică. În placa cu gaură, valorile mai mari pentru tensiuni, respectiv deformații sunt în general date de soluția numerică Simo-Hughes modificată față de soluția Simo-Hughes pentru punctele materiale alese aproape de gaură, a se vedea Fig. 13 și 14.

Diferențele relative ale componente de tensiunii σ_{11} , și anume $\frac{(\sigma(S)_{11} - \sigma_{11})}{\sigma_Y}$, și diferențele dintre componentele de deformație ϵ_{11} , adică $(\epsilon(S)_{11} - \epsilon_{11})$, în funcție de timp sunt reprezentate pentru nodurile din jurul găurii, în Fig 15.

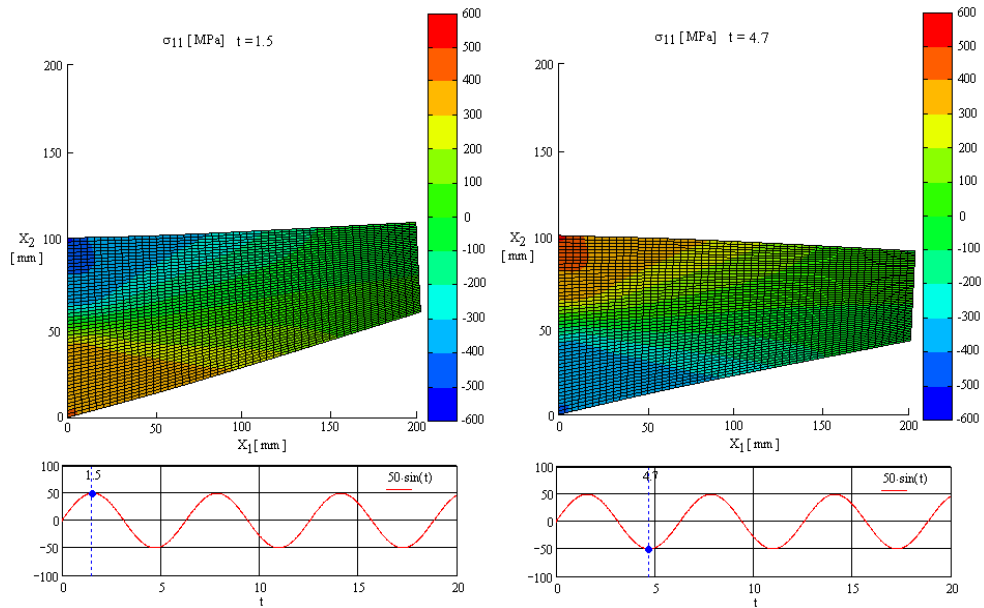


Figura 7: Distribuția tensiunii σ_{11} pentru placa fără gaură la $t = 1.5$ și $t = 4.7$, care corespunde maximului și minimului forței aplicate f - ecrusare mixtă de tip Prager și stare de tensiune plană

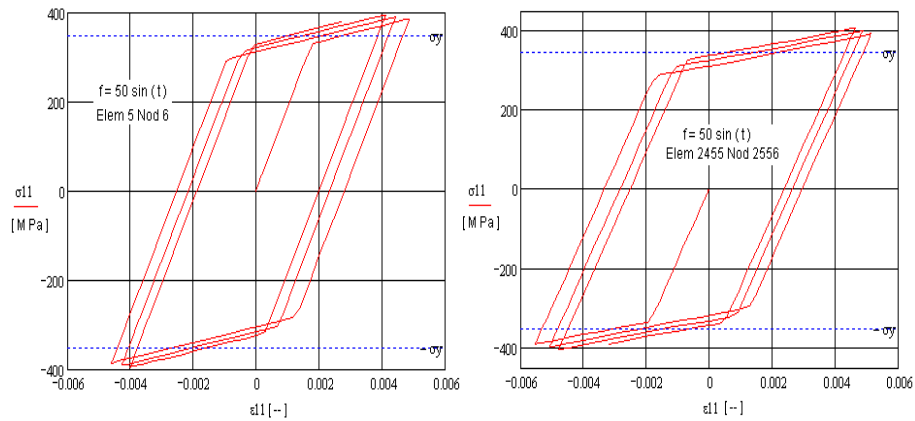


Figura 8: Graficele tensiunilor σ_{11} în raport cu deformațiile ϵ_{11} reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa fără gaură - ecrusare mixtă de tip Prager și stare de tensiune plană

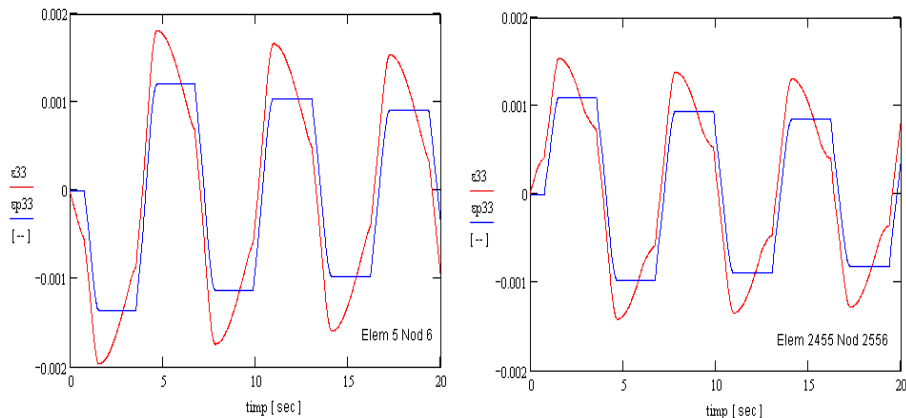


Figura 9: Graficele deformațiilor ϵ_{33} și ale deformațiilor plastice ϵ_{33}^p în raport cu timpul, reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa fără gaură - ecrusare mixtă de tip Prager și stare de tensiune plană

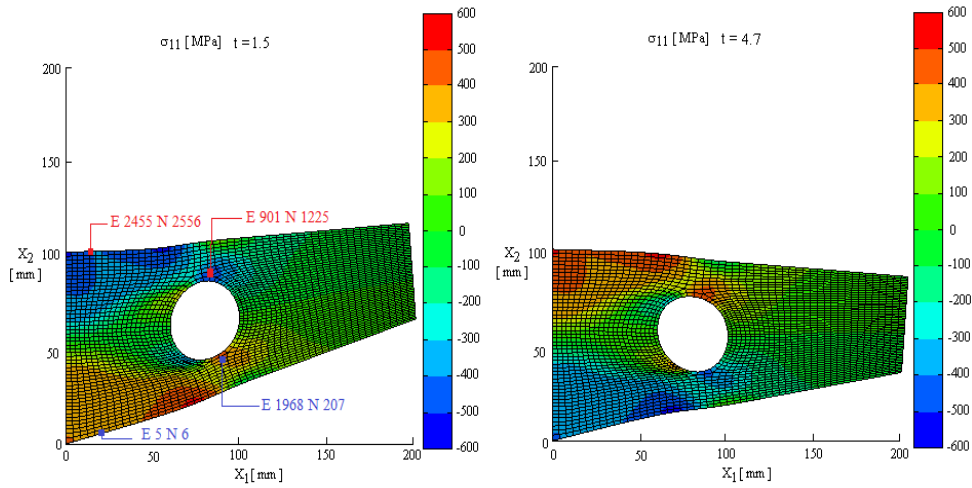


Figura 10: Distribuția tensiunii σ_{11} pentru placa cu gaură la $t = 1.5$ și $t = 4.7$, care corespunde maximului și minimumului forței aplicate f - ecrusare mixtă de tip Prager și stare de tensiune plană

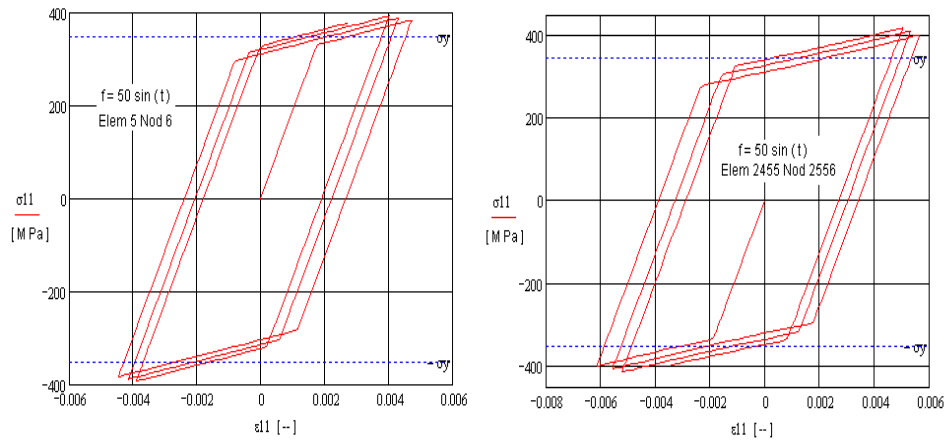


Figura 11: Graficele tensiunilor σ_{11} în raport cu deformațiile ϵ_{11} reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa cu gaură - ecrusare mixtă de tip Prager și stare de tensiune plană

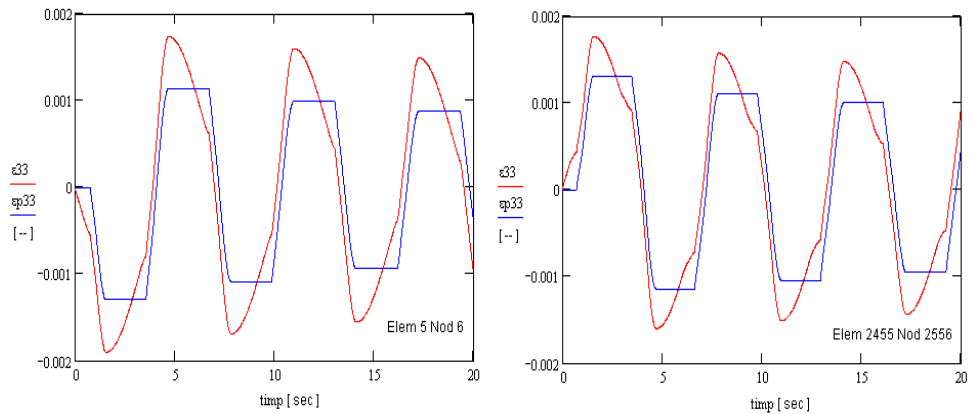


Figura 12: Graficele deformațiilor ϵ_{33} și ale deformațiilor plastice ϵ_{33}^p în raport cu timpul, reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa cu gaură - ecrusare mixtă de tip Prager și stare de tensiune plană

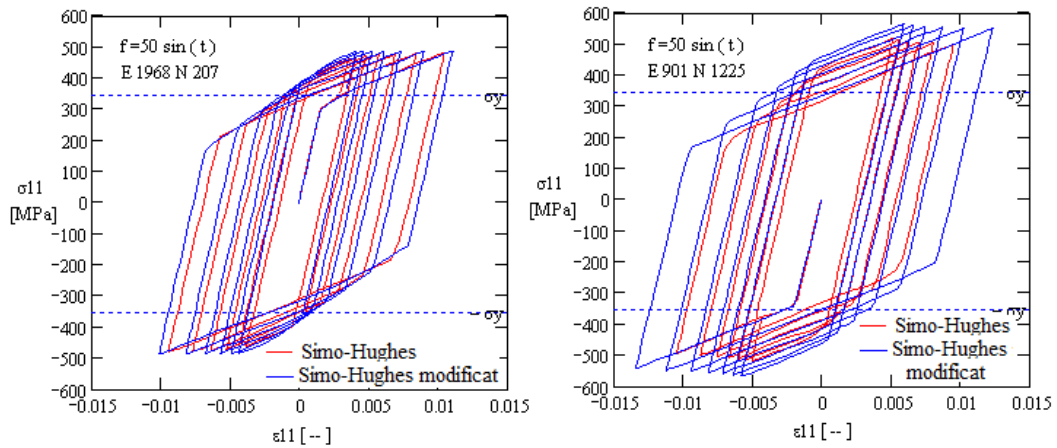


Figura 13: Componenta tensiunii σ_{11} în raport cu componenta deformației ϵ_{11} , în nodurile 207 și 1225 pentru placa cu gaură, reprezentate pentru soluția Simo-Hughes și soluția Simo-Hughes modificată

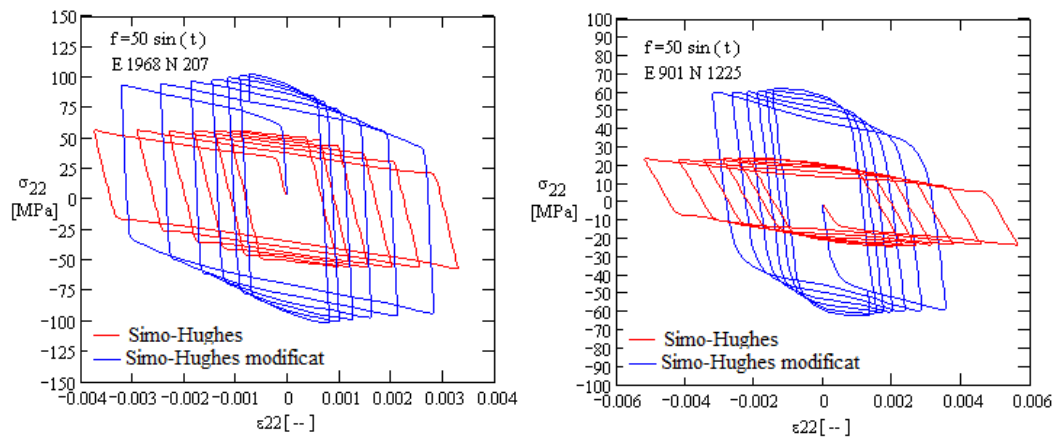


Figura 14: Componenta tensiunii σ_{22} în raport cu componenta deformației ϵ_{22} în nodurile 207 și 1225 pentru placa cu gaură, reprezentate pentru soluția Simo-Hughes și soluția Simo-Hughes modificată

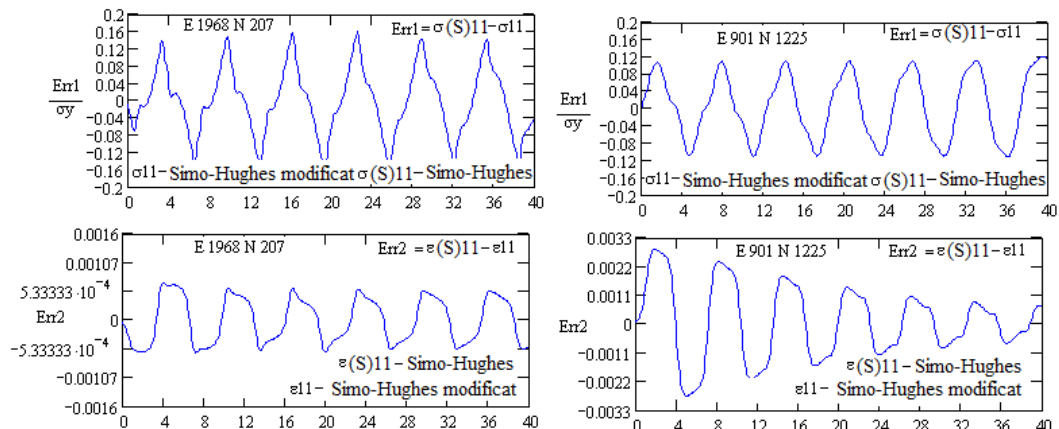


Figura 15: Diferențele relative ale componentei tensiunii σ_{11} și diferențele componentei deformației ϵ_{11} în nodurile 207 și 1225 pentru placa cu gaură, reprezentate pentru soluția Simo-Hughes și soluția Simo-Hughes modificată

3.1.4. Concluzii

- În acest capitol este descrisă **problema quasistatică elasto-plastică cu date inițiale și la limită asociată modelului elasto-plastic cu ecruisare mixtă de tip Prager și stare plană de tensiune** ;
- Sunt determinate expresiile modificate ale factorului plastic $\lambda^{(r)}$ și a tensorului coeficienților elasto-plastici tangenți \mathcal{E}^{ep} ;
- Acest algoritm poate fi aplicat în cazul materialelor cu grosime foarte mică. În aceste condiții, acest algoritm este unul mult mai simplu și mult mai rapid de aplicat, decât cel realizat în cazul tridimensional;
- Sunt realizate teste ciclice obținute prin solicitări la tracțiune și compresiune pentru placa trapezoidală fără gaură și cu gaură;
- În cazul **procesului de tracțiune** la placa trapezoidală fără gaură, distribuțiile tensiunilor σ_{11}^{max} , se observă că apar în vecinătatea zonei de încastrare (Fig. 7). Efectele sunt inversate în cazul **procesului de compresiune**;
- În cazul **procesului de tracțiune** la placa cu gaură, distribuțiile tensiunii σ_{11}^{max} se regăsesc atât în zona de încastrare cât și în zona din jurul găurii (Fig. 10).
- Față de Fig. 2 și Fig. 5 din modelul elasto-plastic cu ecruisare izotropă descris în Capitolul 2, în Fig. 8 și 11 se observă foarte bine fenomenul de ecruisare. Datorită prezenței modulului cinematic de ecruisare C , panta curbei tensiune-deformație crește în zona deformațiilor plastice. De asemenea, se observă că, în timp ce lățimea buclei de histerezis scade, tensiunile σ_{11} cresc odată cu creșterea numărului de cicluri. Aceasta înseamnă că energia disipată scade, în condițiile în care forța aplicată are o amplitudine constantă;
- În Fig. 13, se observă că pentru soluția numerică Simo-Hughes modificată, valorile tensiunii σ_{11} și ale deformației ε_{11} sunt mai mari decât cele obținute prin soluția Simo-Hughes pentru punctele materiale alese aproape de gaură. De asemenea, în nodurile din jurul găurii, influența componentei deformației ε_{33} și a componentei deformației plastice ε_{33}^p se observă mult mai bine față de nodurile din zona de încastrare;
- În Fig. 15, diferențele relative ale componentei tensiunii σ_{11} au un comportament periodic cu oscilații ce se mențin constante în jurul originii, amplitudinea absolută a acestora fiind de 0,12 atât în nodul de jos cât și în nodul de sus.
- În ceea ce privește diferența relativă a componentei deformației ε_{11} , în nodul de jos din zona găurii, aceasta are un comportament asemănător cu diferențele relative ale componentei tensiunii σ_{11} , amplitudinea absolută fiind de aproximativ $5,4 \cdot 10^{-4}$.
- În nodul de sus, diferența relativă a deformației ε_{11} are un comportament periodic cu oscilații în jurul originii, ce se amortizează în timp. Gradul de amortizare (diferența între amplitudinile a două oscilații succesive raportată la valoarea amplitudinii maxime) este de 0,2. Acest lucru ne arată că viteza de amortizare a oscilațiilor este una lentă, ceea ce indică că diferențele deformației în nodul de sus, încep să fie nesemnificative după un anumit $t > 40$.
- Față de algoritmul propus de Simo-Hughes, algoritmul Simo-Hughes modificat surprinde anumite fenomene cantitative care în anumite situații practice pot avea o însemnătate foarte mare.

3.2. Problema elasto-plastică cu ecruisare izotropă, cazul stării plane de tensiune

În acest paragraf est descrisă problema cvasistatică elasto-plastică cu date la limită asociată modelului elasto-plastic cu ecruisare izotropă, cazul stării plane de tensiune. De fapt, această problemă este obținută prin particularizarea problemei cu ecruisare mixtă descrisă mai sus, dacă variabila cinematică de ecruisare α este considerată nulă.

Problema P. Fie date funcțiile $b, f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. Să se găsească funcțiile $u, \sigma, \varepsilon, \varepsilon^p$ și k definite pe $\Omega \times [0, T)$ și care satisfac sistemul de ecuații diferențiale:

$$(P_1) : \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{(2)}^p = \lambda^{(r)} \frac{s}{\sqrt{\|s\|^2 + (\text{tr } s)^2}} \\ \dot{\varepsilon}_{33}^p = -\lambda^{(r)} \frac{\text{tr } s}{\sqrt{\|s\|^2 + (\text{tr } s)^2}} \\ \dot{k} = \lambda^{(r)} \\ \lambda^{(r)} = \frac{\langle \beta \rangle}{h} \mathcal{H}(\tilde{\mathcal{F}}) \\ \tilde{\mathcal{F}}(s, k) = \sqrt{\|s\|^2 + (\text{tr } s)^2} - \sqrt{\frac{2}{3}} [Hk + \sigma_Y] \\ s = P\sigma, \end{cases} \quad (63)$$

împreună cu ecuația constitutivă a tensorului tensiunii:

$$\sigma = \mathcal{E}_{(2)}(\varepsilon_{(2)} - \varepsilon_{(2)}^p), \quad (64)$$

și problema cvasistatică cu date inițiale și la limită:

$$(P_2) \begin{cases} \text{div } \sigma + b = 0 & \text{pe } \Omega \times I \\ u(0, x) = u_0(x), \sigma(0, x) = \sigma_0(x), \\ \varepsilon^p(0, x) = \varepsilon_0^p(x), k(0, x) = k_0(x) \\ \sigma n = f & \text{pe } \Gamma_\sigma \times I \\ u = g & \text{pe } \Gamma_u \times I \end{cases} \quad (65)$$

Pentru rezolvarea Problemei P se parcurg aceleași etape cu cele din paragraful anterior. Formularea variațională discretă este definită în următoarea problemă.

Problema P_{n+1}^e . Să se găsească câmpul deplasării u_{n+1} , ca soluție a formulării variaționale discrete:

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}_{(2)}([\varepsilon_{(2)}]_{n+1} - [\varepsilon_{(2)}^p]_{n+1}) \cdot \varepsilon(w_{n+1}) dx = L(w_{n+1}) \quad (66)$$

iar funcționala liniară $L(w_{n+1}) : \mathcal{V}_{ad}^0 \rightarrow \mathbb{R}$ este de forma:

$$L(w_{n+1}) = \int_{\Gamma_\sigma} f_{n+1} \cdot w_{n+1} d\Gamma_\sigma + \int_{\Omega} b_{n+1} \cdot w_{n+1} dx, \quad \forall w_{n+1} \in \mathcal{V}_{ad}^{0h} \quad (67)$$

Teorema 3.2. *Câmpul discretizat al deplasării \hat{u}_{n+1} , se găsește ca soluție a sistemului neliniar:*

$$\hat{G}(\hat{u}_{n+1}) = F^{\text{int}}(\hat{u}_{n+1}) - F_{n+1}^{\text{ext}} = 0 \quad (68)$$

Sistemul de ecuații neliniare (68) în necunoscuta \hat{u}_{n+1} este rezolvat cu metoda Newton-Raphson. Algoritmul acestei metode este cel dat în relația (57).

La fel ca în cazul ecruisării mixte și în acest caz este aplicată metoda radială de revenire pentru rezolvarea Problemei P_2 . Se determină expresia algoritmică a factorului plastic și tensorul coeficienților

elasto-plastici tangenți. Acesta intervine în aplicarea algoritmului metodei Newton-Raphson. În final se realizează cuplarea dintre metoda elementului finit și metoda radială de revenire.

Fără a intra în amănunte cu privire la etapele parcurse în cadrul metodei radiale de revenire, acestea fiind aceleași cu cele descrise în paragraful anterior, vom prezenta în continuare doar algoritmul acestei metode:

$$\left\{ [\sigma]_{n+1}^{e,j+1}, [\varepsilon^p]_{n+1}^{e,j+1}, [k]_{n+1}^{e,j+1} \right\} = \text{RadialReturn} \left\{ \hat{u}_{n+1}^{e,j}, [\varepsilon^p]_n^e, [k]_n^e \right\} \quad (69)$$

1. calculăm tensiunea elastică de încercare pentru $[\varepsilon_{(2)}]_{n+1}^{e,j+1} = [B]^e \hat{u}_{n+1}^{e,j}$:

$$\left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} = \mathcal{E}_{(2)} \left([\varepsilon_{(2)}]_{n+1}^{e,j+1} - [\varepsilon_{(2)}]_n^e \right); \left\{ [\sigma]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} = P^{-1} \left(\left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \right)$$

2. verificăm semnul funcției de plasticitate

$$\left\{ \tilde{\mathcal{F}}_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} = \sqrt{\left\| \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \right\|^2 + (\text{tr} \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr})^2} - \sqrt{\frac{2}{3}} [H [k]_n^e + \sigma_Y] :$$

ET1. Dacă $\left\{ \tilde{\mathcal{F}}_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \leq 0$, atunci

- pas elastic

$$[\sigma]_{n+1}^{e,j+1} = \left\{ [\sigma]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}; [\varepsilon_{(2)}]_{n+1}^{e,j+1} = [\varepsilon_{(2)}]_n^e; [\varepsilon_{33}^p]_{n+1}^{e,j+1} = [\varepsilon_{33}^p]_n^e; [k]_{n+1}^{e,j+1} = [k]_n^e$$

Altfel

- pas plastic: se trece la pasul 3

Sfârșit ET1.

3. metoda radială de revenire:

$$\left\{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} = \frac{\left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}}{\sqrt{\left\| \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \right\|^2 + (\text{tr} \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr})^2}}$$

$$\left\{ [n^\perp]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} = \frac{\text{tr} \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}}{\sqrt{\left\| \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \right\|^2 + (\text{tr} \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr})^2}}$$

$$[\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} = \frac{\sqrt{\left\| \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \right\|^2 + (\text{tr} \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr})^2} - (H [k]_n^e + \sigma_Y)}{H + \frac{E}{3(1-\nu)}}$$

$$[s]_{n+1}^{e,j+1} = \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} - [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} P \mathcal{E}_{(2)} \left\{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}, \quad [\sigma]_{n+1}^{e,j+1} = P^{-1} \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}$$

$$[\varepsilon_{(2)}^p]_{n+1}^{e,j+1} = [\varepsilon_{(2)}^p]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} \left\{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}$$

$$[\varepsilon_{33}^p]_{n+1}^{e,j+1} = [\varepsilon_{33}^p]_n^e - [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1} \left\{ [n^\perp]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr}; \quad [k]_{n+1}^{e,j+1} = [k]_n^e + [\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1}$$

$$[\Theta_1]_{n+1}^e = I_4 - \frac{[\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1}}{\sqrt{\left\| \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr} \right\|^2 + (\text{tr} \left\{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \right\}^{tr})^2}} P \mathcal{E}_{(2)}$$

$$[\Theta_2]_{n+1}^e = \mathcal{E}_{(2)} \left(\frac{1}{H + \frac{E}{3(1-\nu)}} - \frac{[\lambda^*]_{n+1}^{e,j+1}}{\sqrt{\| \{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} \|^2 + (\text{tr} \{ [s]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr})^2}} \right)$$

$$[\mathcal{E}^{ep}]_{n+1} = \mathcal{E}_{(2)} [\Theta_1]_{n+1}^e - [\Theta_2]_{n+1}^e \{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} \otimes (\mathcal{E}_{(2)} P \{ [n]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} + \{ [n^\perp]_{n+1}^{e,j+1} \}^{tr} \mathcal{E}_{(2)} P I_{(2)})$$

Revenire

Algoritmul general de rezolvare al Problemei P este același cu cel descris în paragraful anterior cu specificația că variabila cinematică de ecruisare este nulă în acest caz.

Exemplul 3.2. În continuare vom introduce reprezentările grafice obținute pentru cele două plăci trapezoidale cu și fără gaură. Parametrii de material în acest caz sunt aceiași cu cei dați în Capitolul 2.

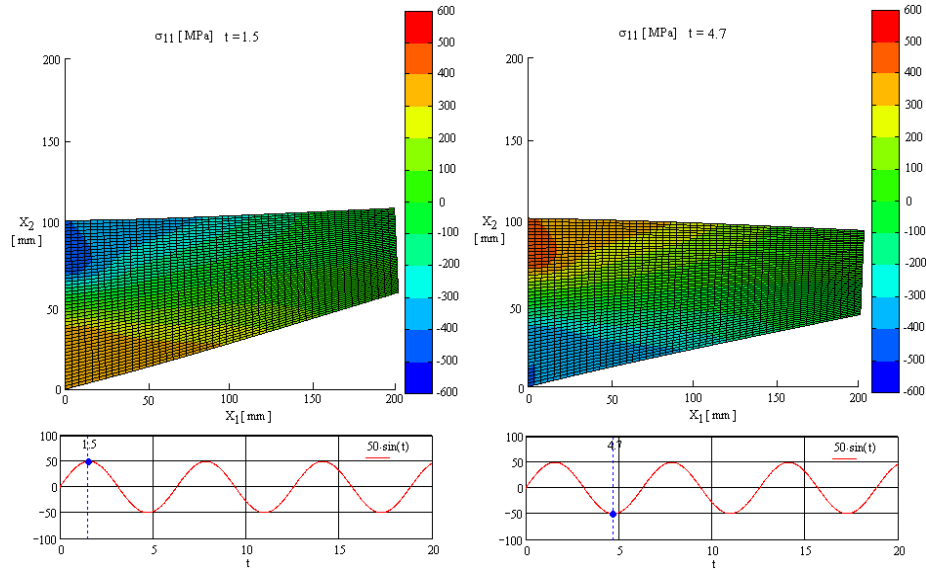


Figura 16: Distribuția tensiunii σ_{11} pentru placa fără gaură la $t = 1.5$ și $t = 4.7$, care corespunde maximului și minimului forței aplicate f - ecruisare izotropă cu stare de tensiune plană

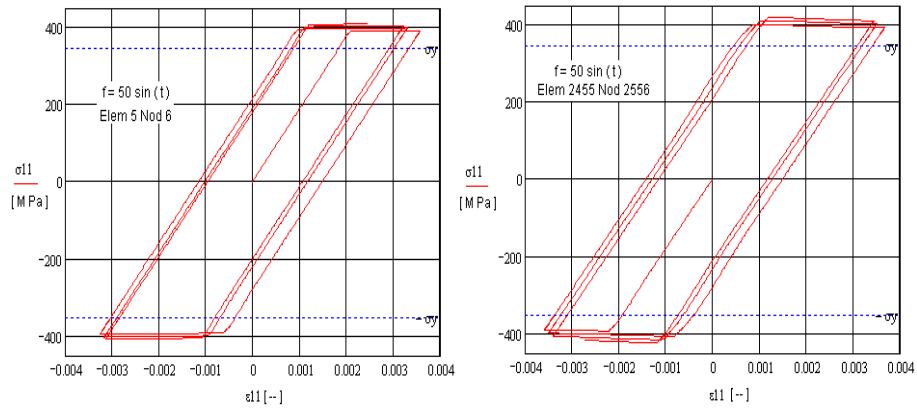


Figura 17: Graficele tensiunilor σ_{11} în raport cu deformațiile ϵ_{11} reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa fără gaură- ecruisare izotropă cu stare de tensiune plană

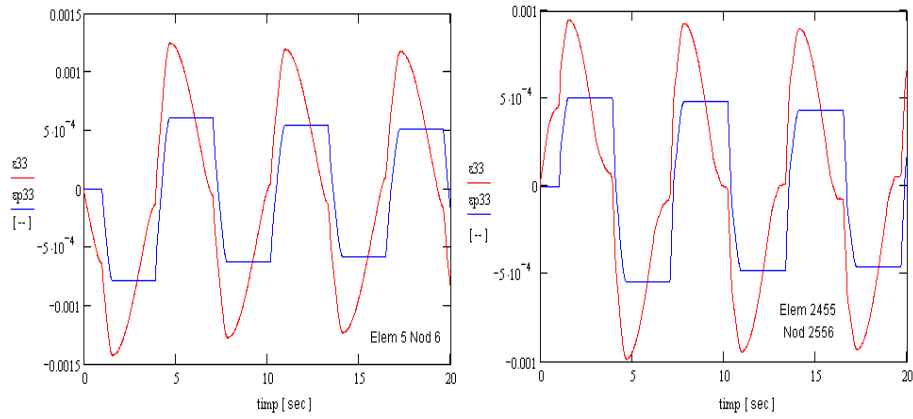


Figura 18: Graficele deformațiilor ε_{33} și ale deformațiilor plastice ε_{33}^p în raport cu timpul, reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa fără gaură- ecruisare izotropă cu stare de tensiune plană

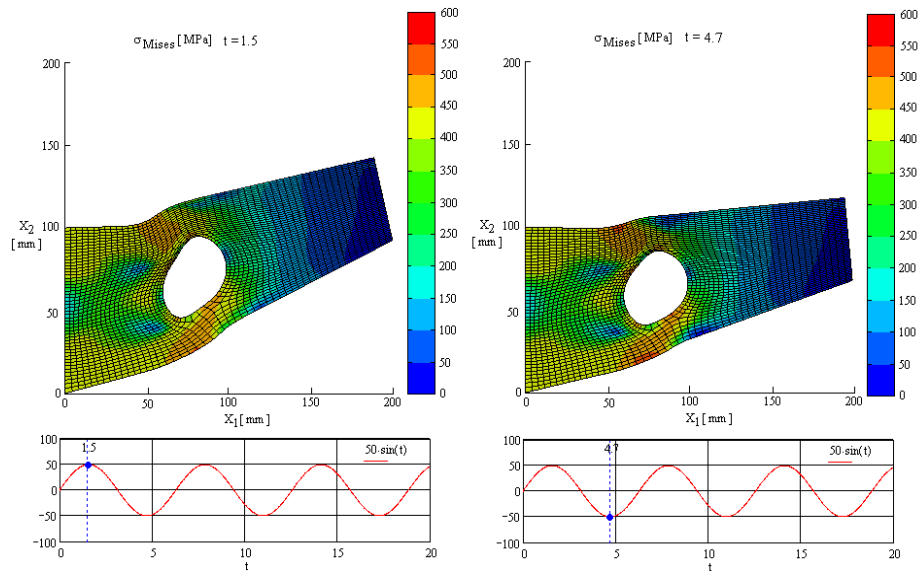


Figura 19: Distribuția tensiunii σ_{11} pentru placa cu gaură la $t = 1.5$ și $t = 4.7$, care corespunde maximului și minimului forței aplicate f - ecruisare izotropă cu stare de tensiune plană

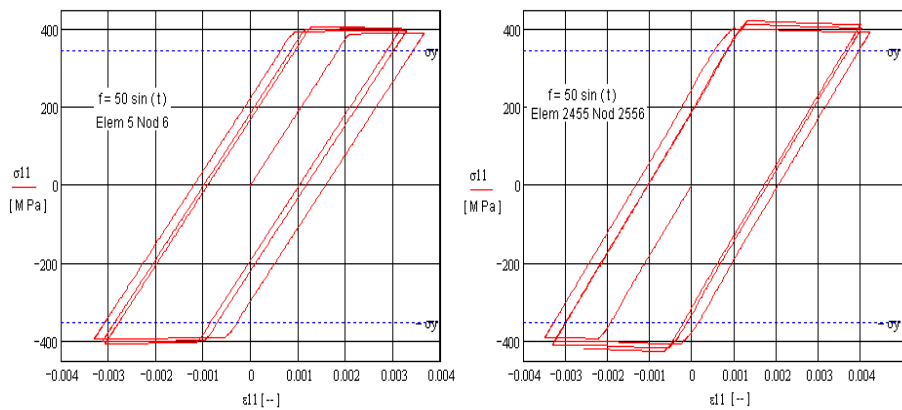


Figura 20: Graficele tensiunilor σ_{11} în raport cu deformațiile ε_{11} reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa cu gaură- ecruisare izotropă cu stare de tensiune plană

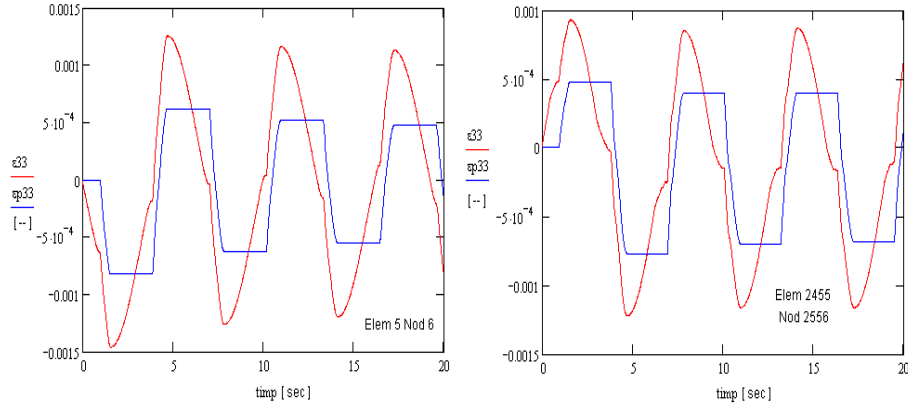


Figura 21: Graficele deformațiilor ε_{33} și ale deformațiilor plastice ε_{33}^p în raport cu timpul, reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa cu gaură- ecrusare izotropă cu stare de tensiune plană

3.2.2. Concluzii

- Este descrisă **problema cvasistatică elasto-plastică cu date inițiale și la limită asociată modelului elasto-plastic cu ecrusare izotropă cu stare plană de tensiune**;
- Algoritmul de rezolvare a acestei probleme este unul general și poate fi redus la algoritmul de rezolvare a problemei elasto-plastice cu ecrusare izotropă (descriș în Capitolul 2), dacă componenta deformației pe direcția perpendiculară la plan ε_{33} este neglijată în model;
- Se realizează simularea numerică a comportamentului unei plăci trapezoidale fără gaură și cu gaură, supusă la o încărcare periodică aplicată pe latura orizontală și încastrată pe latura verticală. În particulele materiale fixate se reprezintă curbele ciclice tensiune-deformație ce descriu răspunsul materialului deformat elasto-plastic;
- Din graficele distribuțiilor tensiunilor σ_{11} în placa fără gaură și cu gaură, este interesant de remarcat că deși placa este supusă unei solicitări ciclice cu amplitudine constantă, zonele în care tensiunile au intensitate maximă devin din ce în ce mai mari odată cu creșterea numărului de cicluri (Fig. 16, respectiv 19);
- Aria buclei de histeresis în spațiul tensiune-deformație corespunzător unui punct material al plăcii scade în timp, ceea ce duce la scăderea amplitudinii deformației, deși placa este solicitată ciclic cu forță de amplitudine constantă (Fig. 17 și Fig. 20);
- Comparând Fig. 17 și Fig. 20 pentru modelul Simo-Hughes cu ecrusare izotropă și stare plană de tensiune cu cele obținute în Capitolul 2 (Fig. 2 și Fig. 5), se observă diferențe destul de mici între valorile acestora, atât la placa fără gaură cât și la placa cu gaură în nodurile alese în zona de încastrare. La fel ca în modelul elasto-plastic cu ecrusare mixtă de tip Prager, descriș în primul paragraf, și în acest caz, diferențele majore între algoritmi, apar în zona găurii;
- Comparând Figurile 3 și Fig. 6 din Capitolul 2, cu Figurile 18 și Fig. 21 din acest capitol, se observă că, în nodurile din zona de încastrare, deformațiile ε_{33} și deformațiile plastice ε_{33}^p sunt mai mici, în cazul modelului elasto-plastic cu ecrusare izotropă și stare plană de tensiune față de modelul elasto-plastic cu ecrusare izotropă.

Capitolul 4. Inegalități variaționale în elasto-plasticitatea cu ecruisare mixtă de tip Armstrong-Frederick

Rezultatele originale obținute în **Capitolul 4** sunt descrise în [9] "Variational inequality and numerical algorithm for Armstrong-Frederick elasto-plastic model". În articol este propusă și dezvoltată o altă modalitate de abordare a problemelor cu date la limită în elasto-plasticitatea cu mici deformații. În acest capitol este considerat modelul constitutiv pentru elasto-plasticitatea cu ecruisare mixtă de tip Armstrong-Frederick în cadrul constitutiv specific micilor deformații, descris printr-o reprezentare incrementală. Modelul constitutiv s-a prezentat în primul capitol la **Punctul D**. Problema cvasistatică cu date inițiale și la limită asociată modelului elasto-plastic, este scrisă în viteze și se rezolvă prin inegalități variaționale. Se formulează inegalitatea variațională asociată problemei cvasistatice cu date inițiale și la limită la un moment fixat de timp în necunoscutele \dot{u} , adică viteza de deplasare și β factorul plastic complementar. Coeficienții care intervin în inegalitatea variațională sunt dependenți de valorile curente ale tensorului tensiune, ale deformației elastice și plastice, precum și a variabilelor interne de stare. Se utilizează procedura inițiată de Cleja-Țigoiu și Matei în [11] de construcție a inegalității variaționale pentru determinarea vitezei și a factorului plastic la momentul t . Vom formula un algoritm de actualizare care să permită determinarea stării actuale a procesului de la momentul $t^* > t$ prin integrarea ecuațiilor constitutive de tip diferențial care caracterizează modelul. Pentru determinarea soluțiilor inegalității variaționale se asociază o funcțională ale cărei puncte de minim sunt soluții ale inegalității variaționale. În Paragraful 4.7. s-a analizat modul în care se formulează inegalitatea variațională în cazul stării de tensiune plană, prin reformularea problemei de inegalitate variațională cuplată cu algoritmul specific de actualizare.

4.1. Formularea matematică a problemei și inegalitatea variațională

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ corpul care se deformează la momentul $t \in I$ cu $I = [0, T)$. Presupunem că frontiera corpului Ω notată $\partial\Omega = \Gamma$ se descompune în două părți Γ_u și Γ_σ , cu $\bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_\sigma = \Gamma$ și $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$. Notăm cu n normala exterioară frontierei corpului $\partial\Omega$. Deoarece modelul elasto-plastic cu ecruisare mixtă de tip Armstrong-Frederick a fost descris în primul capitol la **Punctul B**, vom trece direct la formularea următoarei probleme:

Problema P. Fie date funcțiile $b, f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Să se determine funcțiile $\sigma, \varepsilon^p, \alpha$ și k care satisfac următorul sistem de ecuații diferențiale:

$$(P_1) : \begin{cases} \dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{3}{2} \frac{1}{Q(1 - e^{-bk}) + \sigma_Y} (\sigma' - \alpha) \\ \dot{\alpha} = \lambda \left(C \frac{3}{2} \frac{1}{Q(1 - e^{-bk}) + \sigma_Y} (\sigma' - \alpha) - \gamma \alpha \right) \\ \dot{\sigma} = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}) - \lambda \frac{3}{2} \frac{1}{Q(1 - e^{-bk}) + \sigma_Y} \mathcal{E}(\sigma' - \alpha) \\ \dot{k} = \lambda \end{cases} \quad \text{unde} \quad (70)$$

$$\begin{cases} \mathcal{F} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\sigma' - \alpha\| - [Q(1 - e^{-bk}) + \sigma_Y] \\ \lambda = \frac{\langle \beta \rangle}{h_c} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \\ \beta = \partial_\sigma \mathcal{F} \cdot \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}) \\ h_c = \partial_\sigma \mathcal{F} \cdot \mathcal{E} \partial_\sigma \mathcal{F} + C - \gamma \partial_\sigma \mathcal{F} \cdot \alpha + Q b e^{-bk} \\ \partial_\sigma \mathcal{F} = \frac{3}{2} \frac{\sigma' - \alpha}{\|\sigma' - \alpha\|} \end{cases} \quad (71)$$

în ipoteza că parametrul de ecruisare $h_c > 0$ cu $Q, b, C, \gamma, \sigma_Y$ constante de material.

Problema cvasistatică cu date inițiale și la limită scrisă în viteze este definită în:

$$(P_2) : \begin{cases} \operatorname{div} \dot{\sigma} + \dot{b} = 0 & \text{in } \Omega \times I \\ u(0) = u_0, \sigma(0) = \sigma_0, \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \\ \varepsilon^p(0) = \varepsilon_0^p, \alpha(0) = \alpha_0, k(0) = k_0 \\ \dot{\sigma} n = \dot{f} & \text{in } \Gamma_\sigma \times I \\ \dot{u} = \dot{g} & \text{in } \Gamma_u \times I \end{cases} \quad (72)$$

Definim spațiul vitezelor admisibile, la fiecare moment de timp t :

$$\mathcal{V}_{ad}(t) = \left\{ w \in L^2(\Omega); \frac{\partial w}{\partial x} \in L^2(\Omega), w|_{\Gamma_u} = \dot{g} \right\} \subset (H^1(\Omega))^3 \quad (73)$$

și spațiul tuturor factorilor plastici admisibili, pentru $t \in I$:

$$\mathcal{M}_{ad}(t) = \{ \delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \delta(x) = 0, \text{ dacă } x \in \Omega/\Omega^p, \delta(x) > 0, \text{ dacă } x \in \Omega^p \} \subset L^2(\Omega) \quad (74)$$

Soluțiile problemei formulate mai sus se determină în spațiile $C^1([0, T], X)$, cu $X \equiv H^1(\Omega)$ spațiul Hilbert, cu $C^1([0, T], X) = \{ w \in C([0, T], X) ; w^{(1)} \in C([0, T], X) \}$, unde prin $w^{(1)}$ s-a notat derivata de ordinul unu a lui w .

Teorema 4.1. *La fiecare moment de timp $t \in I$, viteza câmpului de deplasare \dot{u} și factorul plastic complementar β , satisfac următoarele relații:*

$$\int_{\Omega} \mathcal{E} \varepsilon(\dot{u}) \cdot \varepsilon(w - \dot{u}) dx - \int_{\Omega^p} \mathcal{E} \frac{\beta}{h_c} \partial_\sigma \mathcal{F} \cdot \varepsilon(w - \dot{u}) dx = \int_{\Omega} \dot{b} \cdot (w - \dot{u}) dx + \int_{\Gamma_\sigma} \dot{f} \cdot (w - \dot{u}) d\Gamma_\sigma \quad (75)$$

$$- \int_{\Omega^p} \frac{1}{h_c} (\delta - \beta) \partial_\sigma \mathcal{F} \mathcal{E} \cdot \varepsilon(\dot{u}) dx + \int_{\Omega^p} \frac{1}{h_c} \beta (\delta - \beta) dx \geq 0 \quad (76)$$

pentru $\forall w \in \mathcal{V}_{ad}^0(t)$ și $\forall \delta \in \mathcal{M}_{ad}(t)$.

Definim setul convex \mathcal{K} ca fiind spațiul funcțional $\mathcal{K} = \{ (w, \delta) \mid w \in \mathcal{V}_{ad}^0, \delta \in \mathcal{M}_{ad} \}$.

Putem formula inegalitatea variațională pentru problema cvasistatică elasto-plastică. Vom introduce următoarele forme biliniare:

$$\mathcal{A}(\dot{u}, w) = \int_{\Omega} \mathcal{E} \varepsilon(\dot{u}) \cdot \varepsilon(w) dx; \quad \mathcal{B}(\beta, w) = - \int_{\Omega^p} \mathcal{E} \frac{1}{h} \beta \partial_\sigma \mathcal{F} \cdot \varepsilon(w) dx \quad (77)$$

$$\mathcal{B}^T(\dot{u}, \delta) = - \int_{\Omega^p} \frac{1}{h} \delta \partial_\sigma \mathcal{F} \cdot \mathcal{E} \varepsilon(\dot{u}) dx; \quad \mathcal{C}(\beta, \delta) = \int_{\Omega^p} \frac{1}{h} \beta \delta dx$$

pentru $\forall \dot{u}, w \in \mathcal{V}_{ad}$ și $\forall \delta, \beta : \Omega \rightarrow R_+$.

Utilizând cele patru forme date mai sus, putem defini următoarea formă biliniară și simetrică $a(\cdot, \cdot)$:

$$a(U, W) = \mathcal{A}(\dot{u}, w) + \mathcal{B}(\beta, w) + \mathcal{B}^T(\dot{u}, \delta) + \mathcal{C}(\beta, \delta) \quad (78)$$

pentru $\forall U = (\dot{u}, \beta)$ și $\forall W = (w, \delta)$.

Definim, de asemenea, funcționala liniară $L(\cdot)$:

$$L(W) = \int_{\Gamma_\sigma} \dot{f} \cdot w d\Gamma_\sigma + \int_{\Gamma_u} \dot{\sigma} n \cdot \dot{g} d\Gamma_u + \int_{\Omega} \rho_0 \dot{b} \cdot w dx \quad (79)$$

pentru $\forall W = (w, \delta)$, cu $\forall w \in \mathcal{V}_{ad}$ și $\forall \delta \in \mathcal{M}_{ad}$.

Teorema 4.2. *La fiecare moment de timp, perechea $U = (\dot{u}, \beta) \in \mathcal{K}$ satisface inegalitatea variațională*

$$a(U, W - U) \geq L(W - U) \quad \forall W \in \mathcal{K} \quad (80)$$

Dacă forma bilineară $a(\cdot, \cdot)$ este simetrică și pozitiv definită, atunci definim funcționala $J : X \rightarrow \mathbb{R}$:

$$J(W) = \frac{1}{2}a(W, W) - L(W), \quad \forall W \in \mathcal{K} \quad (81)$$

Lema 1.1. Fie $L(\cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcțională liniară și continuă. $U \in \mathcal{K}$ este soluția inegalității variaționale (80) dacă și numai dacă:

$$J(W) \geq J(U), \quad \forall W \in \mathcal{K} \quad (82)$$

4.2. Formularea variațională discretă și aproximarea internă prin elemente finite

Pentru a aplica metoda elementului finit, în primul rând vom formula inegalitatea variațională în discret. Pentru aceasta, vom diviza intervalul continuu de timp $[0, T]$ în secvențe discrete de timp t_0, t_1, \dots, t_N . Are loc următoarea teoremă:

Problema P1. Să se găsească $U_n = (\hat{u}_n, \hat{\beta}_n) \in \mathcal{K}_{ad}^h$ ca soluție a inegalității variaționale discrete:

$$a(U_n, W_n - U_n) \geq L(W_n - U_n) \quad \forall W_n \in \mathcal{K}_{ad}^h \quad (83)$$

În urma aproximării interne a inegalității variaționale discrete dată în (83) prin elemente finite, vom avea:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \hat{w}_n^{eT} \left[\int_{\Omega_e} B^{eT}(x) \mathcal{E} B^e(x) dx \right] \hat{u}_n^e \right\} - \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \hat{w}_n^{eT} \left[\int_{\Omega_e} B^{eT}(x) \mathcal{E} \frac{1}{h_{c_n}^e(x)} \partial_\sigma \mathcal{F}_n^e \mathcal{H}(\mathcal{F}_n^e) dx \right] \hat{\beta}_n^e \right\} - \\ & - \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \hat{\delta}_n^{eT} \left[\int_{\Omega_e} \frac{1}{h_{c_n}^e(x)} \partial_\sigma \mathcal{F}_n^{eT} \mathcal{E}^T B^e(x) \mathcal{H}(\mathcal{F}_n^e) dx \right] \hat{u}_n^e \right\} + \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \hat{\delta}_n^{eT} \left[\int_{\Omega_e} \frac{1}{h_{c_n}^e(x)} \mathcal{H}(\mathcal{F}_n^e) dx \right] \hat{\beta}_n^e \right\} \\ & \geq \sum_{e=1}^{nel} \left\{ \hat{w}_n^{eT} \left[\int_{\Omega_e} N^{eT}(x) N^e(x) \hat{b}_n^e(x) dx + \int_{\Gamma_\sigma^e} N^{eT}(x) N^e(x) \hat{f}_n^e(x) d\Gamma_\sigma^e \right] \right\} \end{aligned} \quad (84)$$

unde $N^e(x)$ este matricea funcțiilor de interpolare pe fiecare element din rețea, iar $B^e(x)$ este matricea derivatelor funcțiilor de interpolare pe fiecare element din rețea.

Teorema 4.3. Forma bilineară dată de (78), scrisă în dimensiune finită devine:

$$a(\hat{U}_n, \hat{W}_n) = \hat{W}_n^T \hat{K}_n \hat{U}_n, \quad \forall \hat{W}_n \in \mathcal{K}^h, \quad (85)$$

iar funcționala lineară scrisă în formă finită este dată de:

$$L(\hat{W}_n) = \hat{W}_n^T \hat{R}_n \quad \text{unde} \quad (86)$$

$$\hat{W}_n^T = [\hat{w}_n \quad \hat{\delta}_n]; \quad \hat{K}_n = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_n \\ \hat{B}_n^T & \hat{C}_n \end{bmatrix}; \quad \hat{U}_n = \begin{bmatrix} \hat{u}_n \\ \hat{\beta}_n \end{bmatrix}; \quad \hat{R}_n = \begin{bmatrix} \hat{R}_n \\ 0_{p \times 1} \end{bmatrix}, \quad p = \dim(\hat{\delta}_n^T). \quad (87)$$

Problema P2. Să se găsească $\hat{U}_n \in \mathcal{K}^h$ astfel încât:

$$(\hat{W}_n - \hat{U}_n)^T \hat{K}_n \hat{U}_n \geq (\hat{W}_n - \hat{U}_n)^T \hat{R}_n, \quad \forall \hat{W}_n \in \mathcal{K}^h \quad (88)$$

unde \mathcal{K}^h este spațiul finit dimensional al setului convex \mathcal{K} .

Ținând cont de Teorema 0.7 și de Lema 0.1, vom introduce funcționala $J(\hat{W}_n)$ prin:

$$J(\hat{W}_n) = \frac{1}{2} \hat{W}_n^T \hat{K}_n \hat{U}_n - \hat{W}_n^T \hat{R}_n, \quad \forall \hat{W}_n \in \mathcal{K}^h \quad (89)$$

Problema redusă în dimensiune finită **Problema P3** este echivalentă cu următoarea problemă de minimizare în dimensiune finită:

Problema P3. Să se găsească $\hat{U}_n \in \mathcal{K}^h$ astfel încât:

$$J(\hat{U}_n) = \min J(\hat{W}_n) \quad , \quad \forall \hat{W}_n \in \mathcal{K}^h \quad (90)$$

Observația 4.1. Cum matricea de rigiditate \hat{K}_n este simetrică și pozitiv definită, problema redusă în dimensiune finită este echivalentă cu problema de minimizare în dimensiune finită și are soluție unică.

4.3. Algoritmul de rezolvare a problemei de minimizare în dimensiune finită

Cu ajutorul funcționalei date de relația (90), putem determina prin punctele de minim, soluțiile inegalității variaționale. Cum funcționala $J(\hat{W}_n)$ este convexă și de clasă C^1 , în cele ce urmează calculăm derivata funcționalei $J(\hat{W}_n)$:

$$\frac{\partial J(\hat{W}_n)}{\partial \hat{W}_n} = 0 \quad \text{sau} \quad \hat{K}_n \hat{W}_n - \hat{R}_n = 0 \quad (91)$$

Matriceal, egalitatea de mai sus se scrie sub forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_n \\ \hat{B}_n^T & \hat{C}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_n \\ \hat{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{R}_n \\ 0_{p \times 1} \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \hat{A}\hat{u}_n + \hat{B}_n\hat{\beta}_n = \hat{R}_n \\ \hat{B}_n^T\hat{u}_n + \hat{C}_n\hat{\beta}_n = 0 \end{cases} \quad (92)$$

Soluțiile \hat{u}_n adică viteza de deplasare și $\hat{\beta}_n$ factorul plastic complementar se obțin în urma rezolvării sistemului (92). Acestea sunt de forma:

$$\begin{aligned} \hat{u}_n &= [\hat{A} - \hat{B}_n \text{geninv}(\hat{C}_n) \hat{B}_n^T]^{-1} \hat{R}_n \\ \hat{\beta}_n &= -\text{geninv}(\hat{C}_n) \hat{B}_n^T [\hat{A} - \hat{B}_n \text{geninv}(\hat{C}_n) \hat{B}_n^T]^{-1} \hat{R}_n \end{aligned} \quad (93)$$

unde $\text{geninv}(\hat{C}_n) = (\hat{C}_n^T \hat{C}_n)^{-1} \hat{C}_n^T$ este inversa matricei \hat{C}_n generalizată.

4.4. Algoritmul de actualizare

Pentru algoritmul de actualizare, vom discretiza diviza intervalul de timp $[0, T]$ în secvențe discrete t_0, t_1, \dots, t_N cu $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Pentru rezolvarea sistemului de ecuații în necunoscutele $\varepsilon^p, \sigma, \alpha, k$ dat de relația (70), împreună cu (71), se aplică metoda Euler

$$\begin{cases} [\varepsilon^p]_{n+1}^e = [\varepsilon^p]_n^e + [\lambda^*]_n^e \partial_{\sigma_n} \mathcal{F}_n; \\ [\alpha]_{n+1}^e = [\alpha]_n^e + [\lambda^*]_n^e (C \partial_{\sigma_n} \mathcal{F}_n - \gamma [\alpha]_n^e); \\ [\sigma]_{n+1}^e = [\sigma]_n^e + \mathcal{E}([\varepsilon]_n^e - [\varepsilon^p]_n^e) \\ [k]_{n+1}^e = [k]_n^e + [\lambda^*]_n^e \end{cases} \quad (94)$$

unde $[\lambda^*]_n^e = [\lambda]_n^e \Delta t = [\lambda]_n^e (t_{n+1} - t_n)$ cu

$$[\lambda]_n^e = \frac{[\beta]_n^e}{[h_c]_n^e} \mathcal{H}(\mathcal{F}_n) \quad (95)$$

Parametrul de ecrusare $[h_c]_n^e$ se determină din relația:

$$[h_c]_n^e = \partial_{\sigma_n} \mathcal{F}_n \mathcal{E} \partial_{\sigma_n} \mathcal{F}_n + C - \gamma [\alpha]_n^e \partial_{\sigma_n} \mathcal{F}_n + F'(k_n) \quad (96)$$

iar factorul plastic complementar $[\beta]_n^e$ a fost determinat în paragraful anterior.

Funcția de plasticitate $[\mathcal{F}]_n^e$ este de forma:

$$[\mathcal{F}]_n^e = \sqrt{\frac{3}{2}} \|[\sigma]_n^e - [\alpha]_n^e\| - F(k_n) \quad (97)$$

4.5. Algoritm general de rezolvare al Problemei P

1. se inițializă pentru pasul incremental $n = 0$, vectorii globali $[\sigma]_0 = 0$; $[\varepsilon^p]_0 = 0$; $[\alpha]_0 = 0$; $[k]_0 = 0$, precum și timpul inițial $t_0 = 0$ și timpul final $t_f = a$, $a > t_0, \forall a \in \mathbb{R}$.
2. se execută bucla iterativă pentru $n = \overline{0, N}$, N fixat (este numărul de părți egale în care se împarte intervalul de timp $[t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$, cu proprietatea că $t_0 < t_f$ și $t_f = t_N$). Punctele de diviziune ale intervalului de timp, se calculează cu ajutorul următoarei soluții iterative: $t_n = t_0 + nh$ unde $h = \frac{t_f - t_0}{N}$ pasul metodei;

$$\{[\hat{u}]_n, [\hat{\beta}]_n\} = \mathbf{Sol.ineg.var} \{[\sigma]_n; [\varepsilon^p]_n; [\alpha]_n; [k]_n, t_n\}$$

Algoritm **Sol.ineg.var** determină soluțiile inegalității variaționale $[\hat{u}]_n$ și $[\hat{\beta}]_n$ pentru un t_n fixat, utilizând următoarele formule:

$$[\hat{u}]_n = [\hat{A} - \hat{B}_n \mathit{geninv}(\hat{C}_n) \hat{B}_n^T]^{-1} \hat{R}_n;$$

$$[\hat{\beta}]_n = -\mathit{geninv}(\hat{C}_n) \hat{B}_n^T [\hat{A} - \hat{B}_n \mathit{geninv}(\hat{C}_n) \hat{B}_n^T]^{-1} \hat{R}_n;$$

3. se execută o buclă iterativă pentru $e = 1$ la nel , unde nel reprezintă numărul de elemente obținute în urma discretizării în vederea aplicării metodei elementului finit. În această buclă, vectorii locali $[\hat{u}]_n^e, [\hat{\beta}]_n^e, [\varepsilon^p]_n^e, [\alpha]_n^e, [k]_n^e$ sunt extrași din vectorii globali $[\hat{u}]_n, [\hat{\beta}]_n, [\varepsilon^p]_n, [\alpha]_n, [k]_n$, iar apoi este aplicat algoritmul de actualizare

$$\{[\sigma]_{n+1}^e, [\alpha]_{n+1}^e, [\varepsilon^p]_{n+1}^e, [k]_{n+1}^e\} = \mathbf{Algoritm actualizare} \{[\sigma]_n^e, [\alpha]_n^e, [\varepsilon^p]_n^e, [k]_n^e, [\hat{u}]_n^e, [\hat{\beta}]_n^e\}$$

Algoritm de actualizare detemină vectorii locali $[\sigma]_{n+1}^e, [\alpha]_{n+1}^e, [\varepsilon^p]_{n+1}^e, [k]_{n+1}^e$ la momentul t_{n+1} pe baza următorului algoritm iterativ expus mai jos. Deoarece fiecare element al rețelei are patru noduri, întregul algoritm este introdus într-o buclă iterativă cu incrementul $i = 1$ to 4. Din vectorii locali $[\sigma]_n^e, [\alpha]_n^e, [\varepsilon^p]_n^e, [k]_n^e$ se extrag vectorii corespunzători fiecărui nod al elementului. Pentru a ușura scrierea, nu vom mai utiliza indicele i pentru fiecare vector.

$$[\mathcal{F}]_n^e = \sqrt{\frac{3}{2}} \|[\sigma]_n^e - [\alpha]_n^e\| - \left[Q(1 - e^{-b[k]_n^e}) + \sigma_Y \right]$$

$$[n]_n^e = \frac{3}{2} \frac{[\sigma]_n^e - [\alpha]_n^e}{Q(1 - e^{-b[k]_n^e}) + \sigma_Y}; \quad [k]_{n+1}^e = [k]_n^e + [\lambda^*]_n^e;$$

$$[h_c]_n^e = [n]_n^e \cdot \mathcal{E}[n]_n^e + C - \gamma[n]_n^e \cdot [\alpha]_n^e + Qbe^{-b[k]_n^e}; \quad [\lambda^*]_n^e = \frac{\langle [\hat{\beta}]_n^e \rangle}{[h_c]_n^e} \mathcal{H}([\mathcal{F}]_n^e);$$

$$[\varepsilon]_n^e = B^e [\hat{u}]_n^e; \quad [\sigma]_{n+1}^e = k_{atr}([\varepsilon]_n^e) + 2\mu[\varepsilon]_n^e - 2\mu[\lambda^*]_n^e [n]_n^e;$$

$$[\varepsilon^p]_{n+1}^e = [\varepsilon^p]_n^e + [\lambda^*]_n^e [n]_n^e; \quad [\alpha]_{n+1}^e = [\alpha]_n^e + [\lambda^*]_n^e (C[n]_n^e - \gamma[\alpha]_n^e);$$

După executarea celor patru pași ai buclei *for* corespunzători fiecărui nod al unui element al rețelei, se assemblează vectorii locali $[\sigma]_{n+1}^e, [\alpha]_{n+1}^e, [\varepsilon^p]_{n+1}^e, [k]_{n+1}^e$. După această etapă, se închide bucla *for* corespunzătoare pasului 3. din cadrul algoritmului general.

4. Se assemblează, din vectorii locali $[\sigma]_{n+1}^e, [\alpha]_{n+1}^e, [\varepsilon^p]_{n+1}^e, [k]_{n+1}^e$, vectorii globali $[\sigma]_{n+1}, [\alpha]_{n+1}, [\varepsilon^p]_{n+1}, [k]_{n+1}$, iar apoi se revine la pasul 2. din cadrul algoritmului general până când se ajunge la valoarea N din bucla iterativă.

Observația 4.2. Dacă în modelul elasto-plastic cu ecrusare mixtă de tip Armstrong-Frederick considerăm constanta de material $\gamma = 0$ din variabila cinematică de ecrusare α , atunci acesta poate fi redus la modelul elasto-plastic cu ecrusare mixtă de tip Prager.

Exemplul 4.1 Pentru acest exemplu vom utiliza aceeași placă trapezoidală fără gaură și cu gaură. Forța aplicată pe suprafața plăcii este $f = 50\sin(t)$. Parametrii materialului ales pentru realizarea simulării [2] sunt

$$\begin{aligned} E &= 182.000 [MPa]; \sigma_Y = 349,4 [MPa]; \nu = 0,3; C = 17.400 [MPa]; \\ Q &= 50,1 [MPa]; b = 27,5 [-]; \gamma = 125,9 [-] \end{aligned} \quad (98)$$

În continuare vom reprezenta grafic distribuțiile tensiunii Mises pentru placa cu gaură și fără gaură obținute pentru cazul ecrisării mixte de tip Armstrong - Frederick (AF).

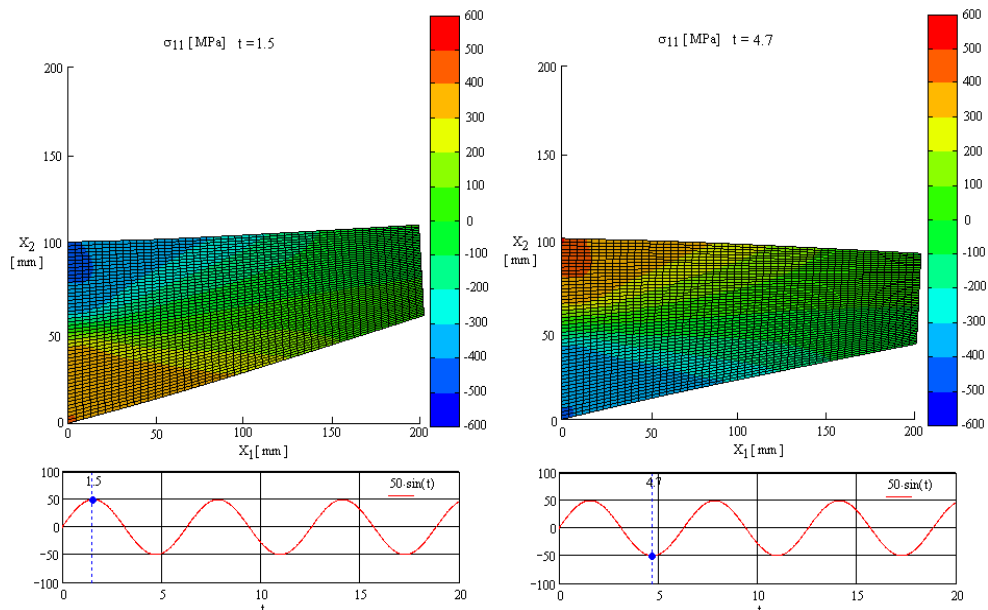


Figura 22: Distribuția tensiunii σ_{11} pentru placa trapezoidală la $t = 1.5$ și $t = 4.7$, care corespunde maximului și minimului forței aplicate f - ecrisare mixtă de tip Armstrong-Frederick

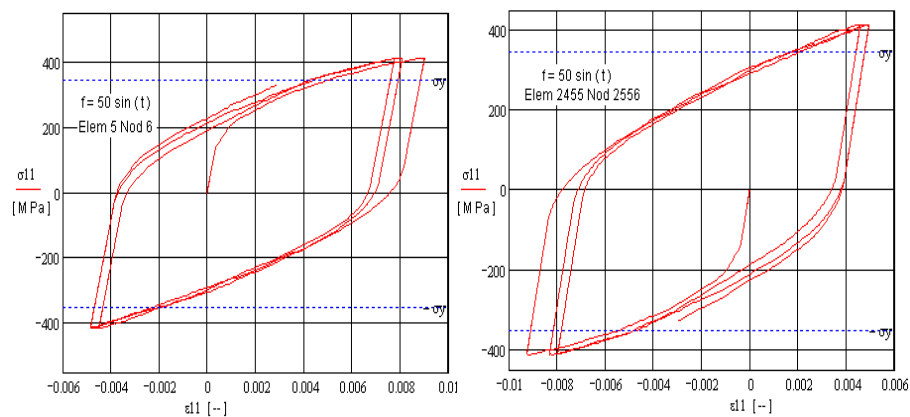


Figura 23: Graficele tensiunilor σ_{11} în raport cu deformațiile ϵ_{11} reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa fără gaură - ecrisare mixtă de tip Armstrong-Frederick

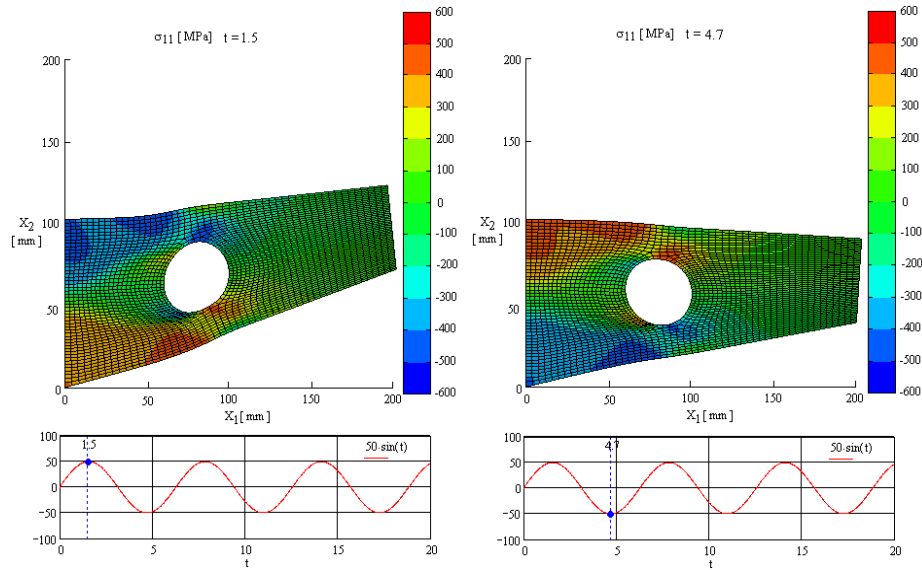


Figura 24: Distribuția tensiunii σ_{11} pentru placa cu gaură la $t = 1.5$ și $t = 4.7$, care corespunde maximului și minimului forței aplicate f - ecrusare mixtă de tip Armstrong-Frederick

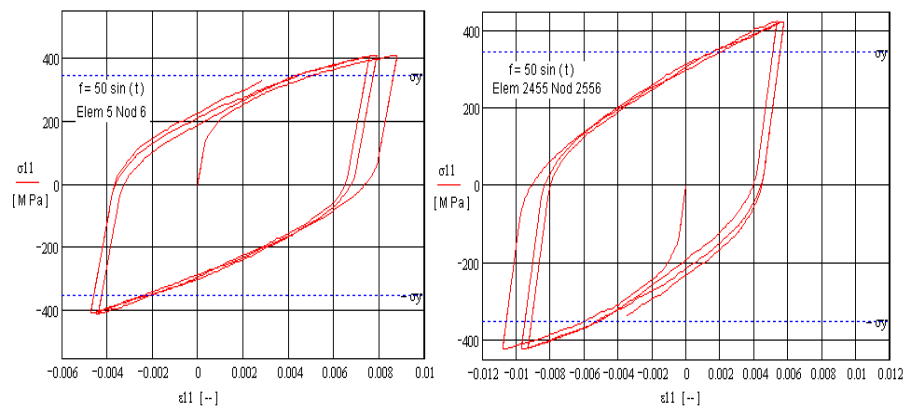


Figura 25: Graficele tensiunilor σ_{11} în raport cu deformațiile ε_{11} reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa cu gaură - ecrusare mixtă de tip Armstrong-Frederick

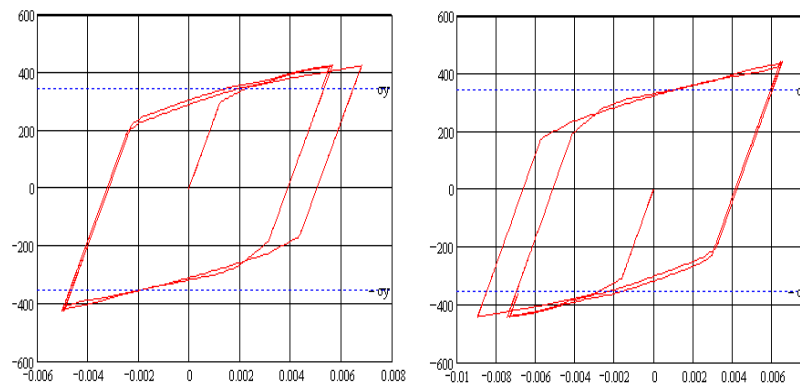


Figura 26: Graficele tensiunilor σ_{11} în raport cu deformațiile ε_{11} reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa cu gaură - ecrusare mixtă de tip Prager (inegalități variaționale)

4.6. Inegalități variaționale în elasto-plasticitatea cu ecruisare mixtă de tip Armstrong-Frederick și stare de tensiune plană

În acest paragraf vom introduce succint modelul constitutiv pentru elasto-plasticitatea cu ecruisare mixtă de tip Armstrong-Frederick cu stare plană de tensiune. Problema cvasistatică cu date inițiale și la limită asociată modelului elasto-plastic, este scrisă în viteze și se rezolvă la fel ca în Paragraful 4.1. prin inegalități variaționale. În acest caz, se ține cont atât de componenta normală a deformației ε_{33} cât și de componenta deformației plastice ε_{33}^p , care sunt omise în modelul propus de Simo și Hughes [17].

În acest paragraf vom descrie modelul elasto-plastic cu ecruisare mixtă de tip Armstrong-Frederick cu stare de tensiune plană. Soluțiile inegalității variaționale rămân neschimbate fiind date de relația (93).

Propoziția 4.1. *În spațiul tensiunilor plane, au loc următoarele rezultate:*

1. viteza tensorului de tensiune plană este calculată cu ajutorul următoarei ecuații constitutive:

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}_{(2)} \left(\dot{\varepsilon}_{(2)} - \lambda^{(r)} \partial_s \tilde{\mathcal{F}}(s, \hat{\alpha}, k) \right) \quad (99)$$

unde $\mathcal{E}_{(2)}$ este tensorul complinților elastici, iar factorul plastic original λ este înlocuit cu $\lambda^{(r)}$.

2. expresia componentei normale a deformației ε_{33} este de forma următoare

$$\dot{\varepsilon}_{33} = -\frac{\lambda_a}{\lambda_a + 2\mu_a} (\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}) - \frac{2\mu_a}{\lambda_a + 2\mu_a} \lambda (\partial_{\sigma_{11}} \mathcal{F}(\sigma, \alpha, k) + \partial_{22} \mathcal{F}(\sigma, \alpha, k)) \quad (100)$$

3. factorul plastic $\lambda^{(r)} : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ este calculat pe suprafața de plasticitate $\tilde{\mathcal{F}}(s, \hat{\alpha}, k) = 0$ prin următoarea expresie

$$\lambda^{(r)} = \frac{\langle \beta \rangle}{h} \mathcal{H}(\mathcal{F}) \quad (101)$$

unde factorul plastic complementar are expresia

$$\begin{aligned} \beta &= 2\mu_a \left(\partial_{s_{11}} \tilde{\mathcal{F}}(s, \hat{\alpha}, k) + \frac{\lambda_a}{\lambda_a + 2\mu_a} \partial_{tr} \tilde{\mathcal{F}}(s, \hat{\alpha}, k) \right) \dot{\varepsilon}_{11} + \\ &+ 2\mu_a \left(\partial_{s_{22}} \tilde{\mathcal{F}}(s, \hat{\alpha}, k) + \frac{\lambda_a}{\lambda_a + 2\mu_a} \partial_{tr} \tilde{\mathcal{F}}(s, \hat{\alpha}, k) \right) \dot{\varepsilon}_{22} + 4\mu_a \partial_{s_{12}} \tilde{\mathcal{F}}(s, \hat{\alpha}, k) \dot{\varepsilon}_{12} \end{aligned} \quad (102)$$

și parametrul de ecruisare este dat de relația

$$\begin{aligned} h_c &= (2\mu_a + C) \left| \partial_s \tilde{\mathcal{F}}(s, \hat{\alpha}, k) \right|^2 + \left(2\mu_a + C + \frac{4\mu_a^2}{\lambda_a + 2\mu_a} \right) \left| \partial_{tr} \tilde{\mathcal{F}}(s, \hat{\alpha}, k) \right|^2 - \\ &- \gamma \left(\partial_s \tilde{\mathcal{F}}(s, \hat{\alpha}, k) \cdot \hat{\alpha} + \partial_{tr} \tilde{\mathcal{F}}(s, \hat{\alpha}, k) (tr \hat{\alpha}) \right) + \partial_k F(k) \end{aligned} \quad (103)$$

în ipoteza că $h > 0$, în care $\partial_k F(k)$ poate fi scrisă în general.

Observația 4.3. Dacă $\gamma = 0$, atunci atunci modelul elasto-plastic devine unul cu ecruisare mixtă de tip Prager.

Algoritmul general de rezolvare a problemei cvasistatice cu date la limită scrisă în viteze asociată cu modelul elasto-plastic cu ecruisare mixtă de tip Armstrong-Frederick cu stare de tensiune plană este asemănător cu cel descris în Paragraful 4.5.

Curbele de tensiune-deformație obținute în urma rulării programului Mathcad prin teste ciclice pentru tensiunea σ_{11} în raport cu deformația ε_{11} pentru placa fără gaură și cu gaură sunt date în continuare.

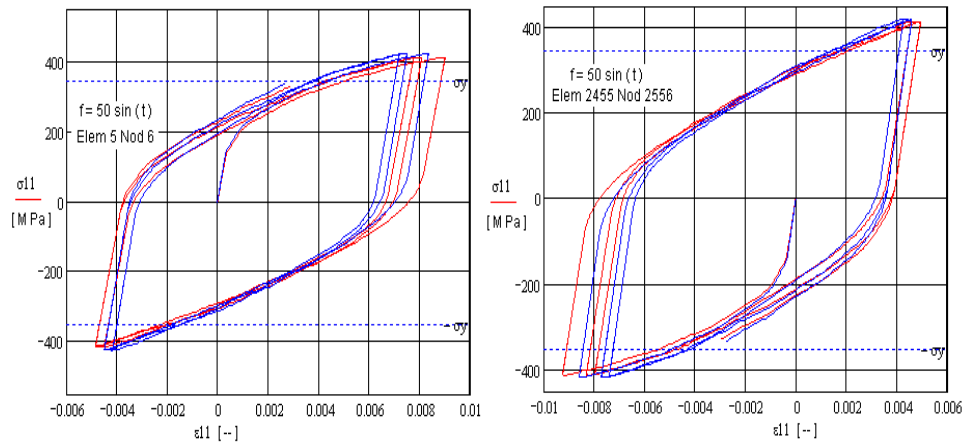


Figura 27: Graficele tensiunilor σ_{11} în raport cu deformațiile ε_{11} reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa trapezoidală - ecrusare mixtă de tip Armstrong-Frederick (roșu); ecrusare mixtă de tip Armstrong-Frederick cu stare plană de tensiune (albastru)

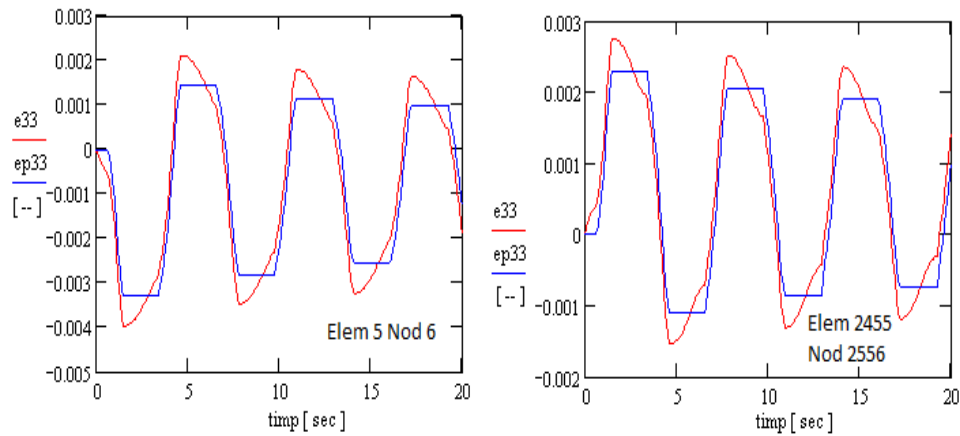


Figura 28: Graficele deformațiilor ε_{33} și ale deformațiilor plastice ε_{33}^p în raport cu timpul, reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa trapezoidală - ecrusare mixtă de tip Armstrong-Frederick cu stare plană de tensiune

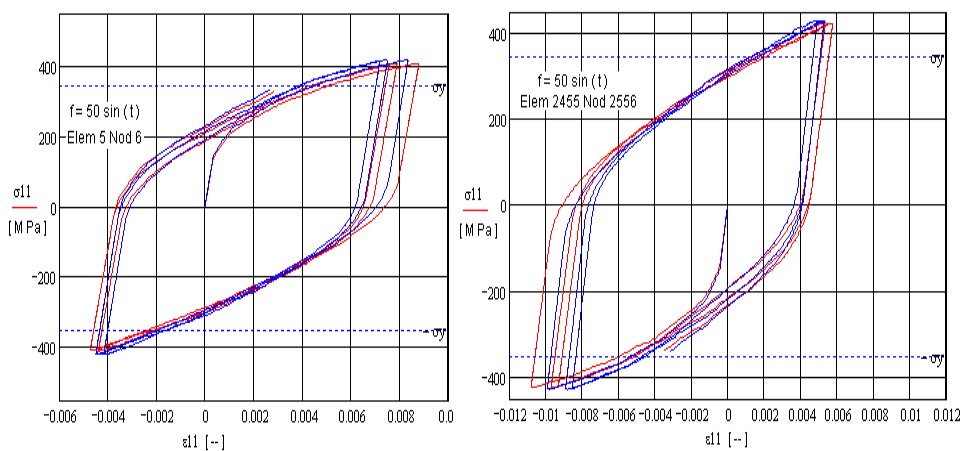


Figura 29: Graficele tensiunilor σ_{11} în raport cu deformațiile ε_{11} reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa cu gaură - ecrusare mixtă de tip Armstrong-Frederick (roșu) ecrusare mixtă de tip Armstrong-Frederick cu stare plană de tensiune (albastru)

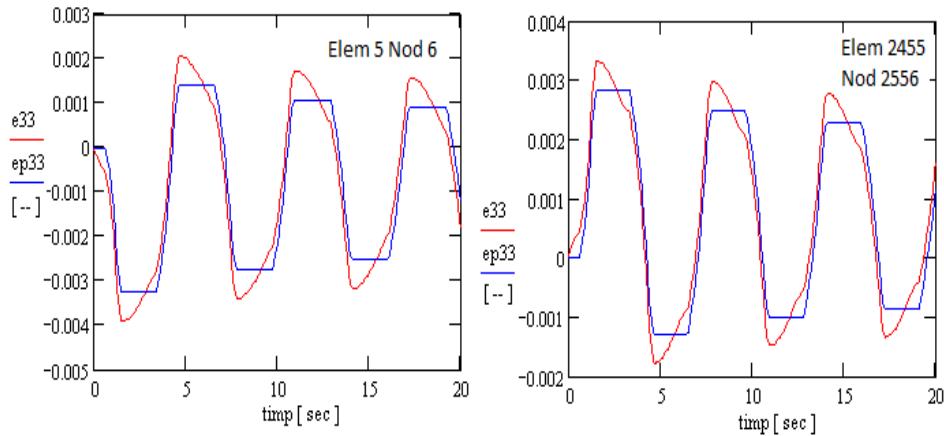


Figura 30: Graficele deformațiilor ε_{33} și ale deformațiilor plastice ε_{33}^p în raport cu timpul, reprezentate în nodurile 6 și 2556 pentru placa cu gaură - ecruiare mixtă de tip Armstrong-Frederick cu stare plană de tensiune

4.6. Concluzii

- În acest capitol este prezentată o altă modalitate de abordare a problemelor cu date la limită în elasto-plasticitatea cu mici deformații, utilizând inegalitățile variaționale;
- A fost considerată atât problema tridimensională cât și problema stării de tensiune plane, probleme specifice deformării plăcilor plane;
- În cazul ecruiării mixte de tip Armstrong-Frederick, se observă că la placa fără gaură, tensiunile σ_{11}^{max} sunt distribuite în colțurile din stânga sus și jos a zonei de încăstrare a plăcii, iar la placa cu gaură acestea sunt distribuite în aceleași zone, dar și în jurul găurii;
- Comparând graficele obținute pentru modelul elasto-plastic cu ecruiare mixtă de tip Armstrong-Frederick (Fig. 25) cu cele obținute pentru modelul elasto-plastic cu ecruiare mixtă de tip Prager pentru placa cu gaură (Fig. 26), se observă că panta curbei tensiune-deformație în zona deformației plastice este mai mare în cazul modelului Armstrong-Frederick;
- În Fig. 27 pentru placa fără gaură și Fig. 30 la placa cu gaură se observă că tensiunile sunt puțin mai mari în cazul modelului elasto-plastic cu ecruiare mixtă de tip Armstrong-Frederick decât cele pentru cazul modelului elasto-plastic de tip Armstrong-Frederick cu stare de tensiune plană. În schimb deformațiile sunt mai mici. Prin compararea rezultatelor numerice realizate prin cele două metode, având în vedere buna lor concordanță, putem trage concluzia că metoda numerică propusă prin inegalități variaționale poate fi validată;
- Comparând Fig. 28 cu Fig. 30, se observă că atât deformațiile ε_{33} , cât și deformațiile plastice ε_{33}^p sunt puțin mai mari în elementul 2455, nodul 2456 la placa cu gaură față de placa fără gaură;
- Metoda algoritmică bazată pe inegalitatea variațională cuplată cu algoritmul de actualizare a stării sistemului diferențial și cu derivate parțiale, poate fi extinsă în vederea aplicării în probleme de elasto-plasticitate cu deteriorare (de tip "damage"), precum și în probleme de elasto-plasticitate cu deformații finite;
- Abordarea funcțională și numerică, prin inegalitate variațională asociată cu un algoritm de actualizare a problemelor cu date inițiale și la limită în elasto-plasticitatea cu mici deformații, permite luarea în considerație a unor modele complexe cu ecruiare mixtă de tip Armstrong-Frederick, sau considerarea unor legi de variație a ecruiării cinematice cuplată cu ecruiare izotropă, neliniară de tip Voce, Chaboche etc.

Bibliografie

- [1] Armstrong, P. J., Frederick, C. O., A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, *G.E.G.B. Report RD-B-N 731*, 1996
- [2] Broggiato, G. B., Campana, F., Cortese, L., The Chaboche nonlinear kinematic hardening model: calibration methodology and validation, *Meccanica, vol.43, No.2, Springer*, pp.115-124, 2008
- [3] Chaboche, J. L., Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity, *Int. J. plasticity, 5, 3*, pp. 247-302, 1989
- [4] Cleja-Țigoiu, S., Cristescu, N., Teoria plasticității cu aplicații la prelucrarea materialelor, *Ed. Univ. București*, 1985
- [5] Cleja-Țigoiu, S., **Stoicuța N.**, Stoicuța O., Analysis and Numerical Approach of a unidimensional elasto-plastic problem with mixed hardening, *ROMAI Journal 6, 2(2010)*, pp. 109-123, ISSN 1841-5512, 2010
- [6] Cleja-Țigoiu, S., **Stoicuța N.**, Raisa Pașcan, Numerical Approach To Some Problems in Elasto-Plasticity, *vol. Invers Problem and Computational Mechanics, Editura Academiei Române, București*, pp. 235-281, 2011
- [7] Cleja-Țigoiu, S., **Stoicuța N.**, Stoicuța O., Numerical algorithms for solving the elasto-plastic problem with mixed hardening, *Romanian Journal of Technical Sciences Applied Mechanics, Bucharest, nr.3*, 2013
- [8] **Stoicuța N.**, Cleja-Țigoiu, S., Numerical algorithm for solving the elasto-plastic problem with isotropic hardening and the plane stress state, *Recent Advances in Applied and Theoretical Mathematics (Proceeding of the 18th WSEAS International Conference on Applied Mathematics AMATH '13), Budapest, Hungary*, pp. 235-243, ISBN 978-960-474-351-3, 2013
- [9] Cleja-Țigoiu, S., **Stoicuța N.**, Variational inequality and numerical algorithm for Armstrong-Frederick elasto-plastic model, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Elsevier* (trimisă spre publicare), 2014
- [10] Cleja-Țigoiu, S., **Stoicuța N.**, Revisited Simo algorithm for the plane stress state, *Applied Mathematics and Computation, Elsevier* (în curs de recenzie), 2013
- [11] Cleja-Țigoiu, S., Matei, A., Rate Boundary Value Problem and Variational Inequalities in Finite Elasto-Plasticity, *Mathematics and Mechanics Solids*, pp. 557-586, 2012
- [12] Fish, J., Belytschko, T., A First Course in Finite Elements, *John Wiley and Sons, Ltd., USA*, 2007
- [13] Glowinski, R., Lions, J. L., Tremolieres, R., Numerical Analysis of Variational Inequalities, *North-Holland Publishing Company-Amsterdam, New York, Oxford*, 1981
- [14] Han, W., Reddy, B. D., Plasticity. Mathematical Theory and Numerical Analysis, *Springer, New York*, 1999
- [15] Hughes, T.J.R., The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, *Prentice-Hall, Englewood, New Jersey*, 1987
- [16] Prager, W., A new method of analysing stress and strain in work-hardening plastic solid, *Journal Appl. Mech 23*, pp.493-496, 1956
- [17] Simo, J. C., Hughes, T. J. R., Computational Inelasticity, *Springer Verlag*, 1998