UNIVERSITATEA BUCUREŞTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
ŞCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ

TEZĂ DE DOCTORAT

CONDIȚII DE OPTIMALITATE ŞI DUALITATE PENTRU CLASE DE PROBLEME DE OPTIMIZARE

REZUMAT

Conducător științific,
Prof. Dr. Vasile PREDA

Doctorand,
Toni Cătălin MIHALCEA

BUCUREŞTI
2014

CUPRINS

Introducere 3

Motivare

Direcţii principale

Structura tezei de doctorat

Capitolul I. Condiţii suficiente de optimalitate de ordin II şi dualitate în optimizarea multiobiectiv 10

I.1 Noţiuni introductive

I.2 Condiţii suficiente de optimalitate de ordin I şi ordin II de tip Aghezzaf-Hachimi

I.3 Generalizarea dualităţii Mond-Weir

Capitolul II. Probleme multiobiectiv cu V-ρ-Invexitate şi optimizare interval 13

II.1 Preliminarii şi definiţii

II.2 Condiţii de optimalitate Karush-Kuhn-Tucker pentru (α^0, m_0) minim slab şi dualitate de tip Mond-Weir

II.3 Condiţii de optimalitate de ordin II în problemele de optimizare interval

Capitolul III. Condiţii de optimalitate şi dualitatea în cazul funcţiilor tip I generalizate de ordin doi 18

III.1 Clase de funcţii (F, α, ρ, p, d)-tip I de ordin doi

III.2 Dualitate de tip mixt Zhang-Mond

III.3 Dualitate inversă în sens strict de tip Mangasarian

Capitolul IV. Condiţii de optimalitate şi dualitate pentru funcţii obiectiv de tip fuzzy 20

IV.1 Optimizare de tip fuzzy

IV.2 Optimizare multiobiectiv cu funcții obiectiv de tip fuzzy în cazul invexității tip I generalizate

IV.3 Dualitatea optimizării neliniare cu funcții obiectiv de tip fuzzy în cazul condițiilor Karush-Kuhn-Tucker generalizate

Capitolul V. Funcții de ordin superior con pseudoconvex şi con quasiconvex în optimizarea multiobiectiv **27**

V.1 Notații şi definiții

V.2 Condiții de optimalitate de ordin superior de tip Suneja-Bhatia

V.3 Dualitate de ordin superior de tip Mond-Weir

V.4 Funcții de ordin superior F-con pseudoconvex şi F-con quasiconvex

Capitolul VI. Condiții de optimalitate şi dualitatea în optimizarea fracționară multiobiectiv semiinfinită **39**

VI.1 Noțiuni introductive

VI.2 Criterii suficiente generalizate a schemelor de partiție de tip Mond-Weir

VI.3 Modele duale în ipoteze de (F, ρ)-V-invexitate

Capitolul VII. Exemple **44**

Listă de lucrări **48**

Bibliografie **50**

Introducere

Motivare

Condițiile de optimalitate şi dualitatea ocupă un loc important în literatura de specialitate. Multe eforturi au pornit de la necesitatea şi/sau suficiența condițiilor de optimalitate de ordinul I. Cercetările ulterioare s-au concentrat pe optimalitatea condițiilor de ordinul-II în cazul unor probleme de optimizare matematică mai deosebite, fiind de remarcat în acest sens, printre altele, articolele următorilor autori B. Aghezzaf şi M. Hachimi ([4]-[9]), R. Andreani şi J. M. Martínez ([14]), A. Bătătorescu ([102]), M.S. Bazarra şi H.D. Sherali ([21]), C. Niculescu ([103]), M.A. Hanson şi B. Mond ([47]-[51]), V. Jeyakumar ([57]-[61]), H.W. Kuhn şi A.W. Tucker ([64]), O. L. Mangasarian ([73]-[74]), J.M. Martinez ([79]), V. Preda ([102]-[116]), S. K. Suneja ([130]-[131]), T. Weir ([136]-[137]), H-C. Wu ([139]-[140]), L. A. Zadeh ([143]) şi J. Zhang ([147]).

Această lucrare este dedicată studiului unor proprietăți privind:

- condițiile de optimalitate necesare şi suficiente de ordinul-II, folosind B. Aghezzaf şi M. Hachimi ([5]-[8]), M. A. Hanson şi B. Mond ([47]-[48]), R. N. Kaul, S. K. Suneja şi M. K. Srivastava ([62]), V. Preda ([114]-[116]) şi C. Singh ([123]);
- problemele multiobiectiv cu V-ρ-Invexitate şi optimizare interval, folosind V. Jeyakumar şi B. Mond ([57]-[60]), S. K. Mishra ([92]-[94]), C. Niculescu ([103]), V. Preda ([112]), L. Venkateswara Reddy şi R. N. Mukherjee ([133]), Hosseinzade şi Hassanpour ([54]), Ishibuchi şi Tanaka ([55]);
- condițiile de optimalitate şi dualitatea implicate de funcțiile tip I generalizate de ordin doi, folosind A. Bătătorescu ([102]), M. Hachimi şi B. Aghezzaf ([42]-[43]), V. Preda ([115]), N. G. Rueda şi M. A. Hanson ([119]);
- programarea multiobiectiv cu funcții obiectiv de tip fuzzy, folosind M. S. Bazarra, H. D. Sherali şi C.M. Shetty ([21]-[22]), J. R. Birge şi F. Louveaux ([28]), G. Haeser şi M. L. Schuverdt ([45]), I.M. Stancu-Minasian ([129]), S. Vajda ([132]), H-C. Wu ([140]);
- dualitatea (de tip Mond-Weir, de tip Wolfe) şi optimizarea neliniară cu funcții obiectiv de tip fuzzy, folosind T. Antczak ([17]), M. A. Hanson, R. Pini şi C.

Singh ([50]), B. Mond şi T. Weir ([96]), H. Slimani şi M. S. Radjef ([124]), S. Wang ([135]), L. A. Zadeh ([143]);

- funcțiile de ordin superior con pseudoconvex şi con quasiconvex, folosind C. R. Bector, S. Chandra şi I. Husain ([23]), M. Bhatia ([27]), H. W. Kuhn şi A. W. Tucker ([64]), O. L. Mangasarian ([74]), M. K. Srivastava şi M. G. Govil ([126]), S. K. Suneja, P. Louhan şi M. B. Grover ([131]).

Temele studiate sunt de actualitate contribuind la îmbunătățirea rezultatelor din domeniul optimizării matematice. Fiecare capitol conține elemente de noutate științifică, fiind o continuare a unor rezultate recente din domeniul optimizărilor.

Direcții principale

Principalele direcții urmărite în această lucrare sunt:

- necesitatea şi suficiența condițiilor de optimalitate de ordinul-II, folosind condiții de optimalitate de tip Aghezzaf-Hachimi ([4], [6]), condiții de optimalitate Karush-Kuhn-Tucker ([133]) şi dualitate de tip Mond-Weir ([8])
- condițiile de optimalitate şi dualitatea în cazul funcțiilor tip I de ordin doi, folosind funcții (F, α, ρ, p, d)-tip I de ordin doi ([42]), dualitate de tip Zhang-Mond ([43]) şi dualitate de tip Mangasarian ([74])
- optimalitatea Karush-Kuhn-Tucker cu funcții obiectiv de tip fuzzy ([140]), folosind condiții de optimalitate de ordin doi în probleme de tip fuzzy ([5])
- optimizarea multiobiectiv cu funcții obiectiv de tip fuzzy, folosind condiții de optimalitate de tip Hanson-Mond ([50])
- funcții de ordin superior con pseudoconvex şi con quasiconvex, folosind condiții de optimalitate de ordin superior de tip Suneja-Bhatia ([131]).

<u>Structura tezei de doctorat</u>

Primul capitol prezintă problemele de programare multiobiectiv neliniare cu inegalităţi de restricţie, aducând diferite îmbunătăţiri. Rezultatele reprezintă o generalizare a noţiunilor introduse de B. Aghezzaf şi M. Hachimi ([5], [6], [8]) şi V. Jeyakumar ([61]). Astfel, vom introduce câteva clase de funcţii neconvexe prin generalizarea unor definiţii referitoare la funcţiile invexe şi preinvexe. Mai mult, folosind rezultatele obţinute de R. Egudo ([37]), M.A. Hanson şi B. Mond ([47]), V. Preda ([114]-[116]), T. Weir şi B. Mond ([136]), **vom generaliza dualitatea şi dualitatea inversă în cazul problemelor de tip Mond-Weir. În plus, prin introducerea unor condiţii optimale suficiente adiţionale vom dezvolta proprietăţile optimale de ordin doi, rezultate cuprinse în [81], [83] şi L13**. Vom utiliza proprietăţile de convexitate slabă pentru a rafina condiţiile de optimalitate şi dualitatea prezentate în [62] şi [123].

În al doilea capitol vom trata câteva probleme constând din programe multiobiectiv compuse neomogene cu condiţii de tip invexitate-ρ-V. Rezultatele reprezintă o generalizare a noţiunilor prezentate de S.K. Mishra şi R.N. Mukherjee ([92]), S.K. Mishra ([94]), C. Niculescu ([103]), L. Venkateswara Reddy şi R.N. Mukherjee ([133]). În particular, vom generaliza teorema de optimalitate suficientă Karush-Kuhn-Tucker şi teoremele de dualitate pentru programele multiobiectiv compuse neomogene (cf. [33], [51]). De asemenea, **vom generaliza teorema fundamentală Lin ([69]) în cazul unei probleme de optimizare interval cu mulţimi tangente de ordinul doi. Apoi, pe baza generalizării de mai sus, vom obţine condiţii necesare şi suficiente de ordinul II pentru optimalitate, folosind proprietăţi de ρ-quasiconvexitate ale funcţiilor implicate. Rezultatele sunt cuprinse în lucrările [82], [84], [99] şi L14**. Wu ([141]-[142]) a stabilit condiţiile Karush-Kuhn-Tucker pentru probleme de optimizare cu funcţii obiectiv de tip valori-interval, în care conceptele de soluţii eficiente sunt definite prin intermediul a două relaţii de ordine pe clasa intervalelor închise iar condiţiile de regularitate sunt de tip Slater. De asemenea, Hosseinzade şi Hassanpour ([54]) au obţinut condiţii de optimalitate Karush-Kuhn-Tucker pentru optimizare cu valori interval, în cazul unor ipoteze de convexitate şi diferenţiabilitate. Cercetările referitoare la funcţiile invexe reprezintă teme de actualitate în literatura de specialitate. Pentru început aceste cercetări s-au concentrat asupra V-invexităţii problemelor de optimizare multiobiectiv diferenţiabile care conservă condiţiile optimale suficiente şi dualitatea rezultatelor şi apoi au continuat cu probleme de optimizare multiobiectiv neomogene, funcţii diferenţiabile ρ-invexe, condiţii suficiente şi teoreme duale pentru probleme de optimizare neliniare, relaţii între puncte şa şi optim, etc ([57], [61], [92], [112]).

În al treilea capitol vom extinde noţiunile referitoare la funcţiile de tip I şi vom demonstra câteva rezultate privind dualitatea de ordinul II folosind funcţii (F, α, ρ, p, d)-tip I, rezultate cuprinse în lucrările [87] şi [89]. Rezultatele reprezintă o dezvoltare a noţiunilor prezentate de A. Bătătorescu ([102]), M. Hachimi şi B. Aghezzaf ([4], [42], [43]) şi V. Preda ([115]). Conceptul de funcţii de tip I a fost introdus de Hanson şi Mond ([48]) în 1982 ca o generalizare a convexităţii. Apoi, în 1988, Rueda şi Hanson ([119]) au definit funcţiile pseudo-tip I şi quasi-tip I şi au obţinut condiţii optimale suficiente implicând aceste funcţii. Mai târziu, în 2000, Aghezzaf şi Hachimi ([4]) au introdus funcţiile de tip I generalizate pentru problemele de optimizare multiobiectiv şi au obţinut câteva rezultate de dualitate. Apoi, tot Aghezzaf şi Hachimi ([43]), în 2004, au definit funcţiile (F, α, ρ, d)-tip I generalizate reuşind să dezvolte câteva concepte legate de funcţiile de tip I, obţinând condiţii optimale suficiente şi caracterizând dualitatea problemelor de optimizare multiobiectiv.

În capitolul patru vom studia condiţii de optimalitate şi dualitate pentru problemele de optimizare multiobiectiv cu funcţii obiectiv de tip fuzzy. Rezultatele reprezintă o dezvoltare a noţiunilor introduse de M.S. Bazarra, H.D. Sherali şi C.M. Shetty ([21]), G. Haeser şi M.L. Schuverdt ([45]), M.A. Hanson şi B. Mond ([49]), R. Pini şi C. Singh ([101]), I.M. Stancu-Minasian ([129]) şi H-C. Wu ([140]). Conceptele de rezolvare sunt propuse prin definirea unei relaţii de ordine pe o clasa de numere fuzzy. Deoarece această relaţie de ordine poate fi relaţie de ordine parţială, ideile de rezolvare din acest capitol urmează o noţiune similară, numită soluţie optimă Pareto, folosită de J.R. Birge şi F. Louveaux ([28]), A. Prekopa ([117]) şi S. Vajda ([132]). Optimizarea de tip fuzzy reprezintă o temă importantă de cercetare în optimizarea multiobiectiv. Condiţiile de optimalitate Karush-Kuhn-Tucker pentru problemele de optimizare cu funcţii obiectiv de tip fuzzy au fost studiate de Wu ([139]) în 2007. **Vom dezvolta şi vom îmbunătăţi**

aceste concepte prin diferite tehnici folosite în problemele de optimizare multiobiectiv cu funcții obiectiv de tip fuzzy. Vom extinde invexitatea de tip I generalizată la un vector invexitate (V-tip I) în care funcțiile obiectiv sunt de tip fuzzy. Teoremele de dualitate slabă, tare, inversă sunt demonstrate în cazul V-invexității de tip I generalizate cu funcții obiectiv de tip fuzzy. Rezultatele sunt cuprinse în [85] şi [86]. Vom prezenta dualitatea optimizării neliniare cu funcții obiectiv de tip fuzzy în cazul condițiilor Karush-Kuhn-Tucker generalizate, folosind în general lucrările lui M.A. Hanson ([51]), A. Ben-Israel şi B. Mond ([25]), M.A. Hanson şi B. Mond ([48]), V. Jeyakumar ([61]), S.K. Mishra, S.Y. Wang şi K.K. Lai ([93]). **Vom introduce câteva concepte legate de KKT-invexitate, pseudo-invexitate-KKT slabă şi probleme de tip I în care fiecare funcție care apare în aceste programe neliniare este de tip fuzzy şi este considerată în raport cu o familie de funcții $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$, rezultate cuprinse în [88], [90] şi L15**. În concordanță cu aceste noțiuni vom formula două programe duale, de tip Wolfe şi Mond-Weir şi vom demonstra diferite teoreme de dualitate folosind ipotezele invexității generalizate, plecând de la rezultatele obținute de H.W. Kuhn şi A.W. Tucker ([64]), B. Mond şi T. Weir ([96]).

În capitolul cinci vom introduce noțiuni de ordin superior cu privire la funcțiile con pseudoconvex, con pseudoconvex strict, con quasiconvex şi con quasiconvex slab şi vom studia proprietățile existente între acestea. Rezultatele reprezintă o extindere a noțiunilor introduse de M. Bhatia ([27]), O.L. Mangasarian ([74]), S.K. Suneja, P. Louhan şi M.B. Grover ([131]). **Vom formula dualitatea de ordin superior de tip Mond-Weir generalizată şi vom stabili câteva rezultate de dualitate pe baza condițiilor tare de ordin superior aplicate pentru un con pseudoconvex şi con quasiconvex**, folosind în general lucrările lui B. Mond ([97]), R. Egudo şi M.A. Hanson ([36]), M.K. Srivastava şi M.G. Govil ([126]). Mangasarian ([12]) a considerat un program neliniar şi a studiat dualitatea de ordin doi şi de ordin superior. Recent Bhatia ([27]) a obținut condiții de optimalitate suficiente de ordin superior şi rezultate de dualitate pentru problemele de optimizare vectorială definite de funcțiile con convex de ordin superior. Kuhn şi Tucker ([64]) şi Geoffrion ([40]) au introdus conceptul de soluție eficientă proprie care a fost generalizat mai târziu de Borwein ([31]) şi Benson ([26]) sub formă de con. Plecând de la aceste rezultate **vom demonstra, în cadrul acestui capitol, rezultate de dualitate de**

ordin superior pentru conuri pseudoconvexe şi conuri quasiconvexe şi vom introduce condiții de regularitate pentru a obține rezultate mai tari de dualitate, rezultate cuprinse în lucrările [90], [91], L16 şi L17.

În capitolul şase vom stabili un set de condiții de optimalitate de tip Karush-Kuhn-Tucker şi relațiile de dualitate corespunzătoare, pentru problemele de optimizare multiobiectiv semiinfinite neconvexe şi neomogene, rezultate cuprinse în lucrările L18 şi L19. Câteva clase de probleme de optimizare multiobiectiv semiinfinite, bazate pe funcții diferențiabile, au fost studiate pe larg de mulți autori, din care amintim pe M. A. Hanson ([51]), V. Jeyakumar şi B. Mond, ([57]), Y. Sawaragi, H. Nakayama şi T. Tanino ([120]), G. J. Zalmai şi Q. Zhang ([145]). Problemele de acest tip sunt utilizate în numeroase modele de analiză şi interpretare din diferite domenii, cum ar fi: teoria aproximării, statistică, teoria jocurilor, probleme cu valori mărginite, geometrie, grafice aleatoare, analiză oscilatorie, teoria deciziei, programare semidefinită, control optimal, etc. Ele urmăresc două direcții importante, teoria dualității şi convexitatea generalizată, concepte care joacă un rol important în evoluția teoriei optimizării şi programării neliniare.

În capitolul şapte vom prezenta câteva exemple ce pun în evidență relațiile existente între diferite proprietăți privind funcțiile ρ-invexe, ρ-pseudoinvexe, ρ-slab pseudoinvexe, ρ-slab strict pseudoinvexe, ρ-tare pseudoinvexe, ρ-quasiinvexe, ρ-slab quasiinvexe, ρ-tare quasiinvexe. De asemenea sunt prezentate câteva exemple de probleme de optimizare multiobiectiv cu funcții obiectiv de tip fuzzy.

Mulțumiri

Doresc să mulțumesc domnului prof. dr. Vasile Preda pentru sprijinul acordat, pentru numeroasele discuții şi sfaturi fără de care această lucrare nu ar fi putut fi elaborată. De asemenea doresc să mulțumesc tuturor celor care s-au implicat cu multă competență în pregătirea tezei de doctorat, în comisiile de evaluare şi de analiză ale examenelor şi referatelor prevăzute în planul de pregătire individuală sau ca membri în comisia de susținere publică a tezei de doctorat.

În final, aş dori să mulțumesc soției şi părinților pentru înțelegere şi sprijinul acordat.

Notații și convenții.

În această lucrare vom folosi următoarele notații și convenții de scriere:

- $(\,\cdot\,)^t$ reprezintă vectorul transpus sau matricea transpusă.
- Pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ din R^n, convenim:

$$x = y \Leftrightarrow x_i = y_i, \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$x \leqq y \Leftrightarrow x_i \leqq y_i, \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$x \leq y \Leftrightarrow x \leqq y \quad \text{și} \quad x \neq y;$$

$$x < y \Leftrightarrow x_i < y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- $R_+ = \{t \in R \mid t \geqq 0\}$.
- $e = (1, 1, \ldots, 1)^t \in R^n$.
- Dacă $h = (h_1, \ldots, h_m) : R^n \to R^m$ este diferențiabilă, vom nota $\nabla h = (\nabla h_1, \ldots, \nabla h_m)$.
- Dacă $v = (v_1, \ldots, v_p) \in R^p$, vom nota $v_+ = (\max\{v_1, 0\}, \ldots, \max\{v_p, 0\})^t$.
- Dacă $v = (v_1, \ldots, v_p) \in R^p$, vom nota $v_- = (\min\{v_1, 0\}, \ldots, \min\{v_p, 0\})^t$.
- $\|\cdot\|_2$ reprezintă norma Euclidiană.
- $<\cdot\,, \cdot>$ reprezintă produsul scalar Euclidian.
- $d(\cdot\,, \cdot)$ reprezintă funcția distanță $d : R^n \times R^n \to R_+$, $d(x, y) = \| x - y \|_2$.
- Pentru $D \subseteq M$ vom nota cu D^c complementara lui D relativ la mulțimea M.
- Pentru $X \subseteq R^n$ vom nota cu X^* spațiul dual topologic.
- Pentru un con convex închis $C \subseteq R^n$ vom nota cu C^+ conul dual al lui C, adică mulțimea $C^+ = \{ y^* \in R^n \,/\, <y^*, y> \geqq 0, \ \forall y \in C\}$.

I. Condiții suficiente de optimalitate de ordin II şi dualitate în optimizarea multiobiectiv

Considerăm următoarea problemă de optimizare multiobiectiv:

$$\min f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \qquad \text{(MOP)}$$

$$g(x) \leqq 0, \qquad (1.1)$$

$$x \in X,$$

unde X este mulțime deschisă, $X \subseteq R^n$, $f : X \to R^p$ şi $g = (g_1, \dots, g_m) : X \to R^m$ sunt aplicații diferențiabile.

Fie $A = \{x \in X, g(x) \leqq 0\}$, $I = \{j : g_j(\bar{x}) = 0\}$, unde $\bar{x} \in A$, card $I = |I| = \ell$,

$P = \{1, \dots, p\}$, $M = \{1, \dots, m\}$,

$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_p)^t \in R^p$, $\eta : X \times X \to R^n$ şi $d(\cdot, \cdot) : X \times X \to R_+$.

Extindem conceptele Aghezzaf-Hachimi la concepte de tip (Φ, r)-invexitate, introduse de Caristi-Ştefănescu-Ferrara ([30]).

Considerăm o aplicație $\Phi(\cdot, \cdot ; \cdot,\cdot) : R^n \times R^n \times R^n \times R \to R$, $\Phi(x, \bar{x}; \cdot,\cdot)$ convexă, cu proprietatea că $\Phi(x, \bar{x}; (0, \alpha)) \geqq 0$, pentru $\alpha \geqq 0$, în raport cu care vom studia următoarele definiții şi proprietăți de invexitate.

Vom nota $\Phi^p(x, \bar{x}; (\nabla f(\bar{x}), \rho)) = (\Phi(x, \bar{x}; (\nabla f_1(\bar{x}), \rho_1)), \dots, \Phi(x, \bar{x}; (\nabla f_p(\bar{x}), \rho_p)))$.

Teorema 1.2.1 *Presupunem că există o soluție admisibilă $\bar{x} \in A$ pentru problema de optimizare (MOP) şi vectorii $\bar{u} > 0$ şi $\bar{v} \geqq 0$ astfel încât:*

i) $\bar{u}^t \nabla f(\bar{x}) + \bar{v}^t \nabla g_I(\bar{x}) = 0$;

ii) f este (Φ^p, ρ^0)-tare pseudoinvexă în $\bar{x} \in A$;

iii) g_I este (Φ^1, ρ)-quasiinvexă în $\bar{x} \in A$;

iv) $\bar{u}^t \rho^0 + \bar{v}^t \rho \geqq 0$.

Atunci $\bar{x}$ este minim Pareto (slab) pentru problema (MOP).

În continuare, vom folosi noțiuni referitoare la aplicațiile vectoriale (Φ^p, ρ^0)-slab quasiinvexe şi (Φ^p, ρ^0)-slab pseudoinvexe.

Teorema 1.2.4 *Presupunem că există o soluție admisibilă $\bar{x} \in A$ pentru problema de optimizare (MOP) şi vectorii $\bar{u} \geqq 0$ şi $\bar{v} > 0$ astfel încât:*

i) $\bar{u}^t \nabla f(\bar{x}) + \bar{v}^t \nabla g_I(\bar{x}) = 0$;

ii) f este (Φ^p, ρ^0)-slab quasiinvexă în $\bar{x} \in A$;

iii) g_I *este (Φ^1, ρ)-tare quasiinvexă în $\bar{x} \in A$;*

iv) $\bar{u}^t \rho^0 + \bar{v}^t \rho \geqq 0$.

Atunci $\bar{x}$ este minim Pareto (slab) pentru problema (MOP).

Teorema 1.2.5 *Presupunem că există o soluție admisibilă $\bar{x} \in A$ pentru problema de optimizare (MOP) şi vectorii $\bar{u} > 0$ şi $\bar{v} \geqq 0$ astfel încât:*

i) $\bar{u}^t \nabla f(\bar{x}) + \bar{v}^t \nabla g_I(\bar{x}) = 0$;

ii) f este (Φ^p, ρ^0)-slab pseudoinvexă în $\bar{x} \in A$;

iii) g_I *este (Φ^1, ρ)-quasiinvexă în $\bar{x} \in A$;*

iv) $\bar{u}^t \rho^0 + \bar{v}^t \rho \geqq 0$.

Atunci $\bar{x}$ este minim Pareto slab pentru problema (MOP).

În continuare, vom discuta câteva proprietăți referitoare la condițiile optimale suficiente de ordinul II. Pentru aceasta vom presupune că toate funcțiile sunt diferențiabile de ordin doi iar pentru orice $\bar{x} \in A$ vom nota

$$C = \{y \in R^n / \nabla f(\bar{x})y \leqq 0,\ \nabla f_i(\bar{x})y = 0, \text{ pentru cel puțin un indice } i,\ \nabla g_I(\bar{x})y \leqq 0\} \quad (1.2)$$

mulțimea direcțiilor critice în punctul $\bar{x} \in A$. Avem următoarele teoreme.

Teorema 1.2.6 *Presupunem că există o soluție admisibilă $\bar{x} \in A$ pentru problema de optimizare (MOP) şi vectorii $\bar{u} \in R^p$, $\bar{u} \geq 0$ şi $\bar{v} \in R^\ell$, $\bar{v} \geqq 0$ astfel încât:*

i) $\bar{u}^t \nabla f(\bar{x}) + \bar{v}^t \nabla g_I(\bar{x}) = 0$;

ii) $\left(\sum_{i=1}^{p} \bar{u}_i \nabla^2 f_i(\bar{x}) + \sum_{j \in I} \bar{v}_j \nabla^2 g_j(\bar{x})\right)(y, y) > 0, \quad \forall\ y \neq 0$ *direcție critică;*

iii) f este ρ^0-prequasiinvexă în $\bar{x}$, în raport cu η şi diferenţiabilă de ordin doi în $\bar{x}$;

iv) g_I este ρ-prequasiinvexă în $\bar{x}$, în raport cu η ($\eta(x,y) \neq 0$, pentru $x \neq y$) şi diferenţiabilă de ordin doi în $\bar{x}$;

v) $\bar{u}^t \rho^0 + \bar{v}^t \rho \geqq 0$;

vi) $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{d(\bar{x}+ty, \bar{x})}{t} \in R_+$.

Atunci $\bar{x}$ este minim Pareto (slab) pentru problema (MOP).

Teorema 1.2.7 *Presupunem că există o soluţie admisibilă $\bar{x} \in A$ pentru problema de optimizare (MOP) şi vectorii $\bar{u} \in R^p$, $\bar{u} \geq 0$ şi $\bar{v} \in R^\ell$, $\bar{v} \geqq 0$ astfel încât:*

i) $\bar{u}^t \nabla f(\bar{x}) + \bar{v}^t \nabla g_I(\bar{x}) = 0$;

ii) $\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \bar{u}_i \nabla^2 f_i(\bar{x}) + \sum\limits_{j \in I} \bar{v}_j \nabla^2 g_j(\bar{x})\right)(y, y) > 0$, *$\forall y \neq 0$ direcţie critică;*

iii) f este ρ^0-slab prequasiinvexă în $\bar{x}$, în raport cu η şi diferenţiabilă de ordin doi în $\bar{x}$;

iv) g_I este ρ-prequasiinvexă în $\bar{x}$, în raport cu η ($\eta(x,y) \neq 0$, pentru $x \neq y$) şi diferenţiabilă de ordin doi în $\bar{x}$;

v) $\bar{u}^t \rho^0 + \bar{v}^t \rho \geqq 0$;

vi) $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{d(\bar{x}+ty, \bar{x})}{t} \in R_+$.

Atunci $\bar{x}$ este minim Pareto (slab) pentru problema (MOP).

Considerăm următoarea problemă generalizată, de tip dual Mond-Weir ([136]):

$$\max\ (f(y) + v_{J_0}^t\, g_{J_0}(y)e)$$

$$(\nabla f(y))^t u + (\nabla g(y))^t v = 0, \tag{1.3}$$

$$v_{J_k}^t\, g_{J_k}(y) \geqq 0, \quad k = \overline{1,r} \qquad \text{(DMOP)}$$

$$v \geqq 0, \quad u \geqq 0, \quad u^t e = 1,$$

unde $e = (1, 1, \ldots, 1)^t \in R^p$, $r \geqq 1$, $J_s \cap J_t = \emptyset$ pentru $s \neq t$ şi $\bigcup\limits_{s=0}^{r} J_s = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Teorema 1.3.1 *Fie x o soluție admisibilă pentru problema de optimizare (MOP) şi (y, u, v) o soluție admisibilă pentru (DMOP). Dacă are loc una din următoarele proprietăți:*

a) $u > 0$, $f(\cdot) + v_{J_0}^t g_{J_0}(\cdot)e$ *este* (Φ^p, ρ^0)*-tare pseudoinvexă în y,* $v_{J_k}^t g_{J_k}(\cdot)$ *este* (Φ, ρ_k)*-quasiinvexă în y,* $k = \overline{1,r}$, $u^t \rho^0 + \sum_{k=1}^{r} \rho_k \geqq 0$;

b) $u \geq 0$, $f(\cdot) + v_{J_0}^t g_{J_0}(\cdot)e$ *este* (Φ^p, ρ^0)*-slab strict pseudoinvexă în y,* $v_{J_k}^t g_{J_k}(\cdot)$ *este* (Φ, ρ_k)*-quasiinvexă în y,* $k = \overline{1,r}$, $u^t \rho^0 + \sum_{k=1}^{r} \rho_k \geqq 0$;

c) $f(\cdot) + v_{J_0}^t g_{J_0}(\cdot)e$ *este* (Φ^p, ρ^0)*-slab quasiinvexă în y,* $v_{J_k}^t g_{J_k}(\cdot)$ *este* (Φ, ρ_k)*-strict pseudoinvexă în y,* $k = \overline{1,r}$, $u^t \rho^0 + \sum_{k=1}^{r} \rho_k \geqq 0$;

atunci $f(x) \nleq f(y) + v_{J_0}^t g_{J_0}(y)e$.

II. Probleme multiobiectiv cu V-ρ-Invexitate şi optimizare interval

Considerăm următoarea problemă de programare multiobiectiv compusă (CP):

$$\min \left(f_1(F_1(x)),\ f_2(F_2(x)),\ \dots,\ f_p(F_p(x)) \right)$$
$$g_j(G_j(x)) \leqq 0, \qquad j = 1, 2, \dots, m \qquad \text{(CP)}$$
$$x \in C,$$

unde C este o submulțime convexă a unui spațiu Banach X, f_i, g_j (i = 1, 2, ... , p; j = 1, 2, … , m) sunt funcții reale definite pe R^n, local Lipschitz iar F_i şi G_j sunt funcții local Lipschitz şi diferențiabile, definite pe X cu valori în R^n, respectiv.

Presupunem că mulțimea admisibilă este dată de:

$$E = \{x \in R^n :\ g_j(G_j(x)) \leqq 0,\ j = 1, 2, \dots, m\}. \qquad (2.1)$$

Pentru început vom generaliza condițiile suficiente Karush-Kuhn-Tucker corespunzătoare unui (α^0 , m_0) minim slab pentru problema (CP).

Teorema 2.2.1 *Fie (u, τ, λ)∈* $R^n \times R^p \times R^m$ *ce satisfac condițiile Karush-Kuhn-Tucker următoare:*

$$0 \in \sum_{i=1}^{p} \tau_i \ \partial^0 f_i(F_i(u))F_i'(u) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \ \partial^0 g_j(G_j(u))G_j'(u),$$

$$g_j(G_j(x)) \leqq 0 \ \text{și} \ \lambda_j \ g_j(G_j(u)) = 0, \ j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\tau_i \geqq 0, \ i = 1, 2, \dots, p, \ \tau^t e > 0, \ \lambda_j \geqq 0, \ j = 1, 2, \dots, m.$$

Dacă f(F) este V-(Φ, ρ)-*invexă și g(G) este* V-(Φ, σ)-*invexă iar* $\sum_{i=1}^{p} \tau_i \rho_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sigma_j \geqq 0,$

atunci u este (α^0 *,* m_0 *) minim slab pentru problema (CP).*

În continuare, vom demonstra câteva rezultate de dualitate între problema (CP) și următoarea problemă duală (GD), de tip Mond-Weir, pentru problema (CP):

$$\max\Big(f_1(F_1(u)) + \sum_{j \in J_0} \lambda_j g_j(G_j(u)), f_2(F_2(u)) + \sum_{j \in J_0} \lambda_j g_j(G_j(u)), \dots, f_p(F_p(u)) + \sum_{j \in J_0} \lambda_j g_j(G_j(u))\Big)$$

cu restricțiile $\quad 0 \in \sum_{i=1}^{p} \tau_i \ \partial^0 f_i(F_i(u))F_i'(u) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \ \partial^0 g_j(G_j(u))G_j'(u),$

$$\lambda_{J_k} g_{J_k}(G_{J_k}(u)) \geqq 0, \quad k = 1, 2, \dots, r, \qquad \text{(GD)}$$

$$u \in X, \ \tau \in R^p, \ \tau_i \geqq 0, \ i = 1, 2, \dots, p, \ \tau^t e = 1,$$

$$\lambda_j \geqq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

unde $r \geqq 1$, $J_s \cap J_t = \varnothing$ pentru $s \neq t$ și $\bigcup_{s=0}^{r} J_s = \{1, 2, \dots, m\}$.

Teorema 2.2.2 (Dualitatea Slabă). *Fie x o soluție admisibilă pentru problema (CP) și (u, τ, λ) o soluție admisibilă pentru problema (GD). Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiții:*

(i) $f_i(F_i(\cdot)) + \sum_{j \in J_0} \lambda_j g_j(G_j(\cdot))$ *este V-(Φ,* ρ_i *)-invexă, i = 1, 2, ... , p;*

(ii) $g_j(G_j(\cdot))$ *este V-(Φ,* σ_j*)-invexă pentru* $j \notin J_0$*;*

(iii) $\sum_{i=1}^{p} \tau_i \rho_i + \sum_{j \notin J_0} \lambda_j \sigma_j \geqq 0$ *.*

Atunci $f(F(x)) + e \sum_{j \in J_0} \lambda_j g_j(G_j(x)) \not< f(F(u)) + e \sum_{j \in J_0} \lambda_j g_j(G_j(u))$.

Teorema 2.2.3 (Dualitatea Tare). *Fie* $\overline{x}$ *un (*α^0*,* m_0*) minim slab pentru problema (CP) ce verifică condițiile de restricție. Atunci există* $\overline{\tau} \in R^p$ *și* $\overline{\lambda} \in R^m$ *astfel încât (*$\overline{x}, \overline{\tau}, \overline{\lambda}$*) să fie soluție admisibilă pentru problema (GD). Dacă, în plus, sunt îndeplinite condițiile din Teorema 2.2.2 atunci (*$\overline{x}, \overline{\tau}, \overline{\lambda}$*) este (*$\alpha^0$*,* m_0*) maxim slab pentru problema (GD).*

Fie R^n spațiul Euclidian n-dimensional, $x = (x_1, \dots, x_n)^t$, $y = (y_1, \dots, y_n)^t \in R^n$ (unde $(\cdot)^t$ reprezintă vectorul transpus).

Vom nota produsul scalar al lui x cu y prin: $x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Pentru $x = (x_1, x_2)^t$, $y = (y_1, y_2)^t \in R^2$, vom folosi următoarele convenții de ordine lexicografică:

$$x \leqq_{lex} y \iff x_1 < y_1 \text{ sau } x_1 = y_1 \text{ şi } x_2 \leqq y_2,$$

$$x <_{lex} y \iff x_1 < y_1 \text{ sau } x_1 = y_1 \text{ şi } x_2 < y_2.$$

Vom nota clasa intervalelor închise şi mărginite din R prin: *CBI*(R).

Fie $A = [a^L, a^U]$, $B = [b^L, b^U] \in$ *CBI*(R). Vom spune că A este mai mic sau egal decât B şi vom scrie $A \preceq B \iff a^L \leqq b^L$ şi $a^U \leqq b^U$. Vom spune că A este mai mic decât B şi vom scrie $A \prec B \iff A \preceq B$ şi $A \neq B$. Echivalent,

$$A \prec B \iff \begin{cases} a^L < b^L \\ a^U \leqq b^U \end{cases}, \text{ sau } \begin{cases} a^L \leqq b^L \\ a^U < b^U \end{cases}, \text{ sau } \begin{cases} a^L < b^L \\ a^U < b^U \end{cases}.$$

O funcție $f_0 : R^n \to$ *CBI*(R) se numeşte funcție cu valori-interval. În acest caz $f_0(x) = [f_0^L(x), f_0^U(x)]$ cu $f_0^L, f_0^U : R^n \to R$, $f_0^L(x) \leqq f_0^U(x)$, $\forall x \in R^n$.

Fie $w: R^n \to R$ o funcție diferențiabilă de ordin doi și $y \in R^n$. Vom nota $\nabla^2 w(x)(y,y) = y^T \nabla^2 w(x) y$, unde $\nabla^2 w(x)$ reprezintă matricea Hessian a funcției w în $x \in R^n$.

În continuare, vom considera următoarea problemă de optimizare interval:

$$\text{(IP)} \qquad \min\ f_0(x),$$

$$\text{dată de} \quad x \in X_0 = \{x \in R^n / f(x) \leqq 0,\ h(x) = 0\},$$

unde $f_0 : R^n \to CBI(R)$ este o funcție cu valori-interval iar $f_0^L, f_0^U : R^n \to R$, $f : R^n \to R^m$, $h : R^n \to R^q$ sunt funcții diferențiabile de ordin doi.

Observația 2.3.9 Condiții de regularitate de ordinul II:

- Vom spune că X_0 satisface condiția de regularitate de ordinul II Abadie (ACQ) în punctul $\overline{x} \in X_0$ dacă:

$$CL_2 \subseteq CT_2(X_0, \overline{x}).$$

Consecință: Condiția suficientă pentru eficiență este determinată de faptul că următorul sistem nu are soluții y nenule:

$$\nabla f_0^\alpha(\overline{x})^T y \leqq 0,\ \alpha \in \{L, U\},$$

$$\nabla f_{M(\overline{x})}(\overline{x})^T y \leqq 0,$$

$$\nabla h(\overline{x})^T y = 0.$$

- Condiția de tip Kuhn-Tucker pentru eficiență este echivalentă cu incompatibilitatea următorului sistem:

$$\nabla f_0^\alpha(\overline{x})^T y < 0,\ \alpha \in \{L, U\}, \tag{2.8}$$

$$\nabla f_{M(\overline{x})}(\overline{x})^T y \leqq 0, \tag{2.9}$$

$$\nabla h(\overline{x})^T y = 0. \tag{2.10}$$

În continuare, vom folosi următoarele notații:

$$A^\alpha(y,z) = \left(\nabla f_{0i}^\alpha(\overline{x})^T y,\ \nabla f_{0i}^\alpha(\overline{x})^T z + \nabla^2 f_{0i}^\alpha(\overline{x})(y,y)\right)^t,\ \alpha \in \{L, U\},$$

$$B_j(y,z) = \left(\nabla f_j(\overline{x})^T y,\ \nabla f_j(\overline{x})^T z + \nabla^2 f_j(\overline{x})(y,y)\right)^t,$$

$$C_k(y,z) = \left(\nabla h_k(\overline{x})^T y,\ \nabla h_k(\overline{x})^T z + \nabla^2 h_k(\overline{x})(y,y)\right)^t.$$

Utilizând teorema fundamentală Lin ([69]), vom introduce o proprietate asemănătoare pentru o problemă de optimizare interval.

Teorema 2.3.11 *Dacă* $\overline{x} \in X_0$ *este o soluție (slab) eficientă pentru problema de optimizare interval (IP), atunci*

$$CT_1\left(\begin{pmatrix} f_0^L \\ f_0^U \end{pmatrix}(X_0), \begin{pmatrix} f_0^L \\ f_0^U \end{pmatrix}(\overline{x})\right) \cap \operatorname{int} R_-^2 = \varnothing,$$

unde $R_-^2 = \{x \in R^2 \, / \, x_i < 0,\ i \in \{1, 2\}\}$.

Următoarea teoremă este un rezultat analog pentru problema de optimizare interval (IP), ce foloseşte teorema fundamentală Lin generalizată ([5]).

Teorema 2.3.12 *Dacă* $\overline{x} \in X_0$ *este o soluție eficientă pentru problema de optimizare interval (IP), atunci*

$$CT_2\left(\begin{pmatrix} f_0^L \\ f_0^U \end{pmatrix}(X_0), \begin{pmatrix} f_0^L \\ f_0^U \end{pmatrix}(\overline{x})\right) \cap \Omega = \varnothing,$$

unde $\Omega = \{(y, z) \in R^2 \times R^2 \, / \, (y_i, z_i)^t <_{lex} (0, 0)^t,\ \forall i \in \{1, 2\}\}$.

Lema 2.3.14 *Fie* $\overline{x} \in X_0$. *Atunci avem*:

$$\bigcap_{\alpha \in \{L, U\}} CT_2(M^\alpha, \overline{x}) \subseteq CL_2(M, \overline{x}).$$

Observația 2.3.15 Vom spune că $\overline{x} \in X_0$ satisface condiția de regularitate de ordinul II Abadie generalizată (GASORC), dacă:

$$CL_2(M, \overline{x}) \subseteq \bigcap_{\alpha \in \{L, U\}} CT_2(M^\alpha, \overline{x}).$$

În continuare, vom prezenta forma primară şi forma duală a condițiilor necesare de ordinul II.

Teorema 2.3.16 (Forma primară). *Fie* $\overline{x} \in X_0$ *o soluție eficientă pentru problema de optimizare interval (IP) care îndeplineşte condiția de regularitate de ordinul II Abadie (ACQ). Atunci, următorul sistem nu are soluție de forma* (y, z):

$$A^\alpha(y, z) <_{lex} 0,\ \forall \alpha \in \{L, U\},$$

$$B_j(y, z) \leqq_{lex} 0, \ \forall j \in M(\overline{x}),$$

$$C_k(y, z) = 0, \ \forall k.$$

Teorema 2.3.20 (Forma duală). *Fie* $\overline{x}$ *un punct care îndeplineşte condiţiile din Teorema 2.3.12. Atunci pentru orice direcţie critică y, există multiplicatorii* $\lambda^\alpha \in R$, $\alpha \in \{L, U\}$, $\mu \in R^m$, $\nu \in R^q$ *astfel încât*

$$\sum_{\alpha \in \{L, U\}} \lambda^\alpha \nabla f_0^\alpha(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla f_j(\overline{x}) + \sum_{k=1}^{q} \nu_k \nabla h_k(\overline{x}) = 0,$$

$$\left(\sum_{\alpha \in \{L, U\}} \lambda^\alpha \nabla^2 f_0^\alpha(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla^2 f_j(\overline{x}) + \sum_{k=1}^{q} \nu_k \nabla^2 h_k(\overline{x}) \right)(y, y) \geqq 0,$$

$$\lambda^\alpha > 0, \ \alpha \in \{L, U\}, \ \mu \geqq 0, \ \mu_j = 0, \ \forall j \notin E(y),$$

unde $E(y) = \{j = \overline{1,m} \ / \ f_j(\overline{x}) = 0, \ \nabla f_j(\overline{x})^T y = 0\}$.

III. Condiţii de optimalitate şi dualitatea în cazul funcţiilor tip I generalizate de ordin doi

Considerăm următoarea problemă de optimizare multiobiectiv:

$$\min f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \qquad \text{(MOP)}$$

$$x \in A = \{x \in X \ / \ g(x) \leqq 0\},$$

unde $X \subseteq R^n$ este mulţime deschisă iar $f : X \to R^m$ şi $g : X \to R^w$ sunt funcţii diferenţiabile.

Fie $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $W = \{1, 2, \dots, w\}$ şi

$$\nu \geqq 1, \ J_s \cap J_t = \varnothing \ \text{ pentru } \ s \neq t \ \text{ şi } \ \bigcup_{s=0}^{\nu} J_s = \{1, 2, \dots, w\}.$$

Vom introduce un nou concept numit funcţie q-subliniară.

Definiţia 3.1.1 *O funcţie* $F : X \times X \times R^n \to R$ *se numeşte q-subliniară dacă:*

$$F(x, y; \sum_{i=1}^{k} a_i) \leqq \max_{i=\overline{1,k}} F(x, y; a_i), \quad \forall x, y \in X, \ a_i \in R^n, \ i \in \overline{1,k}, \ k \in N^*$$

şi $\quad F(x, y; \alpha a) = \alpha F(x, y; a), \quad \forall \alpha \in R, \ \alpha \geqq 0, \ \forall a \in R^n$.

În continuare, vom considera F o funcție q-subliniară şi să presupunem că funcțiile $f = (f_1, \dots, f_m) : X \to R^m$ şi $h = (h_1, \dots, h_r) : X \to R^r$ sunt diferențiabile de ordin doi.

Fie $\rho = (\rho^1, \rho^2)$, unde $\rho^1 = (\rho_1, \dots, \rho_m) \in R^m$, $\rho^2 = (\rho_{m+1}, \dots, \rho_{m+r}) \in R^r$, $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$, unde $\alpha^1 : X \times X \to R_+^*$, $\alpha^2 : X \times X \to R_+^*$ şi $d(\cdot, \cdot) : X \times X \to R_+$.

Vom extinde rezultatele privind dualitatea de tip mixt, folosind noțiunea de funcție q-subliniară. Considerăm următoarea problemă duală de tip mixt pentru problema (MOP):

$$\begin{aligned} &\max\ f(y) + v_{J_0} g_{J_0}(y)e - \frac{1}{2} p \nabla^2 [f(y) + v_{J_0} g_{J_0}(y)e]p, \\ &u\nabla f(y) + u\nabla^2 f(y)p + v\nabla g(y) + v\nabla^2 g(y)p = 0, \\ &v_{J_k} g_{J_k}(y) - \frac{1}{2} p \nabla^2 v_{J_k} g_{J_k}(y)p \geqq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \nu, \\ &v \geqq 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(XMOP)} \\ &u \geqq 0, \quad u^t e = 1, \end{aligned}$$

unde $\nu \geqq 1$, $J_s \cap J_t = \varnothing$ pentru $s \neq t$ şi $\bigcup_{s=0}^{\nu} J_s = \{1, 2, \dots, w\} = W$.

Teorema 3.2.2 (Dualitatea Slabă). *Dacă pentru orice soluție admisibilă x a problemei (MOP) şi orice soluție admisibilă (y, u, v, p), $y \neq x$, a problemei (XMOP), are loc una din următoarele proprietăți:*

(a) $u > 0$ şi $(f(\cdot) + v_{J_0} g_{J_0}(\cdot)e, v_{J_k} g_{J_k}(\cdot))$, $k = \overline{1,\nu}$, este slab strict pseudoquasi (F, α, ρ, p, d) - tip I de ordinul II în y, cu $\rho^0 > 0$, $\rho^k > 0$, $k = \overline{1,\nu}$,

(b) $(uf(\cdot) + v_{J_0} g_{J_0}(\cdot), v_{J_k} g_{J_k}(\cdot))$, $k = \overline{1,\nu}$, este strict pseudoquasi (F, α, ρ, p, d) - tip I de ordinul II în y, cu $\rho^0 > 0$, $\rho^k > 0$, $k = \overline{1,\nu}$,

(c) $u > 0$ şi $(f(\cdot) + v_{J_0} g_{J_0}(\cdot)e, v_{J_k} g_{J_k}(\cdot))$, $k = \overline{1,\nu}$, este slab quasisemi-pseudo (F, α, ρ, p, d) - tip I de ordinul II în y, cu $\rho^0 > 0$, $\rho^k > 0$, $k = \overline{1,\nu}$,

(d) $(uf(\cdot) + v_{J_0} g_{J_0}(\cdot), v_{J_k} g_{J_k}(\cdot))$, $k = \overline{1,\nu}$, este quasistrict-pseudo (F, α, ρ, p, d)- tip I de ordinul II în y, cu $\rho^0 > 0$, $\rho^k > 0$, $k = \overline{1,\nu}$,

atunci $f(x) \nleq f(y) + v_{J_0} g_{J_0}(y)e - \frac{1}{2} p \nabla^2 [f(y) + v_{J_0} g_{J_0}(y)e]p$.

Teorema 3.3.3 (Dualitatea Strict Inversă). *Fie* $\overline{x}$ *o soluție admisibilă pentru problema (MOP) şi (* $\overline{y}$, $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{p}$ *) o soluție admisibilă pentru problema (XMOP) astfel încât*

$$f(\overline{x}) \leqq f(\overline{y}) + \overline{v}_{J_0} g_{J_0}(\overline{y})e - \frac{1}{2}\overline{p}\,\nabla^2[f(\overline{y}) + \overline{v}_{J_0} g_{J_0}(\overline{y})e]\overline{p} \leqq f(\overline{y}).$$

Dacă sunt îndeplinite condițiile din Teorema 3.2.1 sau Teorema 3.2.2, atunci $\overline{x}$ *este soluție eficientă pentru problema (MOP).*

IV. Condiții de optimalitate şi dualitate pentru funcții obiectiv de tip fuzzy

Considerăm problema de optimizare

$$\text{Min } f(x) = f(x_1, \ldots, x_n), \text{ cu } x \in X_0, \qquad (P_1) \qquad (4.1)$$

unde

$$X_0 = \{x \in X \mid h(x) = 0, g(x) \leqq 0\}, \quad X \subseteq R^n, \text{ X mulțime deschisă,}$$

$f : R^n \to \mathbf{R}$, $h : R^n \to R^m$, $h = (h_1, \ldots, h_m)$ şi $g : R^n \to R^p$, $g = (g_1, \ldots, g_p)$ sunt funcții diferențiabile pe X.

Corespunzător problemei (P_1), vom considera problema de optimizare multiobiectiv de tip fuzzy:

$$\text{Min } \tilde{f}(x) = (\tilde{f}^{(1)}(x), \ldots, \tilde{f}^{(r)}(x)), \text{ cu } x \in X_0, \qquad (P_2)$$

unde

$$X_0 = \{x \in X \mid h(x) = 0, g(x) \leqq 0\}, \quad X \subseteq R^n, \text{ X mulțime deschisă,}$$

$h : R^n \to R^m$, $g : R^n \to R^p$ iar fiecare funcție obiectiv $\tilde{f}^{(k)}$, k = 1, … , r este de tip fuzzy.

Fie $x^* \in X_0$ şi $E = \{j \in \{1, 2, \ldots, p\} \,/\, g_j(x^*) = 0\}$.

Teorema 4.1.14 *Fie* X_0 = $\{x \in X \mid h(x) = 0, g(x) \leqq 0\}$ *o mulțime admisibilă pentru problema* (P_2) *şi un punct* $x^* \in X_0$. *Presupunem că funcțiile de restricție* $h_i : R^n \to R$, *i =1, … , m, sunt quasiliniare şi diferențiabile de ordin doi în* x^*, $g_j : R^n \to R$, *j = 1,…, p sunt quasiconvexe şi diferențiabile de ordin doi în* x^* *iar funcțiile obiectiv de tip fuzzy*

$\tilde{f}^{(k)}$*:* $R^n \to \mathcal{F}_c(R)$ *sunt quasiconvexe şi diferenţiabile de ordin doi în* x^**, pentru k = 1,… , r. Dacă pentru orice direcţie critică* $y \neq 0$ *există funcţiile reale cu valori pozitive* λ_k *definite pe [0, 1], pentru k = 1,…, r, funcţiile reale cu valori nenegative* μ_j*, j = 1,…, p şi funcţiile reale* δ_i*, i = 1, … , m, definite pe [0, 1], astfel încât*

$$(i)\ \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(\alpha)\cdot[\nabla(\tilde{f}^{(k)})^L_\alpha(x^*)+\nabla(\tilde{f}^{(k)})^U_\alpha(x^*)]+\sum_{i=1}^{m}\delta_i(\alpha)\cdot\nabla h_i(x^*)+$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\mu_j(\alpha)\cdot\nabla g_j(x^*)=0, \quad \textit{pentru orice } \alpha\in[0,1];$$

$$(ii)\ (\sum_{k=1}^{r}\lambda_k(\alpha)\cdot[\nabla^2(\tilde{f}^{(k)})^L_\alpha(x^*)+\nabla^2(\tilde{f}^{(k)})^U_\alpha(x^*)]+\sum_{i=1}^{m}\delta_i(\alpha)\cdot\nabla^2 h_i(x^*)+$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\mu_j(\alpha)\cdot\nabla^2 g_j(x^*))(y,y)>0, \quad \textit{pentru orice } \alpha\in[0,1],$$

atunci x^* *este soluţie optimă Pareto pentru problema (*P_2*).*

În continuare, vom dezvolta invexitatea de tip I generalizată la un vector invexitate (V-tip I) în care funcţiile obiectiv sunt de tip fuzzy. Vom considera problema de optimizare cu multiple funcţii obiectiv de tip fuzzy.

(VPF) Min $\tilde{f}(x) = (\tilde{f}^{(1)}(x), \ldots, \tilde{f}^{(p)}(x))$, cu $x \in X_0$,

unde $X_0 = \{x\in X \mid g(x) \leqq 0\}$, $X \subseteq R^n$, X deschisă,

$g: R^n \to R^q$ iar fiecare funcţie obiectiv $\tilde{f}^{(i)}$, i = 1, … , p este funcţie de tip fuzzy. Presupunem că funcţiile de restricţie $g_j: R^n \to R$, j = 1, … , q sunt diferenţiabile iar funcţiile obiectiv cu valori fuzzy $\tilde{f}^{(i)}: R^n \to \mathcal{F}_c(R)$ sunt diferenţiabile pentru orice i = 1, … , p.

Fie X_0 o mulţime admisibilă pentru problema (VPF) şi $\eta_\alpha: X\times X \to R^n$, $\alpha\in[0, 1]$.

Teorema 4.2.7 (Suficienţa). *Presupunem că*

(i) $a\in X_0$*;*

(ii) există $\tau^0 \in R^p$, $\tau^0 \geqq 0$ *şi* $\lambda^0 \in R^q$, $\lambda^0 \geqq 0$*, astfel încât*

(a) $\sum_{i}\tau_i^0\,[\,\nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^L(a) + \nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^U(a)] + \sum_{j}\lambda_j^0\,\nabla g_j(a) = 0$*, pentru orice* $\alpha\in[0, 1]$*;*

(b) $\lambda^0 g(a) = 0$*;*

(iii) problema (VPF) este quasi strict pseudo V-tip I în a în raport cu τ^0, λ^0 *şi funcţiile pozitive* γ_i^α, β_j^α, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$.

Atunci a este soluţie optimă Pareto tare pentru (VPF).

Teorema 4.2.8 (Suficienţa). *Presupunem că*

(i) $a\in X_0$*;*

(ii) există $\tau^0\in R^p$, $\tau^0 > 0$ *şi* $\lambda^0\in R^q$, $\lambda^0 \geqq 0$*, astfel încât*

(a) $\sum_{i}\tau_i^0\,[\,\nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^L(a) + \nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^U(a)] + \sum_{j}\lambda_j^0\,\nabla g_j(a) = 0$*, pentru orice* $\alpha\in[0, 1]$*;*

(b) $\lambda^0 g(a) = 0$*;*

(iii) problema (VPF) este pseudo quasi V-tip I în a în raport cu τ^0, λ^0 *şi funcţiile pozitive* γ_i^α, β_j^α, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$.

Atunci a este soluţie optimă Pareto pentru (VPF). Dacă, în plus, există numerele reale pozitive, n_i^α, m_i^α *astfel încât* $n_i^\alpha < \gamma_i^\alpha(x, a) < m_i^\alpha$*, pentru orice* $\alpha\in[0, 1]$, $x\in X_0$ *şi* $i = 1, \dots, p$*, atunci a este soluţie optimă Pareto proprie pentru (VPF).*

Teorema 4.2.9 (Necesitatea). *Presupunem că*

(i) a este soluţie optimă Pareto proprie pentru (VPF);

(ii) există un $x^*\in X$ *cu* $g_J(x^*) < 0$*, unde* $J = \{j:\ g_j(a) = 0\}$*,*

astfel încât

$$-g_j(a) > \nabla g_j(a)\eta(x^*, a), \qquad \forall j\in J.$$

Atunci există $\tau^0\in R^p, \tau^0 > 0$ *şi* $\lambda^0\in R^J$, $\lambda^0 \geqq 0$*, astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{p}\tau_i^0\,[\,\nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^L(a) + \nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^U(a)] + \sum_{j\in J}\lambda_j^0\,\nabla g_j(a) = 0, \quad \forall\,\alpha\in[0, 1].$$

În continuare, vom prezenta câteva rezultate de dualitate de tip Mond-Weir în cazul problemelor de tip fuzzy.

Vom considera duala multiobiectiv a problemei (VPF), (VDF) $\quad$ Max $\tilde{f}(y) = (\tilde{f}^{(1)}(y), \ldots, \tilde{f}^{(p)}(y))$,

unde $\displaystyle\sum_i \tau_i \, [\nabla(\tilde{f}^{(i)})^L_\alpha(y) + \nabla(\tilde{f}^{(i)})^U_\alpha(y)] + \sum_j \lambda_j \nabla g_j(y) = 0$, pentru orice $\alpha \in [0, 1]$;

$\lambda_j \, g_j(y) = 0, \quad j = 1, \ldots, q,$

$\tau \in R^p, \; \tau \geq 0,$

$\lambda \in R^q, \; \lambda \geqq 0.$

Fie Y^0 o mulțime admisibilă pentru problema (VDF),

$$Y^0 = \{(y, \tau, \lambda): \sum_i \tau_i \, [\nabla(\tilde{f}^{(i)})^L_\alpha(y) + \nabla(\tilde{f}^{(i)})^U_\alpha(y)] + \sum_j \lambda_j \nabla g_j(y) = 0, \forall \alpha \in [0, 1],$$

$$\lambda_j \, g_j(y) = 0, \quad j = 1, \ldots, q, \; \tau \in R^p, \tau \geq 0, \; \lambda \in R^q, \lambda \geqq 0\}.$$

Teorema 4.2.10 (Dualitatea Slabă). *Presupunem că*

(i) $x \in X_0$;

(ii) $(y, \tau, \lambda) \in Y^0$ *şi* $\tau > 0$;

(iii) problema (VPF) este strict pseudo quasi V-tip I în y în raport cu τ, λ *şi funcțiile pozitive* γ_i^α, β_j^α, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$.

Atunci $\tilde{f}(x) \not\preceq \tilde{f}(y)$.

Teorema 4.2.11 (Dualitatea Tare). *Presupunem că*

(i) a este soluție optimă Pareto proprie pentru problema (VPF);

(ii) este îndeplinită ipoteza (ii) din Teorema 4.2.9.

Atunci există $\tau^0 \in R^p, \tau^0 > 0$ *şi* $\lambda^0 \in R^q$, $\lambda^0 \geqq 0$, *astfel încât* $(a, \tau^0, \lambda^0) \in Y^0$ *iar funcțiile obiectiv ale problemelor (VPF) şi (VDF) au aceleaşi valori în a şi respectiv,* (a, τ^0, λ^0). *Dacă, în plus, problema (VPF) este strict pseudo quasi V-tip I pentru orice soluție admisibilă a problemei (VDF), atunci* $(a, \tau^0, \lambda^0) \in Y^0$ *este soluție optimă Pareto tare pentru (VDF).*

Teorema 4.2.12 (Dualitatea Inversă). *Presupunem că*

(i) $(y^0, \tau^0, \lambda^0) \in Y^0$ *cu* $\tau^0 > 0$;

(ii) $y^0 \in X_0$;

(iii) problema (VPF) este V-tip I în y^0 *în raport cu* τ^0, λ^0 *şi funcţiile pozitive* γ_i^α, β_j^α, *i = 1, … , p, j = 1, … , q.*

Atunci y^0 *este soluţie optimă Pareto pentru (VPF). Dacă, în plus, există numerele reale pozitive* n_i^α, m_i^α *astfel încât* $n_i^\alpha < \gamma_i^\alpha(x, y^0) < m_i^\alpha$, *pentru orice* $\alpha\in[0, 1]$, $x\in X_0$ *şi orice i = 1,…, p, atunci* y^0 *este soluţie optimă Pareto proprie pentru (VPF).*

În continuare, vom studia dualitatea problemelor de optimizare multiobiectiv în care funcţiile obiectiv sunt de tip fuzzy, folosind condiţiile Karush-Kuhn-Tucker generalizate.

Vom considera problema de optimizare cu multiple funcţii obiectiv de tip fuzzy.

$$\text{(VPF)} \qquad \text{Min } \tilde{f}(x) = (\tilde{f}^{(1)}(x), \dots, \tilde{f}^{(p)}(x)), \quad \text{cu} \quad x \in X_0,$$

$$\text{unde} \qquad X_0 = \{x\in X \mid g(x) \leqq 0\}, \quad X \subseteq R^n, \ X \text{ deschisă,}$$

$g : R^n \to R^q$ iar fiecare funcţie obiectiv $\tilde{f}^{(i)}$, i = 1, … , p este funcţie de tip fuzzy.

Presupunem că funcţiile de restricţie $g_j: R^n \to R$, j = 1, … , q sunt diferenţiabile iar funcţiile obiectiv cu valori fuzzy $\tilde{f}^{(i)}: R^n \to \mathcal{F}_c(R)$ sunt diferenţiabile pentru orice i = 1, … , p.

Fie X_0 o mulţime admisibilă pentru problema (VPF) şi $\eta_\alpha : X\times X \to R^n$, $\alpha\in[0, 1]$.

Pentru $x_0 \in X$, vom nota $I(x_0) = \{ j \in \{1, \dots, q\}: g_j(x_0) = 0\}$.

Teorema 4.3.11 (Condiţia necesară de optimalitate de tip Karush-Kuhn-Tucker).

Presupunem că x_0 *este o soluţie locală sau globală pentru problema (VPF). Atunci există funcţiile* $\eta_\alpha: X_0\times X\to R^n$, $\alpha\in[0, 1]$, $\theta_j: X_0\times X\to R^n$, $j\in I(x_0)$ *şi* $\lambda\in R_+^{|I(x_0)|}$ *cu* $\lambda_j > 0$, $j\in I(x_0)$ *astfel încât* $(x_0, \lambda, \{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}, (\theta_j)_{j\in I(x_0)})$ *îndeplineşte următoarea condiţie Karush-Kuhn-Tucker generalizată*

$$\sum_{i=1}^{p} [\nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^L(x_0) + \nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^U(x_0)]\,\eta_\alpha(x, x_0) + \sum_{j\in I(x_0)} \lambda_j [\nabla g_j(x_0)]\,\theta_j(x, x_0) \geqq 0,$$

$$\forall \alpha\in[0, 1], \ \forall x\in X_0. \qquad (4.39)$$

În continuare, vom considera duala de tip Wolfe a problemei (VPF), (WDF) $\quad$ Max $\tilde{f}(y) + \lambda^T g(y) = \sum_{i=1}^{p} [(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^L(y) + (\tilde{f}^{(i)})_\alpha^U(y)] + \lambda^T g(y)$,

$$\text{unde} \quad \sum_{i=1}^{p} [\nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^L(y) + \nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^U(y)]\,\eta_\alpha(x,y) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j [\nabla g_j(y)]\,\theta_j(x,y) \geqq 0,$$

$$\forall \alpha \in [0, 1],\ \forall\, x \in X_0,$$

$$y \in X,\ \lambda \in R_+^q,\ \eta_\alpha : X_0 \times X \to R^n,\ \theta_j : X_0 \times X \to R^n,\ \forall\, j = 1, \dots, q.$$

Fie Y^0 o mulțime admisibilă pentru problema (WDF),

$$Y^0 = \{(y, \lambda, \{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}, (\theta_j)_{j=\overline{1,q}}) : \sum_{i=1}^{p} [\nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^L(y) + \nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^U(y)]\,\eta_\alpha(x,y) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} \lambda_j [\nabla g_j(y)]\,\theta_j(x, y) \geqq 0,\ \forall \alpha \in [0, 1],\ \forall x \in X_0,\ y \in X,\ \lambda \in R_+^q,$$

$$\eta_\alpha : X_0 \times X \to R^n,\ \theta_j : X_0 \times X \to R^n,\ \forall\, j = 1, \dots, q\}.$$

Vom nota $Pr_X\, Y^0 = \{y \in X : (y, \lambda, \{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}, (\theta_j)_{j=\overline{1,q}}) \in Y^0\}$ proiecția mulțimii Y^0 pe X.

Teorema 4.3.12 (Dualitatea Slabă). *Presupunem că*

(i) $x \in X_0$*;*

(ii) $(y, \lambda, \{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}, (\theta_j)_{j=\overline{1,q}}) \in Y^0$*;*

(iii) problema (VPF) este de tip I în y în raport cu $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ *și* $(\theta_j)_{j=\overline{1,q}}$.

Atunci $\sum_{i=1}^{p} [(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^L(x) + (\tilde{f}^{(i)})_\alpha^U(x) - (\tilde{f}^{(i)})_\alpha^L(y) - (\tilde{f}^{(i)})_\alpha^U(y)] - \lambda^T g(y) \nleq 0,\ \forall \alpha \in [0, 1].$

Teorema 4.3.13 (Dualitatea Inversă). *Presupunem că*

(i) $(y, \lambda, \{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}, (\theta_j)_{j=\overline{1,q}}) \in Y^0$*;*

(ii) $y \in X_0$*;*

(iii) problema (VPF) este semi strict KKT-pseudo-invexă slabă în y în raport cu $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ *și* $(\theta_j)_{j=\overline{1,q}}$.

Atunci y este soluție optimă Pareto pentru (VPF).

Teorema 4.3.14 (Dualitatea Strictă). *Presupunem că*

(i) $x \in X_0$;

(ii) $(y, \lambda, \{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}, (\theta_j)_{j=\overline{1,q}}) \in Y^0$ *astfel încât* $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y) + \lambda^T g(y)$;

(iii) problema (VPF) este semi strict tip I în y în raport cu $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ *şi* $(\theta_j)_{j=\overline{1,q}}$.

Atunci $x = y$.

Vom considera şi duala de tip Mond-Weir a problemei (VPF),

$$\text{(MWDF)} \qquad \text{Max } \tilde{f}(y),$$

unde $\sum_{i=1}^{p} [\nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^L(y) + \nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^U(y)]\eta_\alpha(x,y) + \sum_{j\in I(y)} \lambda_j [\nabla g_j(y)]\theta_j(x,y) \geqq 0,$

$$\forall \alpha \in [0, 1], \ \forall x \in X_0,$$

$$y \in X, \ \lambda \in R_+^{|I(y)|}, \ \eta_\alpha : X_0 \times X \to R^n, \ \theta_j : X_0 \times X \to R^n, \ \forall j \in I(y).$$

Fie $\overline{Y}$ o mulţime admisibilă pentru problema (MWDF),

$$\overline{Y} = \{(y, \lambda, \{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}, (\theta_j)_{j\in I(y)}) : \sum_{i=1}^{p} [\nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^L(y) + \nabla(\tilde{f}^{(i)})_\alpha^U(y)]\eta_\alpha(x,y) +$$

$$+ \sum_{j\in I(y)} \lambda_j [\nabla g_j(y)]\theta_j(x,y) \geqq 0, \ \forall \alpha \in [0, 1], \ \forall x \in X_0, \ y \in X, \ \lambda \in R_+^{|I(y)|}, \ \eta_\alpha : X_0 \times X \to R^n,$$

$$\theta_j : X_0 \times X \to R^n, \ \forall j \in I(y)\} \text{ şi } Pr_X \overline{Y} = \{y \in X : (y, \lambda, \{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}, (\theta_j)_{j\in I(y)}) \in \overline{Y}\}.$$

Teorema 4.3.15 (Dualitatea Slabă). *Presupunem că*

(i) $x \in X_0$;

(ii) $(y, \lambda, \{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}, (\theta_j)_{j\in I(y)}) \in \overline{Y}$;

(iii) problema (VPF) este semi strict KKT-pseudo-invexă în y în raport cu $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ *şi* $(\theta_j)_{j\in I(y)}$.

Atunci $\tilde{f}(x) \nless \tilde{f}(y)$.

Teorema 4.3.16 (Dualitatea Inversă). *Presupunem că*

(i) $(y, \lambda, \{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}, (\theta_j)_{j\in I(y)}) \in \overline{Y}$;

(ii) $y \in X_0$;

(iii) problema (VPF) este semi strict KKT-pseudo-invexă slabă în y în raport cu

$\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ *şi* $(\theta_j)_{j\in I(y)}$.

Atunci y este soluţie optimă Pareto pentru (VPF).

Teorema 4.3.17 (Dualitatea Strictă). *Presupunem că*

(i) $x\in X_0$*;*

(ii) $(y, \lambda, \{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}, (\theta_j)_{j\in I(y)})\in \overline{Y}$ *astfel încât* $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y)$*;*

(iii) problema (VPF) este semi strict KKT-pseudo-invexă slabă în y în raport cu

$\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ *şi* $(\theta_j)_{j\in I(y)}$.

Atunci $x = y$.

V. Funcţii de ordin superior con pseudoconvex şi con quasiconvex în optimizarea multiobiectiv

Fie $K\subseteq R^m$ un con convex închis cu vârful în origine şi int$K \neq \emptyset$. Conul dual pozitiv K^+ şi conul dual pozitiv strict K^{s+} sunt definite astfel:

$$K^+ = \{y\in R^m / x^T y \geqq 0,\ \forall\ x\in K\} \text{ şi } K^{s+} = \{y\in R^m / x^T y > 0,\ \forall\ x\in K\backslash\{0\}\},$$

unde prin $x^T y$ am notat produsul scalar Euclidian <x , y>.

Fie S o submulţime deschisă, nevidă din R^n şi $f : S \to R^m$, $H : S\times R^n \to R^m$ funcţii diferenţiabile vectoriale şi $\psi : S\times R^n \to R$.

În continuare vom prezenta două exemple prin care vom demonstra că nu există o legătură între funcţiile K-pseudoconvexe natural de ordin superior şi funcţiile K-pseudoconvexe de ordin superior.

Exemplul 5.1.5 Fie $S = \{(x_1,\ x_2)\in R^2 /\ x_1 < 2,\ x_2\in R\}$, $K = \{(x_1,\ x_2)\in R^2 /\ x_1 \leqq 0,$ $x_1 \leqq x_2\}$, $f(x) = f(x_1,\ x_2) = (x_1^3 - x_2^2, -x_2^2)$ şi $H(x, p) = H((x_1,\ x_2), (p_1,\ p_2)) =$ $= (p_1(x_1 + 1) - p_2^2, -p_2^2)$. Pentru $\overline{x} = (0, 0)$ şi $\psi(\overline{x}, p) = 1$ avem

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -2x_2 \\ 0 & -2x_2 \end{pmatrix} \text{ şi } \nabla_p H(x, p) = \begin{pmatrix} x_1+1 & -2p_2 \\ 0 & -2p_2 \end{pmatrix}.$$

Fie $(x, p) \in S \times R^2$ astfel încât

$$(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] \in K \Rightarrow x_1 \leqq 0,\ \ x_1 - 2p_2 x_2 \leqq 0 \text{ şi } p_1 \in R,$$

$$\Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p) = (x_1^3 - x_2^2 - p_2^2, -x_2^2 - p_2^2) \in K.$$

Deci f este K-pseudoconvexă natural de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x} \in S$, în raport cu H, dar f nu este K-pseudoconvexă de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x}$, în raport cu H, deoarece pentru $x = (\frac{3}{2}, 1) \in S$ şi $p = (1, 1) \in R^2$ avem

$$-(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (\frac{1}{2}, 2) \notin \text{int}K$$

$$\text{iar} \quad -[f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (-\frac{11}{8}, 2) \in \text{int}K.$$

Pentru $\bar{x} = (0, 0)$ şi $\psi(\bar{x}, p) = -\|\bar{x} - p\|$ obținem că

- f nu este K-pseudoconvexă natural de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x} \in S$, în raport cu H, deoarece pentru $x = (1, 0) \in S$ şi $p = (1, 1) \in R^2$ avem

$$(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (-\sqrt{2}, 0) \in K$$

$$\text{iar} \quad f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p) = (0, -1) \notin K.$$

- f nu este K-pseudoconvexă de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x} \in S$, în raport cu H, deoarece pentru $x = (\frac{3}{2}, 1) \in S$ şi $p = (1, 0) \in R^2$ avem

$$-(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (\frac{3}{2}, 0) \notin \text{int}K$$

$$\text{iar} \quad -[f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (-\frac{19}{8}, 1) \in \text{int}K.$$

Exemplul 5.1.6 Fie $S = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_1 < 1, x_2 \in R\}$, $K = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_2 \leqq 0, x_2 \leqq x_1\}$, $f(x) = f(x_1, x_2) = (-x_1^3 + x_2^2, x_2^2)$ şi $H(x, p) = (-p_1(x_1+1), p_1(x_2+1))$.

Pentru $\bar{x} = (0, 0)$ şi $\psi(\bar{x}, p) = 1$ avem

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 2x_2 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix} \text{ şi } \nabla_p H(x, p) = \begin{pmatrix} -x_1 - 1 & 0 \\ x_2 + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fie $(x, p) \in S \times R^2$ astfel încât

$$-(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] \notin \text{int}K \Rightarrow x_1 \leqq 0,\ x_2 \in R \text{ şi } (p_1, p_2) \in R^2,$$

$$\Rightarrow -[f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (x_1^3 - x_2^2, -x_2^2) \notin \text{int}K.$$

Deci f este K-pseudoconvexă de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x} \in S$, în raport cu H, dar f nu este K-pseudoconvexă natural de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x}$, în raport cu H, deoarece pentru $x = (-1, 1) \in S$ şi $p \in R^2$ avem

$$(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (1, -1) \in K$$

$$\text{iar} \quad f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p) = (2, 1) \notin K.$$

Pentru $\bar{x} = (0, 0)$ şi $\psi(\bar{x}, p) = -\|\bar{x} - p\|$ obținem că

- f nu este K-pseudoconvexă de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x} \in S$, în raport cu H, deoarece pentru $x = (\frac{1}{2}, 1) \in S$ şi $p = (1, 1) \in R^2$ avem

$$-(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \notin \text{int}K$$

$$\text{iar} \quad -[f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (-\frac{7}{8}, -1) \in \text{int}K.$$

- f nu este K-pseudoconvexă natural de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x} \in S$, în raport cu H, deoarece pentru $x = (\frac{1}{2}, 0) \in S$ şi $p = (1, 0) \in R^2$ avem

$$(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in K$$

$$\text{iar} \quad f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p) = (-\frac{1}{8}, 0) \notin K.$$

Definiția 5.1.16 *Vom spune că f este K-quasiconvexă slab de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x} \in S$, în raport cu H, dacă pentru orice $(x, p) \in S \times R^n$, avem:*

$$-[f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p)] \in K \Rightarrow -(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] \in K.$$

Exemplul 5.1.17 Fie $S = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_1 < 2, x_2 \in R\}$, $K = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_1 \leqq x_2, x_1 \leqq 0\}$, $f(x) = f(x_1, x_2) = -(x_1^3 - x_2^2, -x_2^2)$ şi $H(x, p) = (-p_1(x_1 + 1), -p_1(x_2 + 1))$.

Pentru $\bar{x} = (0, 0)$ şi $\psi(\bar{x}, p) = 1$ avem

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 2x_2 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix} \text{ şi } \nabla_p H(x, p) = \begin{pmatrix} -x_1 - 1 & 0 \\ -x_2 - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fie $(x, p) \in S \times R^2$ astfel încât

$$-[f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p)] \in K \Rightarrow x_1 \leqq 0,\ x_2 \in R \text{ şi } (p_1, p_2) \in R^2,$$

$$\Rightarrow -(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (x_1, x_1) \in K.$$

Deci f este K-quasiconvexă slab de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x} \in S$, în raport cu H, dar f nu este K-pseudoconvexă de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x}$, în raport cu H, deoarece pentru $x = (-1, 0) \in S$ şi $p \in R^2$ avem

$$-(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (-1, -1) \notin \text{int}K \text{ iar}$$

$$-[f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (-1, 0) \in \text{int}K.$$

Pentru $\bar{x} = (0, 0)$ şi $\psi(\bar{x}, p) = -\|\bar{x} - p\|$ obținem că

- f nu este K-quasiconvexă slab de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x} \in S$, în raport cu H, deoarece pentru $x = (-1, 1) \in S$ şi $p = (1, 0) \in R^2$ avem

$$-[f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (-2, -1) \in K$$

$$\text{iar } -(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (1, 1) \notin K.$$

- f nu este K-pseudoconvexă de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x} \in S$, în raport cu H, deoarece pentru $x = (-2, 0) \in S$ şi $p = (0, 1)$ avem

$$-(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (2, 2) \notin \text{int}K$$

$$\text{iar } -[f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (-8, 0) \in \text{int}K.$$

Exemplul 5.1.18 În Exemplul 5.1.17 f este K-quasiconvexă slab de ordin superior în funcție de $\psi(\bar{x}, p) = 1$, în $\bar{x} \in S$, în raport cu H, dar f nu este K-pseudoconvexă natural de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x}$, în raport cu H, deoarece pentru $x = (1, 2) \in S$ şi $p \in R^2$ avem

$$(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (-1, -1) \in K \text{ iar}$$

$$f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p) = (3, 4) \notin K.$$

Pentru $\bar{x} = (0, 0)$ şi $\psi(\bar{x}, p) = -\|\bar{x} - p\|$ obținem că

- f nu este K-quasiconvexă slab de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x} \in S$, în raport cu H.
- f nu este K-pseudoconvexă natural de ordin superior în funcție de ψ, în $\bar{x} \in S$, în raport cu H, deoarece pentru $x = (-1, 2) \in S$ şi $p = (1, 0) \in R^2$ avem

$$(x - \bar{x})^T \psi(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (-1, -1) \in K \text{ iar}$$

$$f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p) = (5, 4) \notin K.$$

Considerăm problema de optimizare multiobiectiv

$$\text{(VP)} \quad K\text{-min } f(x)$$

$$\text{având restricțiile } -g(x) \in Q$$

unde $f : S \to R^m$ şi $g : S \to R^p$ sunt funcții diferențiabile definite pe o submulțime nevidă deschisă S din R^n. Fie K şi Q două conuri critice convexe închise din R^m şi R^p respectiv, cu interioarele nevide.

Mulțimea admisibilă pentru problema (VP) este dată de

$$S_0 = \{x \in S \, / \, -g(x) \in Q\}.$$

Folosind rezultatele din Suneja ([131]) şi Bhatia ([27]) vom prezenta următoarele condiții de optimalite de ordin superior pentru problema (VP).

Fie $H : S \times R^n \to R^m$ şi $G : S \times R^n \to R^p$ funcții diferențiabile vectoriale iar $\psi_f : S \times R^n \to R_+$, $\psi_g : S \times R^n \to R_+$.

Teorema 5.2.3 *Fie f şi g două funcții cu următoarele proprietăți:*

a) *f este K-pseudoconvexă tare de ordin superior în funcție de ψ_f, în $\bar{x} \in S_0$, în raport cu* H,

b) g este Q-quasiconvexă de ordin superior în funcție de ψ_g, în $\bar{x} \in S_0$, în raport cu G.

Presupunem că există $\bar{\lambda} \in K^+ \setminus \{0\}$ şi $\bar{\mu} \in Q^+$, astfel încât pentru orice $(x, p) \in S_0 \times R^n$,

$$(x - \bar{x})^T \psi_f(\bar{x}, p)\,[\nabla(\bar{\lambda}^T f)(\bar{x}) + \nabla_p(\bar{\lambda}^T H)(\bar{x}, p)] +$$

$$+ (x - \bar{x})^T \psi_g(\bar{x}, p)\,[\nabla(\bar{\mu}^T g)(\bar{x}) + \nabla_p(\bar{\mu}^T G)(\bar{x}, p)] \geqq 0, \qquad (5.1)$$

$$(\bar{\mu}^T g)(\bar{x}) + (\bar{\mu}^T G)(\bar{x}, p) - p^T \nabla_p (\bar{\mu}^T G)(\bar{x}, p) \geqq 0, \tag{5.2}$$

$$(\bar{\lambda}^T H)(\bar{x}, p) - p^T \nabla_p (\bar{\lambda}^T H)(\bar{x}, p) \geqq 0. \tag{5.3}$$

Atunci $\bar{x}$ este minim slab pentru problema (VP).

Teorema 5.2.4 *Fie f şi g două funcţii cu următoarele proprietăţi:*

a) *f este K-pseudoconvexă strict de ordin superior în funcţie de ψ_f, în $\bar{x} \in S_0$, în raport cu* H,

b) *g este Q-quasiconvexă de ordin superior în funcţie de ψ_g, în $\bar{x} \in S_0$, în raport cu* G.

Presupunem că există $\bar{\lambda} \in K^{S+}$ şi $\bar{\mu} \in Q^+$ astfel încât, pentru orice $(x, p) \in S_0 \times R^n$, sunt îndeplinite relaţiile (5.1) – (5.3). Atunci $\bar{x}$ este soluţie minimă pentru problema (VP).

Teorema 5.2.5 *Fie f şi g două funcţii cu următoarele proprietăţi:*

a) *f este K-pseudoconvexă tare de ordin superior în funcţie de ψ_f, în $\bar{x} \in S_0$, în raport cu* H,

b) *g este Q-quasiconvexă de ordin superior în funcţie de ψ_g, în $\bar{x} \in S_0$, în raport cu* G.

Presupunem că există $\bar{\lambda} \in K^{S+}$ şi $\bar{\mu} \in Q^+$ astfel încât, pentru orice $(x, p) \in S_0 \times R^n$, sunt îndeplinite relaţiile (5.1) – (5.3). Atunci $\bar{x}$ este minim propriu Benson pentru problema (VP).

Teorema 5.2.6 *Fie f şi g două funcţii cu următoarele proprietăţi:*

a) *f este K-pseudoconvexă natural de ordin superior în funcţie de ψ_f, în $\bar{x} \in S_0$, în raport cu* H,

b) *g este Q-quasiconvexă slab de ordin superior în funcţie de ψ_g, în $\bar{x} \in S_0$, în raport cu* G.

Presupunem că pentru orice $(x, p) \in S_0 \times R^n$, sunt îndeplinite relaţiile (5.1) – (5.3), pentru orice $\lambda \in K^+$, $\mu \in Q^+$. Atunci $\bar{x}$ este minim tare pentru problema (VP).

Exemplul 5.2.7 Fie $S = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_1 < 2, x_2 \in R\}$.

$$f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1^3 - x_2^2, -x_2^2),\ H(x, p) = (2p_1(x_1 + 1), -p_1(x_2 + 1)),$$

$$K = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_1 \leqq 0,\ x_1 \leqq x_2\},$$

$$g(x) = g(x_1, x_2) = (x_1^3, x_1^3 + x_2^2),\ G(x, p) = (x_2, p_2(x_1 + 1)),$$

$$Q = \{(x_1, x_2) \in R^2 / 0 \leqq x_1 \leqq x_2\}.$$

Pentru $\bar{x} = (0, 0)$ şi $\psi_f(\bar{x}, p) = \psi_g(\bar{x}, p) = \|\bar{x} - p\|$ avem

- f este K-pseudoconvexă natural de ordin superior în funcție de ψ_f, în $\bar{x}$, în raport cu H, deoarece

$$(x - \bar{x})^T \psi_f(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] = (2x_1\|p\|, -x_1\|p\|) \in K,$$

$$\Rightarrow x_1 \leqq 0,\ x_2 \in R \text{ şi } p = (p_1, p_2) \in R^2,$$

$$\Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p) = (x_1^3 - x_2^2, -x_2^2) \in K.$$

- g este Q-quasiconvexă slab de ordin superior în funcție de ψ_g, în $\bar{x}$, în raport cu G, deoarece

$$-[g(x) - g(\bar{x}) - G(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p G(\bar{x}, p)] = (-x_1^3, -x_1^3 - x_2^2) \in Q,$$

$$\Rightarrow x_1 \leqq 0,\ x_2 = 0 \text{ şi } p = (p_1, p_2) \in R^2,$$

$$\Rightarrow -(x - \bar{x})^T \psi_g(\bar{x}, p)[\nabla g(\bar{x}) + \nabla_p G(\bar{x}, p)] = (0, 0) \in Q.$$

Regiunea admisibilă pentru (VP) este

$$S_0 = \{(x_1, x_2) \in S / x_1 \leqq 0,\ x_2 = 0\}.$$

Avem $K^+ = \{(x_1, x_2) \in R^2 / 0 \leqq x_2 \leqq -x_1\}$ şi $Q^+ = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_2 \geqq -x_1,\ x_2 \geqq 0\}$.

Atunci pentru orice $(x, p) \in S_0 \times R^2$, $\lambda \in K^+$ şi $\mu \in Q^+$ rezultă

$$(x - \bar{x})^T \psi_f(\bar{x}, p)[\nabla(\lambda^T f)(\bar{x}) + \nabla_p(\lambda^T H)(\bar{x}, p)] +$$

$$+ (x - \bar{x})^T \psi_g(\bar{x}, p)[\nabla(\mu^T g)(\bar{x}) + \nabla_p(\mu^T G)(\bar{x}, p)] = 2x_1\|p\|\lambda_1 - x_1\|p\|\lambda_2 \geqq 0,$$

$$(\mu^T g)(\bar{x}) + (\mu^T G)(\bar{x}, p) - p^T \nabla_p(\mu^T G)(\bar{x}, p) = 0,$$

$$(\lambda^T H)(\bar{x}, p) - p^T \nabla_p(\lambda^T H)(\bar{x}, p) = 0.$$

Se obține că relațiile (5.1), (5.2) şi (5.3) sunt îndeplinite pentru orice $\lambda \in K^+$, $\mu \in Q^+$ şi $(x, p) \in S_0 \times R^2$, de unde, folosind Teorema 5.2.6, rezultă că $\bar{x}$ este minim tare pentru problema (VP).

Vom asocia următoarea problemă duală de tip Mond-Weir de ordin superior pentru problema (VP).

$$(HD_1) \quad \text{K-max } f(u)$$

având restricțiile
$$(x - u)^T \psi_f(u, p)[\nabla(\lambda^T f)(u) + \nabla_p(\lambda^T H)(u, p)] +$$
$$+ (x - u)^T \psi_g(u, p)[\nabla(\mu^T g)(u) + \nabla_p(\mu^T G)(u, p)] \geqq 0, \ \forall x \in S_0,$$
$$(\mu^T g)(u) + (\mu^T G)(u, p) - p^T \nabla_p(\mu^T G)(u, p) \geqq 0,$$
$$(\lambda^T H)(u, p) - p^T \nabla_p(\lambda^T H)(u, p) \geqq 0,$$

unde $\lambda \in K^+ \setminus \{0\}$, $\mu \in Q^+$, $u \in S$, $p \in R^n$ iar $\psi_f : S \times R^n \to R_+$, $\psi_g : S \times R^n \to R_+$.

Teorema 5.3.1 *(Dualitatea slabă) Fie f şi g două funcții cu următoarele proprietăți:*

a) *f este K-pseudoconvexă tare de ordin superior în funcție de* ψ_f*, în* $u \in S$*, în raport cu* H,

b) g este Q-quasiconvexă de ordin superior în funcție de ψ_g*, în* $u \in S$*, în raport cu* G.

Fie x o soluție admisibilă pentru problema (VP) şi (u, λ, μ, p) soluție admisibilă pentru problema (HD_1 *). Atunci*

$$f(u) - f(x) \notin \operatorname{int} K.$$

Definiția 5.3.2 *Vom spune că f este K-convexă de ordin superior în funcție de* ψ_f*, în* $\bar{x} \in S$*, în raport cu H, dacă pentru orice* $(x, p) \in S \times R^n$*, avem:*

$$f(x) - f(\bar{x}) - (x - \bar{x})^T \psi_f(\bar{x}, p)[\nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)] - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p) \in K.$$

Observația 5.3.3 *Pentru* $H(\bar{x}, p) = 0$*, vom spune că f este K-convexă în funcție de* ψ_f*, în* $\bar{x} \in S$*, dacă pentru orice* $(x, p) \in S \times R^n$ *avem:*

$$f(x) - f(\bar{x}) - (x - \bar{x})^T \psi_f(\bar{x}, p) \nabla f(\bar{x}) \in K.$$

Lema 5.3.5 *Dacă* $\bar{x}$ *este minim slab pentru problema (VP), atunci există* $\bar{\lambda} \in K^+$ *şi* $\bar{\mu} \in Q^+$, *cu* $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \neq 0$ *astfel încât*

$$(x - \bar{x})^T \psi_g(\bar{x}, p)[\nabla(\bar{\lambda}^T f)(\bar{x}) + \nabla(\bar{\mu}^T g)(\bar{x})] \geqq 0, \ \forall x \in S, \tag{5.9}$$

$$(\bar{\mu}^T g)(\bar{x}) = 0. \tag{5.10}$$

În plus, dacă g este Q-convexă în funcţie de ψ_g, *în* $\bar{x} \in S$ *şi există* $x^* \in S$ *astfel încât* $(\bar{\mu}^T g)(x^*) < 0$, *atunci* $\bar{\lambda} \neq 0$.

Teorema 5.3.9 *(Dualitatea tare). Dacă* $\bar{x}$ *este un punct minim slab pentru problema (VP), atunci există* $\bar{\lambda} \in K^+$ *şi* $\bar{\mu} \in Q^+$, *cu* $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \neq 0$ *astfel încât sunt îndeplinite relaţiile (5.9) şi (5.10). Dacă* $H(\bar{x}, 0) = G(\bar{x}, 0) = 0, \nabla_p H(\bar{x}, 0) = \nabla_p G(\bar{x}, 0) = 0$, *g este Q-convexă în funcţie de* ψ_g, *în* $\bar{x}$ *şi există* $x^* \in S$ *astfel încât* $(\bar{\mu}^T g)(x^*) < 0$ *iar* $\psi_f = \psi_g$, *atunci* $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{p} = 0)$ *este soluţie admisibilă pentru problema* (HD_1).

În plus, dacă sunt îndeplinite condiţiile din Teorema 5.3.1 pentru orice soluţie admisibilă (u, λ, μ, p) *a problemei* (HD_1), *atunci* $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{p} = 0)$ *este maxim slab pentru problema* (HD_1).

În continuare vom generaliza noţiunile prezentate anterior prin introducerea unor noi clase de funcţii de ordin superior de tip F-con pseudoconvex şi F-con quasiconvex.

Pentru aceasta considerăm o aplicaţie $F(\cdot, \cdot, \cdot\,; \cdot) : S \times S \times R^n \times R^n \to R$ în raport cu care vom introduce clasele de aplicaţii şi vom studia proprietăţi de optimalitate şi dualitate.

Vom nota $\hat{F}(x, \bar{x}, p; \nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)) =$

$$= (F(x, \bar{x}, p; \nabla f_1(\bar{x}) + \nabla_p H_1(\bar{x}, p)), \dots, F(x, \bar{x}, p; \nabla f_m(\bar{x}) + \nabla_p H_m(\bar{x}, p))).$$

Definiţia 5.4.1 *Vom spune că f este (F, K)-pseudoconvexă de ordin superior în* $\bar{x} \in S$, *în raport cu H, dacă pentru orice* $(x, p) \in S \times R^n$, *avem:*

$$-\hat{F}(x, \bar{x}, p; \nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)) \notin intK \Rightarrow -[f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p)] \notin intK.$$

Definiția 5.4.2 *Vom spune că f este (F, K)-pseudoconvexă tare de ordin superior în* $\bar{x} \in S$*, în raport cu H, dacă pentru orice* $(x, p) \in S \times \mathbb{R}^n$*, avem:*

$$-\hat{F}(x, \bar{x}, p; \nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)) \notin \operatorname{int}K \Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p) \in K.$$

Definiția 5.4.3 *Vom spune că f este (F, K)-quasiconvexă de ordin superior în* $\bar{x} \in S$*, în raport cu H, dacă pentru orice* $(x, p) \in S \times \mathbb{R}^n$*, avem:*

$$f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p) \notin \operatorname{int}K \Rightarrow -\hat{F}(x, \bar{x}, p; \nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)) \in K.$$

Definiția 5.4.4 *Vom spune că f este (F, K)-pseudoconvexă natural de ordin superior în* $\bar{x} \in S$*, în raport cu H, dacă pentru orice* $(x, p) \in S \times \mathbb{R}^n$*, avem:*

$$\hat{F}(x, \bar{x}, p; \nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)) \in K \Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p) \in K.$$

Definiția 5.4.5 *Vom spune că f este (F, K)-pseudoconvexă strict de ordin superior în* $\bar{x} \in S$*, în raport cu H, dacă pentru orice* $(x, p) \in S \times \mathbb{R}^n$*, avem:*

$$-\hat{F}(x, \bar{x}, p; \nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)) \notin \operatorname{int}K \Rightarrow -[f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p)] \notin K \setminus \{0\}.$$

Definiția 5.4.6 *Vom spune că f este (F, K)-quasiconvexă slab de ordin superior în* $\bar{x} \in S$*, în raport cu H, dacă pentru orice* $(x, p) \in S \times \mathbb{R}^n$*, avem:*

$$-[f(x) - f(\bar{x}) - H(\bar{x}, p) + p^T \nabla_p H(\bar{x}, p)] \in K \Rightarrow -\hat{F}(x, \bar{x}, p; \nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)) \in K.$$

Considerăm problema de optimizare multiobiectiv

$$\text{(VP)} \quad K\text{-min } f(x)$$
$$\text{având restricțiile } -g(x) \in Q$$

unde $f : S \to \mathbb{R}^m$ şi $g : S \to \mathbb{R}^q$ sunt funcții diferențiabile definite pe o submulțime nevidă deschisă S din $\mathbb{R}^n$. Fie K şi Q două conuri critice convexe închise din $\mathbb{R}^m$ şi $\mathbb{R}^q$ respectiv, cu interioarele nevide.

Mulțimea admisibilă pentru problema (VP) este dată de

$$S_0 = \{x \in S \,/\, -g(x) \in Q\}.$$

Fie $H : S \times R^n \to R^m$ şi $G : S \times R^n \to R^q$ funcții diferențiabile vectoriale iar $F_1(\cdot, \cdot, \cdot\,; \cdot) : S \times S \times R^n \times R^n \to R$, $F_2(\cdot, \cdot, \cdot\,; \cdot) : S \times S \times R^n \times R^n \to R$, $F_1(x, \bar{x}, p; \cdot)$, $F_2(x, \bar{x}, p; \cdot)$ funcții convexe.

Vom nota $\hat{F}_1(x, \bar{x}, p; \nabla f(\bar{x}) + \nabla_p H(\bar{x}, p)) =$

$$= (F_1(x, \bar{x}, p; \nabla f_1(\bar{x}) + \nabla_p H_1(\bar{x}, p)), \dots, F_1(x, \bar{x}, p; \nabla f_m(\bar{x}) + \nabla_p H_m(\bar{x}, p)))$$

şi $\hat{F}_2(x, \bar{x}, p; \nabla g(\bar{x}) + \nabla_p G(\bar{x}, p)) =$

$$= (F_2(x, \bar{x}, p; \nabla g_1(\bar{x}) + \nabla_p G_1(\bar{x}, p)), \dots, F_2(x, \bar{x}, p; \nabla g_q(\bar{x}) + \nabla_p G_q(\bar{x}, p))).$$

Teorema 5.4.7 *Fie f şi g două funcții cu următoarele proprietăți:*

a) *f este (F_1, K)-pseudoconvexă tare de ordin superior în $\bar{x} \in S_0$, în raport cu* H,

b) g este (F_2, Q)-quasiconvexă de ordin superior în $\bar{x} \in S_0$, în raport cu G.

Presupunem că există $\bar{\lambda} \in K^+ \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda} \geqq 0$, $\bar{\lambda}^t e = 1$ şi $\bar{\mu} \in Q^+$, $\bar{\mu} \geqq 0$, $\bar{\mu}^t e = 1$, astfel încât pentru orice $(x, p) \in S_0 \times R^n$,

$$F_1(x, \bar{x}, p; \nabla(\bar{\lambda}^T f)(\bar{x}) + \nabla_p(\bar{\lambda}^T H)(\bar{x}, p)) +$$

$$+ F_2(x, \bar{x}, p; \nabla(\bar{\mu}^T g)(\bar{x}) + \nabla_p(\bar{\mu}^T G)(\bar{x}, p)) \geqq 0, \tag{5.12}$$

$$(\bar{\mu}^T g)(\bar{x}) + (\bar{\mu}^T G)(\bar{x}, p) - p^T \nabla_p(\bar{\mu}^T G)(\bar{x}, p) \geqq 0, \tag{5.13}$$

$$(\bar{\lambda}^T H)(\bar{x}, p) - p^T \nabla_p(\bar{\lambda}^T H)(\bar{x}, p) \geqq 0. \tag{5.14}$$

Atunci $\bar{x}$ este minim slab pentru problema (VP).

Teorema 5.4.8 *Fie f şi g două funcții cu următoarele proprietăți:*

a) *f este (F_1, K)-pseudoconvexă strict de ordin superior în $\bar{x} \in S_0$, în raport cu* H,

b) g este (F_2, Q)-quasiconvexă de ordin superior în $\bar{x} \in S_0$, în raport cu G.

Presupunem că există $\bar{\lambda} \in K^{S+}$, $\bar{\lambda} \geqq 0$, $\bar{\lambda}^t e = 1$ şi $\bar{\mu} \in Q^+$, $\bar{\mu} \geqq 0$, $\bar{\mu}^t e = 1$, astfel încât, pentru orice $(x, p) \in S_0 \times R^n$, sunt îndeplinite relațiile (5.12) – (5.14). Atunci $\bar{x}$ este soluție minimă pentru problema (VP).

Teorema 5.4.9 *Fie f şi g două funcții cu următoarele proprietăți:*

a) *f este (* F_1*, K)-pseudoconvexă natural de ordin superior în* $\bar{x} \in S_0$*, în raport cu* H,

b) g este (F_2*, Q)-quasiconvexă slab de ordin superior în* $\bar{x} \in S_0$*, în raport cu* G.

Presupunem că pentru orice (x, p)$\in S_0 \times R^n$*, sunt îndeplinite relațiile (5.12) – (5.14), pentru orice* $\lambda \in K^+$*,* $\lambda \geqq 0$*,* $\lambda^t e = 1$ *şi* $\mu \in Q^+$*,* $\mu \geqq 0$*,* $\mu^t e = 1$*. Atunci* $\bar{x}$ *este minim tare pentru problema (VP).*

Vom asocia următoarea problemă duală de tip Mond-Weir de ordin superior pentru problema (VP).

$$(HD_1) \quad \text{K-max } f(u)$$

având restricțiile
$$F_1(x, u, p; \nabla(\lambda^T f)(u) + \nabla_p(\lambda^T H)(u, p)) +$$
$$+ F_2(x, u, p; \nabla(\mu^T g)(u) + \nabla_p(\mu^T G)(u, p)) \geqq 0, \ \forall x \in S_0,$$
$$(\mu^T g)(u) + (\mu^T G)(u, p) - p^T \nabla_p(\mu^T G)(u, p) \geqq 0,$$
$$(\lambda^T H)(u, p) - p^T \nabla_p(\lambda^T H)(u, p) \geqq 0,$$

unde $\lambda \in K^+ \setminus \{0\}$, $\lambda \geqq 0$, $\lambda^t e = 1$, $\mu \in Q^+$, $\mu \geqq 0$, $\mu^t e = 1$, $u \in S$, $p \in R^n$ iar

$F_1(x, \bar{x}, p; \cdot)$, $F_2(x, \bar{x}, p; \cdot)$ sunt funcții convexe.

Teorema 5.4.10 *(Dualitatea slabă) Fie f şi g două funcții cu următoarele proprietăți:*

a) *f este (* F_1*, K)-pseudoconvexă tare de ordin superior, în u*$\in$*S, în raport cu* H,

b) g este (F_2*, Q)-quasiconvexă de ordin superior, în u*$\in$*S, în raport cu* G.

Fie x o soluție admisibilă pentru problema (VP) şi (u, λ, μ, p) soluție admisibilă pentru problema (HD_1 *). Atunci*

$$f(u) - f(x) \notin intK.$$

Teorema 5.4.13 *Fie* $\bar{x}$ *minim slab pentru problema (VP) cu proprietatea că există* $\bar{\lambda} \in K^+$*,* $\bar{\lambda} \geqq 0$*,* $\bar{\lambda}^t e = 1$ *şi* $\bar{\mu} \in Q^+$*,* $\bar{\mu} \geqq 0$*,* $\bar{\mu}^t e = 1$*, cu (* $\bar{\lambda}$*,* $\bar{\mu}$ *)* $\neq 0$ *astfel încât*

$$F_2(x, \bar{x}, p; \nabla(\bar{\lambda}^T f)(\bar{x}) + \nabla(\bar{\mu}^T g)(\bar{x})) \geqq 0, \quad \forall x \in S, \tag{5.20}$$

$$(\bar{\mu}^T g)(\bar{x}) = 0. \tag{5.21}$$

Dacă g este (F_2*, Q)-convexă în* $\bar{x} \in S$ *şi există* $x^* \in S$ *astfel încât (* $\bar{\mu}^T g)(x^*) < 0$*, atunci* $\bar{\lambda} \neq 0$*.*

VI. Condiţii de optimalitate şi dualitatea în optimizarea fracţionară multiobiectiv semiinfinită

Considerăm următoarea problemă de programare fracţionară multiobiectiv semiinfinită:

$$\text{(P)} \quad \text{Min} \quad \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) = \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \dots, \frac{f_p(x)}{g_p(x)}\right)$$

cu restricţiile $G_j(x, t) \le 0$, pentru orice $t \in T_j$, $j \in \{1, \dots, q\}$

$H_k(x, s) = 0$, pentru orice $s \in S_k$, $k \in \{1, \dots, r\}$,

$x \in R^n$,

unde T_j, S_k sunt intervale reale compacte, $f_i, g_i, G_j(\cdot, t), H_k(\cdot, s) : R^n \to R$, $G_j(x, \cdot) : T_j \to R$, $H_k(x, \cdot) : S_k \to R$ sunt funcţii continue iar $g_i(x) > 0$, pentru orice $j \in \{1, \dots, q\}$, $k \in \{1, \dots, r\}$, $i \in \{1, \dots, p\}$.

Presupunem că mulţimea admisibilă este dată de:

$$E = \{x \in R^n : G_j(x, t) \leqq 0, \forall t \in T_j, j \in \overline{1,q}, H_k(x, s) = 0, \forall s \in S_k, k \in \overline{1,r}\}.$$

Vom demonstra câteva rezultate de eficienţă, în ipotezele de (α, F, ρ)-V-invexitate, pentru problema de optimizare multiobiectiv (P).

Pentru aceasta considerăm o aplicaţie $F(\cdot, \cdot\,; \cdot) : R^n \times R^n \times R^n \to R$, $F(x, x^*; \cdot)$ subliniară şi o aplicaţie $\Delta : R^n \times R^n \to R_+$, în raport cu care vom studia următoarele proprietăţi de invexitate.

Considerăm mulţimile:

$$U = \{u \in R^p : u > 0, \sum_{i=1}^{p} u_i = 1\}, \quad \hat{T}_j(x^*) = \{t \in T_j : G_j(x^*, t) = 0\}.$$

Teorema 6.1.8 *Fie* $x^* \in E$, $\lambda^* = \varphi(x^*) \geqq 0$, *funcţiile* f_i, g_i, $i \in \overline{1,p}$, *funcţiile* $G_j(\cdot, t)$, $H_k(\cdot, s)$ *diferenţiabile* $\forall t \in T_j$, $j \in \overline{1,q}$, $\forall s \in S_k$, $k \in \overline{1,r}$ *şi să presupunem că există* $u^* \in U$, $0 \leqq \nu_0 \leqq \nu \leqq n+1$, ν_0 *indici cu* $1 \leqq j_\omega \leqq q$, ν_0 *puncte* $t^\omega \in \hat{T}_{j_\omega}(x^*)$, $\omega \in \overline{1,\nu_0}$, $\nu - \nu_0$ *indici cu* $1 \leqq k_\omega \leqq r$, $\nu - \nu_0$ *puncte* $s^\omega \in S_{k_\omega}$, $\omega \in \overline{1,\nu} \setminus \overline{1,\nu_0}$ *şi* ν *numere reale* $v_\omega^* > 0$ *pentru* $\omega \in \overline{1,\nu_0}$, *cu proprietatea că*

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* [\nabla f_i(x^*) - \lambda_i^* \nabla g_i(x^*)] + \sum_{\omega=1}^{\nu_0} v_\omega^* \nabla G_{j_\omega}(x^*, t^\omega) + \sum_{\omega=\nu_0+1}^{\nu} v_\omega^* \nabla H_{k_\omega}(x^*, s^\omega) = 0. \quad (6.1)$$

Presupunem, de asemenea, că unul din următoarele seturi de condiții este îndeplinit:

a) (i) $(f_1, \dots, f_p)$ *este* $(\theta, F, \Delta, \bar{\rho})$*-V-invexă în* x^*;

(ii) $(-g_1, \dots, -g_p)$ *este* $(\xi, F, \Delta, \tilde{\rho})$*-V-invexă în* x^*;

(iii) $(v_1^* G_{j_1}(\cdot, t^1), \dots, v_{\nu_0}^* G_{j_{\nu_0}}(\cdot, t^{\nu_0}))$ *este* $(\pi, F, \Delta, \hat{\rho})$*-V-invexă în* x^*;

(iv) $(v_{\nu_0+1}^* H_{k_{\nu_0+1}}(\cdot, s^{\nu_0+1}), \dots, v_\nu^* H_{k_\nu}(\cdot, s^\nu))$ *este* $(\delta, F, \Delta, \breve{\rho})$*-V-invexă în* x^*;

(v) $\theta_i = \xi_j = \pi_k = \delta_\ell = \sigma$ *pentru orice* $i, j \in \overline{1,p}$, $k \in \nu_0$ *și* $\ell \in \overline{1,\nu} \setminus \overline{1,\nu_0}$;

(vi) $\sum_{i=1}^{p} u_i^* (\bar{\rho}_i + \lambda_i^* \tilde{\rho}_i) + \sum_{\omega=1}^{\nu_0} \hat{\rho}_\omega + \sum_{\omega=\nu_0+1}^{\nu} \breve{\rho}_\omega \geqq 0$;

b) funcția $(L_1(\cdot, u^*, v^*, \lambda^*, \bar{t}, \bar{s}), \dots, L_p(\cdot, u^*, v^*, \lambda^*, \bar{t}, \bar{s}))$ *este* $(\theta, F, \Delta, 0)$*-V-pseudoinvexă în* x^**, unde*

$$L_i(z, u^*, v^*, \lambda^*, \bar{t}, \bar{s}) = u_i^* \Big[f_i(z) - \lambda_i^* g_i(z) + \sum_{\omega=1}^{\nu_0} v_\omega^* G_{j_\omega}(z, t^\omega) + \sum_{\omega=\nu_0+1}^{\nu} v_\omega^* H_{k_\omega}(z, s^\omega) \Big], \quad i \in \overline{1,p}.$$

Atunci x^* *este o soluție eficientă pentru problema (P).*

În continuare, vom formula câteva condiții suficiente de eficiență în care proprietățile de invexitate, pseudoinvexitate şi quasiinvexitate sunt aplicate funcției vectoriale

$(\varepsilon_1(\cdot, \lambda, u), \dots, \varepsilon_p(\cdot, \lambda, u))$, unde $\varepsilon_i(z, \lambda, u) = u_i [f_i(z) - \lambda_i g_i(z)]$, $\forall i \in \overline{1,p}$, $z \in R^n$.

Teorema 6.1.9 *Fie* $x^* \in E$, $\lambda^* = \varphi(x^*)$*, funcțiile* f_i, g_i, $i \in \overline{1,p}$*, funcțiile* $G_j(\cdot, t)$, $H_k(\cdot, s)$ *diferențiabile* $\forall t \in T_j$, $j \in \overline{1,q}$, $\forall s \in S_k$, $k \in \overline{1,r}$ *şi să presupunem că există* $u^* \in U$, $0 \leqq \nu_0 \leqq \nu \leqq n+1$, ν_0 *indici cu* $1 \leqq j_\omega \leqq q$, ν_0 *puncte* $t^\omega \in \hat{T}_{j_\omega}(x^*)$, $\omega \in \overline{1,\nu_0}$, $\nu - \nu_0$ *indici cu* $1 \leqq k_\omega \leqq r$, $\nu - \nu_0$ *puncte* $s^\omega \in S_{k_\omega}$, $\omega \in \overline{1,\nu} \setminus \overline{1,\nu_0}$ *şi* ν *numere reale* $v_\omega^* > 0$ *pentru* $\omega \in \overline{1,\nu_0}$*, cu proprietatea că*

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* [\nabla f_i(x^*) - \lambda_i^* \nabla g_i(x^*)] + \sum_{\omega=1}^{\nu_0} v_\omega^* \nabla G_{j_\omega}(x^*, t^\omega) + \sum_{\omega=\nu_0+1}^{\nu} v_\omega^* \nabla H_{k_\omega}(x^*, s^\omega) = 0.$$

Presupunem, de asemenea, că unul din următoarele seturi de condiții este îndeplinit:

a) (i) $(\varepsilon_1(\cdot, \lambda^*, u^*), \dots, \varepsilon_p(\cdot, \lambda^*, u^*))$ *este* $(\theta, F, \Delta, \rho)$*-V-pseudoinvexă în* x^*;

(ii) ($v_1^* G_{j_1}(\cdot, t^1)$, ... , $v_{\nu_0}^* G_{j_{\nu_0}}(\cdot, t^{\nu_0})$) *este* (π, *F*, Δ, $\tilde{\rho}$)*-V-quasiinvexă în* x^*;

(iii) ($v_{\nu_0+1}^* H_{k_{\nu_0+1}}(\cdot, s^{\nu_0+1})$, ... , $v_\nu^* H_{k_\nu}(\cdot, s^\nu)$) *este* (δ, F, Δ, $\hat{\rho}$)-V-quasiinvexă *în* x^*;

(iv) $\rho + \tilde{\rho} + \hat{\rho} \geqq 0$;

b) (i) ($\varepsilon_1(\cdot, \lambda^*, u^*)$, ... , $\varepsilon_p(\cdot, \lambda^*, u^*)$) *este prestrict* ($\theta$, *F*, Δ, ρ)*-V-quasiinvexă în* x^*;

(ii) ($v_1^* G_{j_1}(\cdot, t^1)$, ... , $v_{\nu_0}^* G_{j_{\nu_0}}(\cdot, t^{\nu_0})$) *este* (π, *F*, Δ, $\tilde{\rho}$)*-V-quasiinvexă în* x^*;

(iii) ($v_{\nu_0+1}^* H_{k_{\nu_0+1}}(\cdot, s^{\nu_0+1})$, ... , $v_\nu^* H_{k_\nu}(\cdot, s^\nu)$) *este* (δ, *F*, Δ, $\hat{\rho}$)*-V-quasiinvexă în* x^*;

(iv) $\rho + \tilde{\rho} + \hat{\rho} > 0$;

c) (i) ($\varepsilon_1(\cdot, \lambda^*, u^*)$, ... , $\varepsilon_p(\cdot, \lambda^*, u^*)$) *este prestrict* ($\theta$, *F*, Δ, ρ)*-V-quasiinvexă în* x^*;

(ii) ($v_1^* G_{j_1}(\cdot, t^1)$, ... , $v_{\nu_0}^* G_{j_{\nu_0}}(\cdot, t^{\nu_0})$) *este strict* (π, *F*, Δ, $\tilde{\rho}$)*-V-pseudoinvexă în* x^*;

(iii) ($v_{\nu_0+1}^* H_{k_{\nu_0+1}}(\cdot, s^{\nu_0+1})$, ... , $v_\nu^* H_{k_\nu}(\cdot, s^\nu)$) *este* (δ, *F*, Δ, $\hat{\rho}$)*-V-quasiinvexă în* x^*;

(iv) $\rho + \tilde{\rho} + \hat{\rho} \geqq 0$;

d) (i) ($\varepsilon_1(\cdot, \lambda^*, u^*)$, ... , $\varepsilon_p(\cdot, \lambda^*, u^*)$) *este prestrict* ($\theta$, *F*, Δ, ρ)*-V-quasiinvexă în* x^*;

(ii) ($v_1^* G_{j_1}(\cdot, t^1)$, ... , $v_{\nu_0}^* G_{j_{\nu_0}}(\cdot, t^{\nu_0})$) *este* (π, *F*, Δ, $\tilde{\rho}$)*-V-quasiinvexă în* x^*;

(iii) ($v_{\nu_0+1}^* H_{k_{\nu_0+1}}(\cdot, s^{\nu_0+1})$, ... , $v_\nu^* H_{k_\nu}(\cdot, s^\nu)$) *este strict* (δ, *F*, Δ, $\hat{\rho}$)*-V-pseudoinvexă în* x^*;

(iv) $\rho + \tilde{\rho} + \hat{\rho} \geqq 0$;

Atunci x^* *este o soluție eficientă pentru problema (P).*

În continuare, vom formula o generalizare a schemelor de partiție propuse de B. Mond și T. Weir ([96]) pentru construcția problemelor duale generalizate de optimizare neliniară. Pentru aceasta vom folosi câteva notații suplimentare.

Fie ν_0 și ν cu $1 \leqq \nu_0 \leqq \nu \leqq n+1$ și $\{J_0, J_1, \dots, J_\Omega\}$, $\{K_0, K_1, \dots, K_\Omega\}$, partiții ale mulțimilor $\overline{1,\nu_0}$, respectiv $\overline{1,\nu} \setminus \overline{1,\nu_0}$. Astfel, $J_i \subseteq \overline{1,\nu_0}$ pentru orice $i \in \overline{1,\Omega} \cup \{0\}$, $J_i \cap J_j = \emptyset$ pentru orice $i, j \in \overline{1,\Omega} \cup \{0\}$ cu $i \neq j$ și $\bigcup_{i=0}^{\Omega} J_i = \overline{1,\nu_0}$. De asemenea, proprietăţi similare au loc şi pentru $\{K_0, K_1, \dots, K_\Omega\}$. Mai mult, dacă ω_1 şi ω_2 sunt numere din partiţiile mulţimilor $\overline{1,\nu_0}$ respectiv $\overline{1,\nu}\setminus\overline{1,\nu_0}$, atunci $\Omega = \max\{\omega_1, \omega_2\}$ şi $J_i = \emptyset$ sau $K_i = \emptyset$, pentru $i > \min\{\omega_1, \omega_2\}$.

În plus, vom defini funcţiile

$$\Phi_i(z,u,v,\lambda,\bar{t},\bar{s}) = u_i[f_i(z) - \lambda_i g_i(z) + \sum_{\omega\in J_0} v_\omega G_{j_\omega}(z, t^\omega) + \sum_{\omega\in K_0} v_\omega H_{k_\omega}(z, s^\omega)], \quad i\in\overline{1,p},$$

$$\Lambda_\tau(z,v,\bar{t},\bar{s}) = \sum_{\omega\in J_\tau} v_\omega G_{j_\omega}(z, t^\omega) + \sum_{\omega\in K_\tau} v_\omega H_{k_\omega}(z, s^\omega), \quad \tau\in\overline{1,\Omega},$$

unde $\bar{t} = (t^1, t^2, \dots, t^{\nu_0})$, $\bar{s} = (s^{\nu_0+1}, s^{\nu_0+2}, \dots, s^\nu)$.

Teorema 6.2.1 *Fie* $x^*\in E$, $\lambda^* = \varphi(x^*)$, *funcţiile* f_i, g_i, $i\in\overline{1,p}$, *funcţiile* $G_j(\cdot, t)$, $H_k(\cdot, s)$ *diferenţiabile* $\forall t\in T_j$, $j\in\overline{1,q}$, $\forall s\in S_k$, $k\in\overline{1,r}$ *şi să presupunem că există* $u^*\in U$, $0\leqq \nu_0 \leqq \nu \leqq n+1$, ν_0 *indici cu* $1\leqq j_\omega \leqq q$, ν_0 *puncte* $t^\omega \in \hat{T}_{j_\omega}(x^*)$, $\omega\in\overline{1,\nu_0}$, $\nu - \nu_0$ *indici cu* $1\leqq k_\omega \leqq r$, $\nu - \nu_0$ *puncte* $s^\omega \in S_{k_\omega}$, $\omega\in\overline{1,\nu}\setminus\overline{1,\nu_0}$ *şi* ν *numere reale* $v^*_\omega > 0$ *pentru* $\omega\in\overline{1,\nu_0}$, *cu proprietatea că*

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* [\nabla f_i(x^*) - \lambda_i^* \nabla g_i(x^*)] + \sum_{\omega=1}^{\nu_0} v_\omega^* \nabla G_{j_\omega}(x^*, t^\omega) + \sum_{\omega=\nu_0+1}^{\nu} v_\omega^* \nabla H_{k_\omega}(x^*, s^\omega) = 0.$$

Presupunem, de asemenea, că unul din următoarele seturi de condiţii este îndeplinit:

a) *(i)* $(\Phi_1(\cdot,u^*,v^*,\lambda^*,\bar{t},\bar{s}), \dots, \Phi_p(\cdot,u^*,v^*,\lambda^*,\bar{t},\bar{s}))$ *este* $(\theta, F, \Delta, \bar{\rho})$*-V-pseudoinvexă în* x^*;

(ii) $(\Lambda_1(\cdot,v^*,\bar{t},\bar{s}), \dots, \Lambda_\Omega(\cdot,v^*,\bar{t},\bar{s}))$ *este* $(\pi, F, \Delta, \tilde{\rho})$*-V-quasiinvexă în* x^*;

(iii) $\bar{\rho} + \tilde{\rho} \geqq 0$;

b) *(i)* $(\Phi_1(\cdot,u^*,v^*,\lambda^*,\bar{t},\bar{s}), \dots, \Phi_p(\cdot,u^*,v^*,\lambda^*,\bar{t},\bar{s}))$ *este prestrict* $(\theta, F, \Delta, \bar{\rho})$*-V-quasiinvexă în* x^*;

(ii) $(\Lambda_1(\cdot,v^*,\bar{t},\bar{s}), \dots, \Lambda_\Omega(\cdot,v^*,\bar{t},\bar{s}))$ *este* $(\pi, F, \Delta, \tilde{\rho})$*-V-quasiinvexă în* x^*;

(iii) $\bar{\rho} + \tilde{\rho} > 0$;

c) *(i)* $(\Phi_1(\cdot,u^*,v^*,\lambda^*,\bar{t},\bar{s}), \dots, \Phi_p(\cdot,u^*,v^*,\lambda^*,\bar{t},\bar{s}))$ *este prestrict* $(\theta, F, \Delta, \bar{\rho})$*-V-quasiinvexă în* x^*;

(ii) ($\Lambda_1(\cdot, v^*, \bar{t}, \bar{s}), \ldots, \Lambda_\Omega(\cdot, v^*, \bar{t}, \bar{s})$) *este strict* (π, *F*, Δ, $\tilde{\rho}$)*-V-pseudoinvexă în* x^**;*

(iii) $\bar{\rho} + \tilde{\rho} \geqq 0$.

Atunci x^* *este o soluție eficientă pentru problema (P).*

În continuare, vom formula două modele duale pentru problema (P) şi vom stabili câteva rezultate privind dualitatea slabă, dualitatea tare şi dualitatea strict inversă în ipotezele de (F, ρ)-V-invexitate.

Fie

$$H = \{(z, u, v, \lambda, \nu, \nu_0, J_{\nu_0}, K_{\nu\backslash\nu_0}, \bar{t}, \bar{s}) : z\in R^n, u\in U, 0\leqq \nu_0 \leqq \nu \leqq n+1, v\in R^\nu, v_i > 0,$$

$$1 \leqq i \leqq \nu_0, \; J_{\nu_0} = (j_1, j_2, \ldots, j_{\nu_0}), 1 \leqq j_i \leqq q, \; K_{\nu\backslash\nu_0} = (k_{\nu_0+1}, \ldots, k_\nu),$$

$$1 \leqq k_i \leqq r, \; \bar{t} = (t^1, t^2, \ldots, t^{\nu_0}), \; t^i \in T_{j_i}, \; \bar{s} = (s^{\nu_0+1}, s^{\nu_0+2}, \ldots, s^\nu), \; s^i \in S_{k_i} \}.$$

Vom presupune că funcțiile $f_i, g_i, i\in \overline{1,p}, G_j(\cdot, t), t\in T_j, j\in \overline{1,q}, H_k(\cdot, s) = 0, s\in S_k$, $k\in \overline{1,r}$ sunt diferențiabile.

Considerăm următoarea problemă:

$$\text{(D)} \qquad \sup_{(y, v, \nu, \nu_0, J\nu_0, K\nu\backslash\nu_0, \bar{t}, \bar{s})\in H} \Phi(z, u, v, \lambda, \bar{t}, \bar{s})$$

$$\text{cu} \quad \Phi_i(z, u, v, \lambda, \bar{t}, \bar{s}) = u_i[f_i(z) - \lambda_i g_i(z) + \sum_{\omega\in J_0} v_\omega G_{j_\omega}(z, t^\omega) + \sum_{\omega\in K_0} v_\omega H_{k_\omega}(z, s^\omega)], \quad i\in \overline{1,p},$$

$$\varepsilon_i(z, \lambda, u) = u_i[f_i(z) - \lambda_i g_i(z)], \quad i\in \overline{1,p},$$

$$\sum_{i=1}^{p} u_i [\nabla f_i(z) - \lambda_i \nabla g_i(z)] + \sum_{\omega=1}^{\nu_0} v_\omega \nabla G_{j_\omega}(z, t^\omega) + \sum_{\omega=\nu_0+1}^{\nu} v_\omega \nabla H_{k_\omega}(z, s^\omega) = 0, \quad (6.9)$$

$$\sum_{\omega\in J_\tau} v_\omega G_{j_\omega}(z, t^\omega) + \sum_{\omega\in K_\tau} v_\omega H_{k_\omega}(z, s^\omega) \geqq 0, \quad \tau\in \overline{1,\Omega}.$$

Teorema 6.3.1 (Dualitatea Slabă). *Fie x∈E şi w = (* $x^*, u^*, v^*, \lambda^*, \nu, \nu_0, J_{\nu_0}, K_{\nu\backslash\nu_0}$, $\bar{t}, \bar{s}$ *) soluții admisibile pentru problemele (P) şi (D), respectiv.*

Presupunem, de asemenea, că unul din următoarele seturi de condiții este îndeplinit:

a) (i) $(\Phi_1(\cdot, u^*, v^*, \lambda^*, \bar{t}, \bar{s}), \ldots, \Phi_p(\cdot, u^*, v^*, \lambda^*, \bar{t}, \bar{s}))$ *este prestrict (θ, F, Δ,* $\bar{\rho}$ *)-V-quasiinvexă în* x^**;*

(ii) ($\Lambda_1(\cdot, v^*, \bar{t}, \bar{s})$, … , $\Lambda_\Omega(\cdot, v^*, \bar{t}, \bar{s})$) *este strict* (π, *F*, Δ, $\tilde{\rho}$)*-V-pseudoinvexă în* x^**;*

(iii) $\bar{\rho} + \tilde{\rho} \geqq 0$.

b) (i) ($\Phi_1(\cdot, u^*, v^*, \lambda^*, \bar{t}, \bar{s})$, … , $\Phi_p(\cdot, u^*, v^*, \lambda^*, \bar{t}, \bar{s})$) *este* (θ, *F*, Δ, $\bar{\rho}$)*-V-pseudoinvexă în* x^**;*

(ii) ($\Lambda_1(\cdot, v^*, \bar{t}, \bar{s})$, … , $\Lambda_\Omega(\cdot, v^*, \bar{t}, \bar{s})$) *este* (π, *F*, Δ, $\tilde{\rho}$)*-V-quasiinvexă în* x^**;*

(iii) $\bar{\rho} + \tilde{\rho} \geqq 0$*;*

c) (i) ($\Phi_1(\cdot, u^*, v^*, \lambda^*, \bar{t}, \bar{s})$, … , $\Phi_p(\cdot, u^*, v^*, \lambda^*, \bar{t}, \bar{s})$) *este prestrict* (θ, *F*, Δ, $\bar{\rho}$)*-V-quasiinvexă în* x^**;*

(ii) ($\Lambda_1(\cdot, v^*, \bar{t}, \bar{s})$, … , $\Lambda_\Omega(\cdot, v^*, \bar{t}, \bar{s})$) *este* (π, *F*, Δ, $\tilde{\rho}$)*-V-quasiinvexă în* x^**;*

(iii) $\bar{\rho} + \tilde{\rho} > 0$*;*

Atunci $\varepsilon(x, \lambda^*, u^*) \nleq \Phi(x^*, u^*, v^*, \lambda^*, \bar{t}, \bar{s})$.

VII. Exemple

În acest capitol am considerat exemple pentru anumite clase de aplicații considerate în lucrare. Aceste exemple completează pe cele care apar în literatură ([8], [50], [140]) pentru concepte utilizate în diferite capitole. Astfel am avut în vedere exemple pentru concepte privind funcțiile ρ-invexe, ρ-pseudoinvexe, ρ-slab pseudoinvexe, ρ-slab strict pseudoinvexe, ρ-tare pseudoinvexe, ρ-quasiinvexe, ρ-slab quasiinvexe, ρ-tare quasiinvexe şi pentru probleme de optimizare multiobiectiv cu funcții obiectiv de tip fuzzy.

Din definiția funcției ρ-quasiinvexă şi funcției ρ-slab quasiinvexă este evident că orice funcție ρ-quasiinvexă este ρ-slab quasiinvexă, în raport cu aceeaşi funcție η. Reciproca acestei proprietăți este falsă după cum vom vedea din exemplul următor.

Exemplul 7.1.1 Fie $X = R$ şi $f : X \to R^2$, $f = (f_1, f_2)$ cu $f_1(x) = x^2(x-3)$ şi $f_2(x) = x(x-3)^2$, $\rho = (0, 1)$, $\eta(x, \bar{x}) = x - \bar{x}$, $\bar{x} = 0$. Avem că f este funcție ρ-slab quasiinvexă în $\bar{x}$, deoarece

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \le f(\bar{x}) \Rightarrow (x^2(x-3),\ x(x-3)^2) \le (0, 0) \Rightarrow x < 0 \\ \nabla f(x) = (2x(x-3) + x^2,\ (x-3)^2 + 2x(x-3)) \Rightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) = (0, 9x) \\ -\rho d(x, \bar{x}) = -(0, 1)|x| = (0, x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \leqq -\rho d(x, \bar{x}).$$

$$\text{Pentru } x = 3 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} f(x) \leqq f(\bar{x}) \\ \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) = (0, 27) \\ -\rho d(x, \bar{x}) = (0, -3) \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \nleqq -\rho d(x, \bar{x}) \Rightarrow f \text{ nu este}$$

funcție ρ-quasiinvexă în $\bar{x}$, în raport cu η.

Din definiția funcției ρ-slab strict pseudoinvexă şi funcției ρ-tare pseudoinvexă este evident că orice funcție ρ-slab strict pseudoinvexă este ρ-tare pseudoinvexă, în raport cu aceeaşi funcție η. Reciproca acestei proprietăți este falsă după cum vom vedea din exemplul următor.

Exemplul 7.1.2 Fie X = R şi $f : X \to R^2$, $f = (f_1, f_2)$ cu $f_1(x) = x^5$ şi $f_2(x) = x(x+3)^2$, $\rho = (0, 2)$, $\eta(x, \bar{x}) = x$, $\bar{x} = 0$. Avem că f este funcție ρ-tare pseudoinvexă în $\bar{x}$, deoarece

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq f(\bar{x}) \Rightarrow (x^5, x(x+3)^2) \leq (0, 0) \Rightarrow x < 0 \\ \nabla f(x) = (5x^4, (x+3)^2 + 2x(x+3)) \Rightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) = (0, 9x) \\ -\rho d(x, \bar{x}) = -(0, 2)|x| = (0, 2x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \leq -\rho d(x, \bar{x}).$$

$$\text{Pentru } x = -2 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) = (0, -18) \\ -\rho d(x, \bar{x}) = (0, -4) \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \nless -\rho d(x, \bar{x}) \Rightarrow f \text{ nu este}$$

funcție ρ-slab strict pseudoinvexă în $\bar{x}$, în raport cu η.

Din definiția funcției ρ-invexă şi funcției ρ-slab pseudoinvexă este evident că orice funcție ρ-invexă este ρ-slab pseudoinvexă, în raport cu aceeaşi funcție η. Reciproca acestei proprietăți este falsă după cum vom vedea din exemplul următor.

Exemplul 7.1.3 Fie X = R şi $f : X \to R^2$, $f = (f_1, f_2)$ cu $f_1(x) = x(x + 4)$ şi $f_2(x) = x(x+4)^2$, $\rho = (1, 0)$, $\eta(x, \bar{x}) = x + \bar{x}$, $\bar{x} = 0$. Avem că f este funcție ρ-slab pseudoinvexă în $\bar{x}$, deoarece

$$\left.\begin{array}{l} f(x) < f(\bar{x}) \Rightarrow (x(x+4), x(x+4)^2) < (0, 0) \Rightarrow x \in (-4, 0) \\ \nabla f(x) = (x + 4 + x, (x+4)^2 + 2x(x+4)) \Rightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) = (4x, 16x) \\ -\rho d(x, \bar{x}) = -(1, 0)|x| = (x, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \leq -\rho d(x, \bar{x}).$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Pentru } x = -9 \Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) = (45, -225) \\ \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) = (-36, -144) \\ \rho d(x, \bar{x}) = (9, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) \not\geqq \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) + \rho d(x, \bar{x}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f nu este funcție ρ-invexă în $\bar{x}$, în raport cu η.

Exemplul 7.1.7 Considerăm următoarea problemă de programare multiobiectiv cu funcții obiectiv de tip fuzzy

$$\text{Min } \tilde{f}(x) = (\tilde{f}^{(1)}(x_1,...,x_5),\ \tilde{f}^{(2)}(x_1,...,x_5)), \qquad (P_1)$$

cu $\tilde{f}^{(1)}(x_1,...,x_5) = (\widetilde{-1} \otimes \tilde{1}_{\{x_1\}}) \oplus (\widetilde{-3} \otimes \tilde{1}_{\{x_2\}}) \oplus (\widetilde{-6} \otimes \tilde{1}_{\{x_3\}}) \oplus (\widetilde{-1} \otimes \tilde{1}_{\{x_4\}}) \oplus (\widetilde{-4} \otimes \tilde{1}_{\{x_5\}})$

$\tilde{f}^{(2)}(x_1,...,x_5) = (\widetilde{-5} \otimes \tilde{1}_{\{x_1\}}) \oplus (\widetilde{-1} \otimes \tilde{1}_{\{x_2\}}) \oplus (\widetilde{-3} \otimes \tilde{1}_{\{x_3\}}) \oplus (\widetilde{-2} \otimes \tilde{1}_{\{x_4\}})$

$$6x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 3x_4 + 4x_5 \leqq 42$$

$$11x_1 + 6x_2 + 17x_3 + 5x_4 + 7x_5 \leqq 77$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0,$$

unde $\widetilde{-1} = (-2, -1, 1)$, $\widetilde{-2} = (-3, -2, -1)$, $\widetilde{-3} = (-4, -3, -1)$, $\widetilde{-4} = (-5, -4, -2)$, $\widetilde{-5} = (-6, -5, -4)$, $\widetilde{-6} = (-7, -6, -5)$, sunt numere fuzzy triunghiulare.

Fie $g_1(x_1,...,x_5) = 6x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 42$

$g_2(x_1,...,x_5) = 11x_1 + 6x_2 + 17x_3 + 5x_4 + 7x_5 - 77$

$g_j(x_1,...,x_5) = -x_{j-2}$, pentru $j \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Folosind noțiunile din § IV.1 obținem că

$$(\tilde{f}^{(1)})^L_\alpha(x_1,...,x_5) = (\alpha - 2)x_1 + (\alpha - 4)x_2 + (\alpha - 7)x_3 + (\alpha - 2)x_4 + (\alpha - 5)x_5,$$

$$(\tilde{f}^{(2)})^L_\alpha(x_1,...,x_5) = (\alpha - 6)x_1 + (\alpha - 2)x_2 + (\alpha - 4)x_3 + (\alpha - 3)x_4,$$

$$(\tilde{f}^{(1)})^U_\alpha(x_1,...,x_5) = (1 - 2\alpha)x_1 + (-1 - 2\alpha)x_2 + (-5 - \alpha)x_3 + (1 - 2\alpha)x_4 + (-2 - 2\alpha)x_5,$$

$$(\tilde{f}^{(2)})^U_\alpha(x_1,...,x_5) = (-4 - \alpha)x_1 + (1 - 2\alpha)x_2 + (-1 - 2\alpha)x_3 + (-1 - \alpha)x_4,$$

pentru orice $\alpha \in [0, 1]$, de unde rezultă că

$$\nabla(\tilde{f}^{(1)})^L_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha-2 \\ \alpha-4 \\ \alpha-7 \\ \alpha-2 \\ \alpha-5 \end{pmatrix}, \qquad \nabla(\tilde{f}^{(2)})^L_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha-6 \\ \alpha-2 \\ \alpha-4 \\ \alpha-3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla(\tilde{f}^{(1)})^U_\alpha(x) = \begin{pmatrix} 1-2\alpha \\ -1-2\alpha \\ -5-\alpha \\ 1-2\alpha \\ -2-2\alpha \end{pmatrix}, \ \nabla(\tilde{f}^{(2)})^U_\alpha(x) = \begin{pmatrix} -4-\alpha \\ 1-2\alpha \\ -1-2\alpha \\ -1-\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \ \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 17 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Din rezolvarea ecuațiilor $g_1(x) = g_2(x) = 0$ obținem

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (0, 1.5, 4, 0, 0).$$

Deoarece $g_4(x^*) = -1.5$ şi $g_5(x^*) = -4$ rezultă că $\mu_4(\alpha) = \mu_5(\alpha) = 0.$

Aplicăm noțiunile din § IV.1 pentru x^* şi obținem că

$$\nabla(\tilde{f}^{(1)})^L_\alpha(x^*) + \nabla(\tilde{f}^{(2)})^L_\alpha(x^*) + \nabla(\tilde{f}^{(1)})^U_\alpha(x^*) + \nabla(\tilde{f}^{(2)})^U_\alpha(x^*) + \sum_{j=1}^{7}\mu_j(\alpha)\cdot\nabla g_j(x^*) =$$

$$= \begin{pmatrix} -11-\alpha+6\mu_1+11\mu_2-\mu_3 \\ -6-2\alpha+4\mu_1+6\mu_2 \\ -17-\alpha+9\mu_1+17\mu_2 \\ -5-\alpha+3\mu_1+5\mu_2-\mu_6 \\ -7-\alpha+4\mu_1+7\mu_2-\mu_7 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mu_1(\alpha) = 2\alpha,\ \mu_2(\alpha) = 1-\alpha \text{ şi } \mu_j(\alpha) = 0,$$

pentru $j \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\lambda_1^L(\alpha) = \lambda_2^L(\alpha) = \lambda_1^U(\alpha) = \lambda_2^U(\alpha) = 1$, $\forall \alpha \in [0, 1] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x^* = (0, 1.5, 4, 0, 0)$ este soluție optimă Pareto pentru problema (P_1).

Listă de lucrări

(Lucrările L13 – L19 se bazează pe rezultate incluse în prezenta teză şi nu sunt incluse la Bibliografie)

L1 - **T. Mihalcea**, *On second order optimality conditions*, A 11-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2008.

L2 - **T. Mihalcea**, *Second order necessary conditions of the Kuhn-Tucker type under new constraint qualifications*, A 12-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2009.

L3 - **T. C. Mihalcea**, *On second order optimality conditions*, The 9th Balkan Conference on Operational Research BALCOR 2009, September 2009.

L4 - **T. Mihalcea**, *Second-Order Optimality Conditions with Mangasarian-Fromovitz constraint qualification*, A 13-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2010.

L5 - **T. Mihalcea**, *Second-Order Optimality Conditions in Multiobjective Optimization Problems*, The 2nd International Conference on Operational Research ICOR 2010, September 2010.

L6 - **T. Mihalcea**, *Second order optimality conditions and duality in multiobjective programming*, A 14-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2011.

L7 - **T. Mihalcea**, *Optimality conditions and duality in multiobjective optimization involving generalized type I functions*, A 15-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2012.

L8 - **T. C. Mihalcea**, *Second-order optimality conditions for multiobjective optimization problems with fuzzy-valued objective functions*, A 16-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2013.

L9 - **T. Mihalcea**, *Duality for multiobjective programming involving second order generalized type I functions*, Mathematical Reports, Vol. 15, 3 (2013), 177-186.

L10 - **T. Mihalcea**, *Optimality and duality in multiobjective programming with fuzzy-valued objective functions under generalized type-I invexity*, The 21ST Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2013, September 2013.

L11 - **T. C. Mihalcea**, *Higher-order optimality conditions and duality results for a vector optimization problem over cones*, A 17-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2014.

L12 - C. Niculescu and **Toni Mihalcea**, *Second-order optimality conditions in interval optimization problems*, - trimis spre publicare în Scientific Bulletin of University ,,Politehnica'' of Bucharest.

L13 - **T. Mihalcea**, *Optimality under (Φ, r)-convexity for a class of optimization problem*-to be sumitted.

L14 - **T. Mihalcea**, *Optimality with (α^0, m_0) weak minima and duality with V-ρ-invexity for an interval optimization problem*-to be sumitted.

L15 - **T. Mihalcea**, *Optimality and duality for a nonlinear fuzzy optimization problem*-to be sumitted.

L16 - V. Preda and **T. Mihalcea**, *New results on higher-order cone-pseudoconvex, quasiconvex and other related functions in multiobjective optimization*-to be sumitted.

L17 - V. Preda and **T. Mihalcea**, *Higher-order F-cone-pseudoconvex, F-cone-quasiconvex and other related functions in multiobjective optimization*-to be sumitted.

L18 - **T. Mihalcea**, *On global parametric sufficient efficiency conditions for semiinfinite multiobjective fractional programming problems containing generalized (α, F, Δ, ρ)-V- invex functions*-to be sumitted.

L19 - **T. Mihalcea**, *Some duality models for semiinfinite multiobjective fractional programming problems containing generalized (α, F, Δ, ρ)-V-invex functions*-to be sumitted.

BIBLIOGRAFIE

[1] J. Abadie, *On Kuhn-Tucker Theorem, in Nonlinear Programming*, Abadie, J.,ed. North Holland, Amsterdam, (1967), 21-36.

[2] El B. Abdouni and L. Thibault, *Lagrange multipliers for Pareto nonsmooth programming problems in Banach spaces*, Optimization 26, (1992), 277-285.

[3] S. Aggarwal, *Some Contributions to Multiobjective Programming*, Ph. D. thesis submitted to the Department of Mathematics, University of Delhi, India, 1991.

[4] B. Aghezzaf and M. Hachimi, *Generalized invexity and duality in multiobjective programming problems*, J. Global Optim. 18, (2000), 91 – 101.

[5] B. Aghezzaf and M. Hachimi, *Second Order Optimality Conditions in Multiobjective Optimization Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications 102, (1999), 37-50.

[6] B. Aghezzaf and M. Hachimi, *Sufficiency and Duality in Multiobjective Programming involving Generalized (F, ρ)-Convexity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 258, (2001), 617-628.

[7] B. Aghezzaf and M. Hachimi, *Sufficient conditions in multiobjective optimization Problems*, Cinquimes Journees d'Analyse Numerique et Optimisation, Kenitra, Maroc 28-30 Avril 1998.

[8] B. Aghezzaf and M. Hachimi, *Sufficient Optimality Conditions and Duality in Multiobjective Optimization involving Generalized Convexity*, Numerical Functional Analysis and Optimization 22, (2001), 775-788.

[9] B. Aghezzaf, *Second order mixed type duality in multiobjective programming problems*, J. Math. Anal. Appl. 285, (2003), 97 – 106.

[10] B. Aghezzaf, *Second-order necessary and sufficient conditions of Kuhn-Tucker type in multiobjective optimization problems*, In: Twelfth International Conference on Multiobjective Criteria Decision Making, Fernuniversitat Hagen, Hagen, Germany, 1995.

[11] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez and M. L. Schuverdt, *On augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints*, SIAM J. Control Optim. 18, (2007), 1286–1309.

[12] R. Andreani, G. Haeser and J. M. Martínez, *On sequential optimality conditions for smooth constrained optimization*, Optimization (2010), doi:10.1080/02331930903578700

[13] R. Andreani, J. M. Martínez and M. L. Schuverdt, *On second-order optimality conditions for nonlinear programming*, Optimization 56, (2007), 529–542.

[14] R. Andreani, J. M. Martínez and M. L. Schuverdt, *On the relation between the Constant Positive Linear Dependence condition and quasinormality constraint qualification*, J. Optim. Theory Appl. 125, (2005), 473-485.

[15] T. Antczak, *A Class of B-(p, r)-invex Functions and Mathematical Programming*, Journal of Mathematical Analysis and Its Applications 286, (2003), 187-206.

[16] T. Antczak, *On (p, r)-invexity-type Nonlinear Programming Problems*, Journal of Mathematical Analysis and Its Applications 264, (2001), 382-397.

[17] T. Antczak, *r-preinvexity and r-invexity in Mathematical Programming*, Computers and Mathematics with Applications 50, (2005), 551-566.

[18] T. M. Apostol, *Mathematical analysis* (2nd ed.). Addison-Wesley Publishing Company, (1974).

[19] A. Auslender and M. Teboulle, *Lagrangian duality and related multiplier methods for variational inequality problems*, SIAM J. Control Optim. 10, (1999), 1097–1115.

[20] H. T. Banks and M. Q. Jacobs, *A differential calculus for multifunctions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 29, (1970), 246-272.

[21] M. S. Bazarra, H. D. Sherali and C.M. Shetty, *Nonlinear programming*, New York, Wiley, (1993).

[22] M. S. Bazarra, H. D. Sherali and C.M. Shetty, *Nonlinear programming: Theory and Algorithms*, Wiley, New York, Third Edition, (2006).

[23] C. R. Bector, S. Chandra and I. Husain, *Second order duality for a minimax programming problem*, Opsearch 28, (1991), 249-263.

[24] C. R. Bector, S. K. Suneja, C. S. Lalita, *Generalized B-vex Functions and Generalized B-vex Programming*, Journal of Optimization Theory and Its Applications 76, (1993), 561-576.

[25] A. Ben-Israel and B. Mond, *What is Invexity?*, Journal of Australian Mathematical Society Series B 28, (1986), 1-9.

[26] H. P. Benson, *An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones*, J. Math. Anal. App. 71, (1979), 232-241.

[27] M. Bhatia, *Higher order duality in vector optimization over cones*, Optim. Lett. (2010). doi: 10.1007/s11590-010-0248-0.

[28] J. R. Birge and F. Louveaux, *Introduction to stochastic programming*, New York, Physica-Verlag, (1997).

[29] F. Blaso, E. Cuchillo-Ibanez, M. A. Moron, and C. Romero, *On the monotonocity of the compromise set in multicriteria problems*, J. Optim. Theory Appl. 102, No. 1 (1999), 69-82.

[30] G. Caristi, M. Ferrara and A. Stefanescu, *Mathematical programming with* (Φ, ρ)*-invexity*, Generalized Convexity and Related Topics (2006), 167-176.

[31] S. Chanas and D. Kuchta, *Multiobjective programming in optimization of interval objective functions – A generalized approach*, Eur. J. Oper. Res. 94, (1996), 594-598.

[32] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York, (1983).

[33] B. D. Craven, *Invex functions and constrained local minima*, Bull. Austral. Math. Soc. 24, (1981), 357-366.

[34] N. O. Da Cunha and E. Polak, *Constrained Minimization Under Vector-Valued Criteria in Finite Dimensional Spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 19, (1967), 103-124.

[35] M. Delgado, J. Kacprzyk, J-L. Verdegay and M. A. Vila (Eds.), *Fuzzy optimization: Recent advances*, New York, Physica-Verlag, (1994).

[36] R. Egudo and M. A. Hanson, *Second order duality in multiobjective programming*, Opsearch 30(3), (1993), 223-230.

[37] R. Egudo, *Efficiency and Generalized Convex Duality for Multiobjective Programs*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 138 (1989), 84-94.

[38] F. Facchinei and J. S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer, New York, (2003).

[39] R. Gárciga-Otero and B. F. Svaiter, *A new condition characterizing solutions of variational inequality problems*, J. Optim. Theory Appl. 137, (2008), 89–98.

[40] A. M. Geoffrion, *Proper efficiency and theory of vector maximization*, J. Math. Anal. Appl. 22, (1968), 618-630.

[41] T.R. Gulati and S.K. Gupta, *Higher order non-differentiable symmetric duality with generalized F-convexity*, J. Math. Anal. Appl. 329, (2007), 229-237.

[42] M. Hachimi and B. Aghezzaf, *Second Order Duality in Multiobjective Programming Involving Generalized Type I Functions*, Numerical Functional Analysis and Optimization 25, (2004), 725-736.

[43] M. Hachimi and B. Aghezzaf, *Sufficiency and duality in differentiable multiobjective programming involving generalized type I functions*, J. Math. Anal. Appl. 296, (2004), 382-392.

[44] M. Hachimi, *Optimality Conditions and Duality in Multiobjective Programming* (in French), Thesis, Hassan II University, Morocco (2000).

[45] G. Haeser and M. L. Schuverdt, *On Approximate KKT Condition and its Extension to Continuous Variational Inequalities*, J. Optim. Theory Appl. 149, (2011), 528-539.

[46] G. Haeser, *Condições sequenciais de otimalidade*, Ph.D. Thesis, UNICAMP, (2009).

[47] M.A. Hanson and B. Mond, *Convex Transformable Programming Problems and Invexity*, Journal of Information and Optimization Sciences 8, (1987), 201-207.

[48] M. A. Hanson and B. Mond, *Further Generalizations of Convexity in Mathematical Programming*, Journal of Information & Optimization Sciences 3, (1982), 25-32.

[49] M. A. Hanson and B. Mond, *Necessary and Sufficiency Conditions in Constrained Optimization*, Mathematical Programming 37, (1987), 51-58.

[50] M. A. Hanson, R. Pini and C. Singh, *Multiobjective Programming under Generalized Type I Invexity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 261, (2001), 562-577.

[51] M. A. Hanson, *On Sufficiency of the Kuhn-Tucker Conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 80, (1981), 545-550.

[52] M. R. Hestenes, *Optimization Theory-The Finite-Dimensional Case*, Wiley, New York, (1975).

[53] R. Horst, P. M. Pardalos and N. V. Thoai, *Introduction to global optimization* (2^{nd} ed.), Boston, Kluwer Academic Publishers, (2000).

[54] E. Hosseinzade and H. Hassanpour, *The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in interval-valued multiobjective programming problems*, J. Appl. Math. Inform. 29, (2011), 1157-1165.

[55] H. Ishibuchi and H. Tanaka, *Multiobjective programming in optimization of the interval objective function*, Eur. J. Oper. Res. 48, (1990), 219-225.

[56] A. N. Iusem and M. Nasri, *Augmented Lagrangian methods for variational inequality problems*, RAIRO. Rech. Opér. 44, (2010), 5–25.

[57] V. Jeyakumar and B. Mond, *On generalized convex mathematical programming*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 34, (1992), 43-53.

[58] V. Jeyakumar and X. Q. Yang, *Convex composite multiobjective nonsmooth programming*, Math. Programming 59, (1993), 325-343.

[59] V. Jeyakumar and A. Zaffaroni, *Asymptotic conditions for weak and proper optimality in infinite-dimensional convex vector optimization*, Numer. Funct. Anal. Optim. 17, (1996), 323-343.

[60] V. Jeyakumar, *Equivalence of saddle points and optima and duality for a class of nonsmooth nonconvex problems*, J. Math. Anal. Appl. 30, (1988), 334-343.

[61] V. Jeyakumar, *Strong and weak invexity in mathematical programming*, Math. Oper. Res. 55, (1985), 109-125.

[62] R. N. Kaul, S.K. Suneja and M.K. Srivastava, *Optimality Criteria and Duality in Multiple-Objective Optimization Involving Generalized Invexity*, Journal of Optimization Theory and Applications 80, (1994), 465-482.

[63] H. Kawasaki, *Second-Order Necessary Conditions of the Kuhn-Tucker Type under New Constraint Qualification*, J. Optim. Theory Appl. 57, (1988), 253-264.

[64] H. W. Kuhn and A. W. Tucker, *Nonlinear Programming. In: J. Neyman, Second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, University of California Press, Berkeley, (1951).

[65] H. Kuk, *Nonsmooth multiobjective programs with V-ρ-invexity*, Indian J. Pure Appl. Math. 29, (1998), 405 – 412.

[66] Y-J. Lai and C-L. Hwang, *Fuzzy mathematical programming: Methods and applications*, Lecture notes in economics and mathematical systems (Vol. 394), New York, Springer, (1992).

[67] Y-J. Lai and C-L. Hwang, *Fuzzy Multiple objective decision making: Methods and applications*, Lecture notes in economics and mathematical systems (Vol. 404), New York, Springer, (1994).

[68] Z. F. Li, *Benson proper efficiency in the vector optimization of set-valued maps*, J. Optim. Theory Appl. 98, No. 3 (1998), 623-650.

[69] J. G. Lin, *Maximal vectors and Multiobjective Optimization*, J. Optim. Theory Appl. 18, (1976), 41-64.

[70] T. Maeda, *Constraint qualifications in multiobjective optimization problems*: *Differentiable case*, J. Optim. Theory Appl. 80, (1994), 483-500.

[71] D. G. Mahadjan and M. N. Vartag, *Generalizations of Some Duality Theorems in Nonlinear Programming*, Mathematical Programming 12, (1977), 293-317.

[72] O. L. Mangasarian and S. Fromovitz, *The Fritz-John necessary optimality conditions in presence of equality and inequality constraints*, J. Math. Anal. Appl. 17, (1967), 37-47.

[73] O. L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, Mc Graw Hill, New York (1969).

[74] O. L. Mangasarian, *Second and higher-order duality in nonlinear programming*, J. Math. Anal. Appl. 51, (1975), 607-620.

[75] D. H. Martin, *The Essence of Invexity*, J. Opt. Theory Appl. 47, (1985), 65-76.

[76] J.M. Martinez and E. A. Pilotta, *Inexact restoration algorithms for constrained optimization*, J. Optim. Theory Appl. 104, (2000), 135-163.

[77] J.M. Martinez and E. A. Pilotta, *Inexact restoration methods for nonlinear programming: advances and perspectives*, In: L. Q. Qi, K. L. Teo, X. Q. Yang (eds), Optimization and Control with Applications, Berlin, (2005), 271-292.

[78] J. M. Martínez and B. F. Svaiter, *A practical optimality condition without constraint qualifications for nonlinear programming*, J. Optim. Theory Appl. 118, (2003), 117-133.

[79] J. M. Martínez, *Inexact restoration method with Lagrangian tangent decrease and new merit function for nonlinear programming*, J. Optim. Theory Appl. 111, (2001), 39–58.

[80] I. Marusciac, *On Fritz John type Optimality Criterion in Multiobjective Optimization*, L'Analyse Numérique et la Theorie de l'Approximation 11, (1982), 109-114.

[81] **T. Mihalcea**, *On second order optimality conditions*, A 11-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2008.

[82] **T. Mihalcea**, *Second order necessary conditions of the Kuhn-Tucker type under new constraint qualifications*, A 12-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2009.

[83] **T. C. Mihalcea**, *On second order optimality conditions*, The 9th Balkan Conference on Operational Research BALCOR 2009, September 2009.

[84] **T. Mihalcea**, *Second-Order Optimality Conditions with Mangasarian-Fromovitz constraint qualification*, A 13-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2010.

[85] **T. Mihalcea**, *Second-Order Optimality Conditions in Multiobjective Optimization Problems*, The 2nd International Conference on Operational Research ICOR 2010, September 2010.

[86] **T. Mihalcea**, *Second order optimality conditions and duality in multiobjective programming*, A 14-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2011.

[87] **T. Mihalcea**, *Optimality conditions and duality in multiobjective optimization involving generalized type I functions*, A 15-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2012.

[88] **T. C. Mihalcea**, *Second-order optimality conditions for multiobjective optimization problems with fuzzy-valued objective functions*, A 16-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2013.

[89] **T. Mihalcea**, *Duality for multiobjective programming involving second order generalized type I functions*, Mathematical Reports, Vol. 15, 3 (2013), 177-186.

[90] **T. Mihalcea**, *Optimality and duality in multiobjective programming with fuzzy-valued objective functions under generalized type-I invexity*, The 21ST Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2013, September 2013.

[91] **T. C. Mihalcea**, *Higher-order optimality conditions and duality results for a vector optimization problem over cones*, A 17-a Conferință a Societății de Probabilități şi Statistică din România, aprilie 2014.

[92] S. K. Mishra and R.N. Mukherjee, *On generalized convex multiobjective nonsmooth programming*, J. Austr. Math. Soc. Ser. B 38, (1996), 140-148.

[93] S. K. Mishra, S. Y. Wang and K. K. Lai, *On Non-smooth, α-invex Functions and Vector Variational-like Inequality*, Optimization Letters 02, (2008), 91-98.

[94] S.K. Mishra, *Lagrange multipliers saddle points and scalarizations in composite multiobjective nonsmooth programming*, Optimization 38, (1996), 93-105.

[95] B. Mond and T. Weir, *Duality for fractional programming with generalized convex conditions*, J. Inform. Optim. Sci. 3, (1982), 105-124.

[96] B. Mond and T. Weir, *Generalized Concavity and Duality*, In: Generalized Concavity in Optimization and Economics (S. Schaible and W. T. Ziemba, eds), Academic Press, New York, (1981), 263-279.

[97] B. Mond, *Second order duality for nonlinear programmes*, Opsearch 11, (1974), 90-99.

[98] C. Niculescu, *Sufficient optimality conditions and duality in multiobjective fractional programming involving generalized d-type-I functions*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome 53(101) No.1, (2010), 25-34.

[99] C. Niculescu and **T. Mihalcea**, *Second-order optimality conditions in interval optimization problems*, - trimis spre publicare în Scientific Bulletin of University ,,Politehnica'' of Bucharest.

[100] E. Ning, W. Song and Y. Zhang, *Second order sufficient optimality conditions in vector optimization*, J. Global Optim. 54, (2012), 537-549.

[101] R. Pini and C. Singh, *A survey of recent [1985-1995] advances in generalized convexity with applications to duality theory and optimality conditions*, Optimization 39, (1997), 311-360.

[102] V. Preda and A. Batatorescu, *On duality for minmax generalized B-vex programming involving n-set functions*, Journal of Convex Analysis, vol 9,2 (2002), 609-623.

[103] V. Preda, C. Balcau and C. Niculescu, *On multiobjective fractional programming involving generalized d-type-I relative to bifunctions and related functions*, Mathematical Reports, Vol. 14, 1 (2012), 95-106.

[104] V. Preda, M. Beldiman and E.C. Baibarac, *Optimality conditions and higher-order duality for a nondifferentiable mathematical programming class*, Mathematical Reports, Vol. 10, 4 (2008), 375-384.

[105] V. Preda and I.Chitescu, *On constraint qualifications in multiobjective optimization problems semidifferentiable case*, J. Optim. Theory Appl, 2000.

[106] V. Preda and I.M. Stancu-Minasian, *Mond-Weir duality for multiobjective mathematical programming of n-set functions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 44, (1999), 629-644.

[107] V. Preda and I.M. Stancu-Minasian, *Optimality and Wolfe duality for d-type I functions*, Proc.of Rom. Acad. (2001).

[108] V. Preda, I.M. Stancu-Minasian, M. Beldiman and A.M. Stancu, *Generalized V-univexity type-I for multiobjective programming problems with n-set functions*, Journal of Global Optimization, Vol. 44, No. 1 (2009), 131-148.

[109] V. Preda, I.M. Stancu-Minasian, M. Beldiman and A.M. Stancu, *On a general duality model in multiobjective fractional programming with n-set functions*, Mathematical and Computer Modeling, Vol. 54, 1-2 (2011), 490-496.

[110] V. Preda, I.M. Stancu-Minasian, M. Beldiman and A.M. Stancu, *Optimality and duality for multiobjective programming with generalized V-type I univexity and related n-set functions*, Proc. Rom. Acad. Ser. A 6, No. 3 (2005), 183-191.

[111] V. Preda, I.M. Stancu-Minasian and E. Koller, *On optimality and duality for multiobjective programming problems involving generalized d-type-I and related n-set functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 283 (2003), 114-128.

[112] V. Preda, *Generalized invex duality for vector programs*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., (1993).

[113] V. Preda, *Nondifferentiable mathematical programs.Optimality and higher-order duality results*, Proceedings of the Romanian Academy. Series A-Mathematics, Physics, Technical Sciences, Information Sciences Vol. 9, 3 (2008), 179-183.

[114] V. Preda, *On duality with generalized convexity*, Ballettino della Unione Matematica Italiana Volume 5A, 3 (1991), 291-305.

[115] V. Preda, *On efficiency and duality for multiobjective programs*, J. Math. Anal. Appl. 166, (1992), 365-377.

[116] V. Preda, *On optimality and duality in multiobjective nonsmooth programming*, Advances in Multiple Objective and Goal Programming, 2000.

[117] A. Prekopa, *Stochastic programming*, Boston: Kluwer Academic Publishers, (1995).

[118] M. M. Rizvi and M. Nasser, *New second-order optimality conditions in multiobjective optimization problems: Differentiable case*, J. Indian Inst. Sci. 86, (2006), 279-286.

[119] N. G. Rueda and M. A. Hanson, *Optimality criteria in mathematical programming involving generalized invexity*, J. Math. Anal. Appl. 130, (1988), 375-385.

[120] Y. Sawaragi, H. Nakayama and T. Tanino, *Theory of Multiobjective Optimization*, Orlando, Florida: Academic Press, (1985).

[121] S. Schaible, *Duality in Fractional Programming: A Unified Approach*, Operations Research 24, (1976), 452-461.

[122] M. L. Schuverdt, *Métodos de Lagrangiano aumentado com convergência utilizando a condição de dependência linear positiva constante*, Ph.D. Thesis, UNICAMP, (2006).

[123] C. Singh, *Optimality Conditions in Multiobjective Differentiable Programming*, Journal of Optimization Theory and Applications 53, (1987), 115-123.

[124] H. Slimani and M. S. Radjef, *Duality for Nonlinear Programming under Generalized Kuhn-Tucker Condition*, International Journal of Optimization: Theory, Methods and Applications, Vol. 1, No. 1 (2009), 75-86.

[125] R. Slowinski and J. Teghem (Eds.), *Stochastic versus fuzzy approaches to multiobjective mathematical programming under uncertainty*, Boston: Kluwer Academic Publishers, (1990).

[126] M. K. Srivastava and M. G. Govil, *Second order duality for multiobjective programming involving (F, ρ, σ)-type-I functions*, Opsearch 37(4), (2000), 316-326.

[127] I.M. Stancu-Minasian, *Fractional programming with semilocally preinvex and related functions*, Proc. Ro. Acad. Series A, Volume 1, 1 (2000), 21-24.

[128] I. M. Stancu-Minasian, *Optimality and Duality in Nonlinear Programming Involving Semilocally B-preinvex and Related Functions*, European Journal of Operational Research 173, (2006), 47-58.

[129] I.M. Stancu-Minasian, *Stochastic programming with multiple objective functions*, D. Reidel Publishing Company, (1984).

[130] S.K. Suneja, S. Agarwal and S. Davar, *Multiobjective symmetric duality involving cones*, Eur. J. Oper. Res. 141, (2002), 471-479.

[131] S.K. Suneja, P. Louhan and M.B. Grover, *Higher-order cone-pseudoconvex, quasiconvex and other related functions in vector optimization*, Optim. Lett. (2012). doi: 10.1007/s11590-012-0447-y.

[132] S. Vajda, *Probabilistic programming*, New York: Academic Press, (1972).

[133] L. Venkateswara Reddy and R.N. Mukherjee, *Composite Nonsmooth Multiobjective Programs with V-ρ-Invexity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 235, (1999), 567-577.

[134] H. M. Wang and M. L. Wang, *A fuzzy multiobjective linear programming*, Fuzzy Set and Systems 86, (1997), 61-72.

[135] S. Wang, *Second order necessary and sufficient conditions in multiobjective programming*, Numeri. Funct. Anal. Optim. 12, (1991), 237-252.

[136] T. Weir and B.Mond, *Preinvex functions in multiple objective optimization*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 136, (1988), 29-38.

[137] T. Weir, *A converse duality theorem in multiple objective programming*, Operations Research Letters 6, (1987), 129-130.

[138] P. Wolfe, *A dual theorem for nonlinear programming*, Quart. Appl. Math. 19, (1961), 239-244.

[139] H-C. Wu, *The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for the optimization problem with fuzzy-valued objective function*, Mathematical Methods of Operations Research 66, (2007), 203-224.

[140] H-C. Wu, *The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for multi-objective programming problems with fuzzy-valued objective functions*, Fuzzy Optim Decis Making 8, (2009), 1-28.

[141] H-C. Wu, *The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective function*, Eur. J. Oper. Res. 196, (2009), 49-60.

[142] H-C. Wu, *On interval-valued nonlinear programming problems*, J. Math. Anal. Appl. 338, (2008), 299-316.

[143] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control 8, (1965), 338-353.

[144] G. J. Zalmai and Q. Zhang, *Optimality conditions and duality in nonsmooth semiinfinite programming*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 33 (4), (2012), 452-472.

[145] G. J. Zalmai and Q. Zhang, *Global parametric sufficient efficiency conditions for semiinfinite multiobjective fractional programming problems containing generalized* (α, η, ρ)*-V- invex functions* , Acta. Math. Appl. Sinica, Vol. 29, No. 1, (2013), 63-78.

[146] C. Zălinescu, *Duality results involving functions associated to nonempty subsets of locally convex spaces*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. Vol. 103 (2), (2009), 219-234.

[147] J. Zhang and B. Mond, *Second order duality for multiobjective nonlinear programming involving generalized convexity*, In: Golver, B. M., Craven, B. D., Ralph, D., eds. Proceedings of Optimization Miniconference III. University of Ballarat, (1997), 79-95.