

**UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI**

**REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT**

**MODELE CONSTITUTIVE ȘI METODE NUMERICE  
ÎN ELASTO-PLASTICITATEA ANIZOTROPĂ  
CU DEFORMAȚII FINITE**

**Conducător științific: Prof. Dr. SANDA CLEJA-ȚIGOIU**

**Doctorand: ZIDARU (IANCU) LIDIA ANGELICA**

-2013-

# Introducere

Teza are drept scop modelarea materialelor elasto-plastice ortotrope și elaborarea de metode numerice care să permită pe de o parte descrierea de modele care au la bază date de natură experimentală și pe de altă parte să simuleze comportamentul real al acestor materiale, prin rezolvarea de probleme matematice cu date inițiale și la limită. Dezvoltările teoretice se realizează în cadrul general al mecanicii mediilor continuu deformabile.

Modele constitutive sunt elaborate în cadrul axiomatic al materialelor elasto-plastice cu deformații finite, anizotrope, cu variabile interne de stare, având la bază formalismul propus de Cleja-Țigoiu și Soos (1989),(1990). Menționăm ipotezele fundamentale ale descrierii constitutive:

- (1) descompunerea multiplicativă a gradientului mișcării în componentele sale distorsiunea elastică și plastică,
- (2) conceptul de configurație locală, relaxată și izoclină, pe baza căruia sunt introduse distorsiunea plastică și elastică,
- (3) conceptul de simetrie materială specific cadrului constitutiv al materialelor elasto-plastice.

Rezultatele originale prezentate în capitolele 2,3 și 4 din această teză au făcut obiectul următoarelor articole deja publicate:

**Cleja-Țigoiu S., Iancu L., 2011, Orientational Anisotropy and Plastic Spin in Finite Elasto- Plasticity. International Journal of Solids and Structures, 48 (6), 939–952.**

**Cleja-Țigoiu S., Iancu L., 2013. Orientational anisotropy and strength-differential effect in orthotropic elasto-plastic materials. International Journal of Plasticity, 47, 80-110.**

Direcțiile principale în care au fost aduse contribuții sunt:

## 1) Modelarea constitutivă a materialelor elasto-plastice ortotrope.

Modelarea constitutivă propusă descrie anizotropia orientațională, concept care se referă la schimbarea (rotirea) în spațiu a direcțiilor de ortotropie în timpul procesului de deformare elasto-plastică. Prin intermediul unghiurilor lui Euler se descrie poziția axelor de ortotropie, iar spinul plastic are un rol esențial în descrierea mișcării acestora. Modelul constitutiv elaborat generalizează, în cazul rotațiilor arbitrare, modelul propus de Cleja-Țigoiu (2007) în care se consideră numai rotațiile plane ale direcțiilor de ortotropie.

Modele cu spin plastic și anizotropie orientațională au fost propuse și dezvoltate în lucrările menționate, cu precizarea că în articolul publicat în IJSS, Cleja-Țigoiu și Iancu (2011), funcția de plasticitate este considerată pătratică în tensiuni, în timp ce în articolul publicat în IJP, Cleja-Țigoiu și Iancu (2013), se adoptă o funcție de plasticitate omogenă, dependentă și de al treilea invariant al tensorului de tensiune.

**Rezultatele originale** se referă la:

- a) reprezentările pentru spinii plastici ortotropi, descriși matematic pe baza teoremelor

de reprezentare pentru funcții anizotrope prezentate în Liu (1982) și a teoremelor de reprezentare pentru funcții izotrope propuse de Wang (1970),

b) descrierea ecruisării cinematice, care este de tip Prager-Ziegler în Cleja-Țigoiu și Iancu (2011) și de tip Armstrong-Frederick în Cleja-Țigoiu și Iancu (2013), adaptată conceptului de simetrie materială pentru corpul elasto-plastic ortotrop.

## 2) Identificarea și validarea modelelor constitutive pe baza datelor experimentale.

Modelele constitutive elaborate în lucrările menționate conțin funcții și constante de material care au fost determinate pe baza datelor experimentale elaborate de Verma et al. (2011), Kim, Yin (1997), cu scopul de a simula și modela comportamentul real al materialelor.

În lucrarea Cleja-Țigoiu și Iancu (2013) se elaborează o **strategie** privind validarea modelelor teoretice. Strategie propusă presupune rezolvarea numerică a sistemelor de tip diferențial, care descriu modelele constitutive, pentru procese de deformare omogene a corpurilor.

Referitor la caracterizarea spinului plastic, în articolele Cleja-Țigoiu și Iancu (2011) și Cleja-Țigoiu și Iancu (2013) se propun algoritmi numerici, care să permită identificarea constantelor de spin și punerea în evidență a efectelor de tip Kim și Yin (1997) privind **anizotropia orientatională**.

## 3) Modelarea prin inegalitate variațională

Problemele cu date inițiale și la limită se reformulează prin inegalități variaționale cuplate cu modelul de tip "rate" (diferențial) al materialelor elasto-plastice prezentat în capitolul 2. Formulările problemelor cu date inițiale și la limită pentru materiale elasto-plastice rate-independente, cu deformații finite asociate cu algoritmi de actualizare a stării de tensiune și de deformare a corpurilor, au fost deduse în articolele Cleja-Țigoiu (2000b), Cleja-Țigoiu și Matei (2012). Modelarea constitutivă abordată în articolele menționate este mai generală decât cadrul constitutiv elaborat în prezenta teză.

În capitolul 5, se formulează inegalitatea variațională pentru modelul constitutiv al materialelor elasto-plastice ortotrope, în configurația deformată. Inegalitatea variațională este asociată ecuațiilor de echilibru formulate incremental și are necunoscutele viteza și factorul plastic, la momentul curent de timp, presupunând cunoscută starea de tensiune și de deformare elasto-plastică a corpului.

Se consideră problema deformării plăcilor plane în ipoteza că se realizează o stare plană de tensiune și că planul plăcii este plan de simetrie materială, direcția de ortotropie  $n_3$  este perpendiculară pe placă. Se obține inegalitatea variațională asociată utilizând rezultatele din capitolul 4 ce se referă la viteza de deformare axială pe direcția  $n_3$ .

Procedeul de actualizare a stării de tensiune și de deformare a corpului are la bază un algoritm bazat pe sistemul diferențial care descrie constitutiv modelul în particula materială fixată. Algoritmul de actualizare are la bază o metodologie diferită de cea abordată în lucrările Cleja-Țigoiu (2000b), Cleja-Țigoiu și Matei (2012).

# Capitolul 1

## Materiale elasto-plastice. Descompunerea multiplicativă

În acest capitol prezentăm succint conceptele de mișcare și deformare în cadrul constitutiv al elasto-plasticității cu deformații finite și descompunere multiplicativă a gradientului mișcării. Descrierea matematică a comportamentului corpurilor continue deformabile are la bază cadrul axiomatic descris de Noll (1958), Truesdell și Noll (1965), Truesdell (1972). Modelul axiomatic propus de Cleja-Țigoiu și Soos (1989), Cleja-Țigoiu și Soos (1990) și Cleja-Țigoiu (1990) a permis construcția axiomatică a grupului de simetrie pentru materiale elasto-plastice cu configurații locale, curente, relaxate, izocline și variabile interne de stare.

Corpul continuu deformabil,  $\mathcal{B}$  poate fi identificat cu o mulțime deschisă, conexă în spațiul euclidian tridimensional într-o configurație a sa de referință.

Mișcarea corpului în timp este descrisă prin funcția  $\chi : \mathcal{B} \times [0, \infty) \rightarrow \mathcal{E}$ .

**Definitia 1.1.** *Viteza și accelerația în configurația actuală la momentul  $t$  se definesc:*

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &:= \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}, \\ \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) &:= \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

**Definitia 1.2.** *Gradientul deformației în raport cu configurația de referință  $k$  în punctul  $\mathbf{X} = k(X)$  este definit prin:*

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_k(\mathbf{X}, t) &:= \nabla \chi_k(\mathbf{X}, t) \\ \text{sau, reprezentat într-o bază carteziană } \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}, \\ \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial x^i}{\partial X^k} \mathbf{j}_i \otimes \mathbf{j}_k.\end{aligned}\tag{1.2}$$

În prezenta teză se utilizează conceptul de simetrie materială pentru corpuri elasto-plastice ortotrope.

În modelarea constitutivă a comportamentului corpurilor elasto-plastice se folosesc trei configurații, reprezentate în figura 1.1:

- configurația de la momentul inițial,
- configurația locală, curentă, relaxată, izoclină,
- configurația actuală.

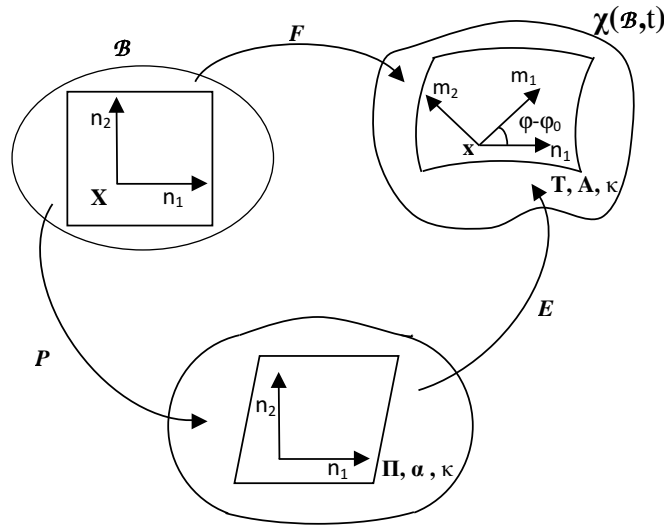


Figura 1.1:

Descompunerea multiplicativă  $\mathbf{F} = \mathbf{E}\mathbf{P}$  are la bază conceptele de distorsiune elastică și plastică, care permit punerea în evidență a specificității corpurilor elastice și respectiv elasto-plastice:

- Dacă  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$  rezultă  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ , iar corpul are un comportament **elastic**,
- Dacă  $\mathbf{P} \neq \mathbf{Q}, \forall \mathbf{Q} \in Ort$  corpul are un comportament **elasto-plastic**.

Se introduc tensorii viteze de deformare:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1}, \text{ în configurația actuală} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{L}^p = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}, \text{ în configurația relaxată.}$$

Relația cinematică între  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L}^e$  și  $\mathbf{L}^p$  este reprezentată prin:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{E}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{L}^e + \mathbf{E}\mathbf{L}^p\mathbf{E}^{-1}. \quad (1.4)$$

Se notează:

$$\mathbf{D} = \{\mathbf{L}\}^s, \mathbf{D}^e = \{\mathbf{L}^e\}^s, \mathbf{D}^p = \{\mathbf{L}^p\}^s, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{W} = \{\mathbf{L}\}^a, \mathbf{W}^e = \{\mathbf{L}^e\}^a, \mathbf{W}^p = \{\mathbf{L}^p\}^a.$$

parțile lor simetrice și respectiv antisimetrice.

Comportamentul elasto-plastic este caracterizat prin reprezentări funcționale (modele constitutive), care permit definirea stării de tensiune și de deformare a corpurilor.

Următoarele măsuri de tensiune vor fi utilizate în teză:

**T** -tensorul de tensiune Cauchy în configurația deformată,

**$\Pi$** -tensorul de tensiune simetric Piola-Kirchhoff în configurația de referință.

Relația de legătură între aceste câmpuri tensoriale este dată prin:

$$\Pi = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}. \quad (1.6)$$

**Axiomă:** Materialul are un comportament elastic în raport cu configurațiile relaxate, care este descris folosind tensorul de elasticitate  $\mathcal{E} : Sim \rightarrow Sim$ , liniar, prin următoarea relație constitutivă:

$$\Pi = \mathcal{E}(\Delta^e), \quad \Delta^e = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{I}), \quad \mathbf{G} = \mathbf{E}^T \mathbf{E}. \quad (1.7)$$

**Axiomă:** Condiția curentă de plasticitate este descrisă în spațiul tensiunilor prin intermediul funcției de plasticitate  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F}(\Pi, \alpha, \kappa) = 0 \quad (1.8)$$

care depinde de setul de variabile interne de stare  $\alpha, \kappa$  numite variabile de ecruisare.

Aceste variabile descriu evoluția în timp a suprafeței de plasticitate.

Condiția inițială de plasticitate caracterizează limita comportamentului elastic, anterior procesului inițial de deformare plastică, pentru  $\alpha = \mathbf{0}, \kappa = 0$ , prin:

$$\mathcal{F}(\Pi, \mathbf{0}, 0) = 0. \quad (1.9)$$

**Axiomă:** Comportamentul ireversibil al materialului este descris, într-o particulă materială fixată, prin relații de tip diferențial, (de evoluție), pentru câmpurile specifice prezente în modelare:

-distorsiunea plastică,  $\mathbf{P}$ ,

-variabila de ecruisare cinematică,  $\alpha$  care descrie mișcarea suprafeței de plasticitate,

-variabila de ecruisare scalară,  $\kappa$  care descrie schimbarea formei suprafeței de plasticitate.

**Axiomă:** Deformațiile elastice sunt presupuse mici, iar rotațiile elastice și deformațiile plastice sunt finite. Utilizând descompunerea polară a distorsiunii elastice  $\mathbf{E} = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e$ , Mandel (1972) introduce ipotezele:

$$\mathbf{U}^e \simeq \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad \|\mathbf{U}^e - \mathbf{I}\| \ll 1, \quad (1.10)$$

unde  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  este tensorului micilor deformații.

Următoarele formule de transformare au loc:

$$\Pi \simeq (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{T} \mathbf{R}^e, \quad \alpha = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{A} \mathbf{R}^e, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{G} \simeq \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad \Delta^e \simeq \boldsymbol{\varepsilon}^e.$$

**Observatia 1.1.** Tensorul rotațiilor elastice  $\mathbf{R}^e$  caracterizează transformarea de la configurația curentă, relaxată la configurația actuală, iar măsura deformației elastice este tensorul micilor deformații,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ .

**Propozitia 1.1.** Descrierea constitutivă a modelului, formalizat prin ipotezele menționate anterior, în raport cu configurațiile curente, relaxate este caracterizată prin ecuațiile:

$$\begin{aligned}\Pi &= \mathcal{E}[\boldsymbol{\varepsilon}^e], \\ \mathbf{R}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e (\mathbf{R}^e)^T &= \mathbf{D} - \mu \mathbf{R}^e \mathbf{N}^p (\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}) (\mathbf{R}^e)^T, \\ \dot{\mathbf{R}}^e (\mathbf{R}^e)^T &= \mathbf{W} - \mu \mathbf{R}^e \boldsymbol{\Omega}^p (\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}) (\mathbf{R}^e)^T, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \mu \mathbf{l} (\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}), \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} &= \mu b (\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}).\end{aligned}\tag{1.12}$$

$\mathcal{F}$  definește suprafața de plasticitate,  $\mu$  este factorul plastic,  $\mu = \frac{1}{h_c} \langle \beta \rangle \mathcal{H}(\mathcal{F})$ .

Factorul plastic  $\mu$ , prin definiție, satisface condițiile:

$$\begin{aligned}\mu \geq 0, \mathcal{F}(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}) \leq 0, \mu \mathcal{F}(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}) &= 0 \text{ condițiile Kuhn-Tucker} \\ \mu \dot{\mathcal{F}}(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}) &= 0 \text{ condiția de consistență.}\end{aligned}\tag{1.13}$$

Funcțiile  $\beta$ ,  $h_c$  au expresiile:

$$\beta = \mathcal{E}[\mathbf{N}^p] \cdot \bar{\mathbf{D}}, \quad h_c = \mathcal{E}[\mathbf{N}^p] \cdot \mathbf{N}^p + \mathbf{N}^p \cdot \mathbf{1} - \partial_{\boldsymbol{\kappa}} \mathcal{F} b,\tag{1.14}$$

în care  $\bar{\mathbf{D}} = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{R}^e$  este tensorul vitezei de deformație rotit cu rotația elastică  $\mathbf{R}^e$ .

### Simetrie materială în elasto-plasticitate

Noțiunea de grup de simetrie materială este introdusă și formalizată în articolele Cleja-Țigoiu, Soos (1989),(1990), pe baza conceptului de configurație locală introdus de Noll (1967, 1972), în contextul elasto-plasticității cu configurații locale, relaxate, izocline și variabile interne de stare. În cadrul constitutiv adoptat în teză, pentru o formulare concisă, vom folosi următoarea definiție a grupului de simetrie materială:

**Definitia 1.3.** Se numește grup de simetrie a unui material solid elasto-plastic în particula  $X$ , relativ la configurația de referință  $k$ , mulțimea tuturor elementelor  $\mathbf{H} \in \text{Ort}$  pentru care au loc simultan relațiile:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{H} \Delta^e \mathbf{H}^T) &= \mathbf{H} \mathcal{E}(\Delta^e) \mathbf{H}^T, \quad \mathcal{F}(\mathbf{H} \Pi \mathbf{H}^T, \mathbf{H} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{H}^T, \boldsymbol{\kappa}) = \mathcal{F}(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}) \\ \bar{\mathcal{B}}(\mathbf{H} \Pi \mathbf{H}^T, \mathbf{H} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{H}^T, \boldsymbol{\kappa}) &= \mathbf{H} \bar{\mathcal{B}}(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}) \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{l}(\mathbf{H} \Pi \mathbf{H}^T, \mathbf{H} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{H}^T, \boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{H} \mathbf{l}(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}) \mathbf{H}^T \\ b(\mathbf{H} \Pi \mathbf{H}^T, \mathbf{H} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{H}^T, \boldsymbol{\kappa}) &= b(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}), \quad \forall \Delta, \Pi, \boldsymbol{\alpha} \in \text{Sim}, \forall \boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{R}.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Această mulțime se notează  $g_k(\mathbf{X})$  și elementele ei se numesc transformări de simetrie materială relativ la configurația  $k$ .

Vom utiliza în mod consecvent definiția adoptată de Liu (1982) pentru corp ortotrop.

**Definitia 1.4.** (Liu (1982))

Un material elastic este **ortotrop** într-o particulă  $X$  dacă există o configurație de referință  $k$  și trei direcții ortonormate  $\mathbf{n}_i \in \mathcal{V}$ ,  $|\mathbf{n}_i| = 1$  astfel încât grupul de simetrie să fie

$$\begin{aligned} g_6 &= \{ \mathbf{Q} \in Ort, \mathbf{Q}\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i \text{ sau } \mathbf{Q}\mathbf{n}_i = -\mathbf{n}_i \forall i \in \{1, 2, 3\} \} \equiv \\ &\equiv \{ \mathbf{Q} \in Ort, \mathbf{Q}(\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i)\mathbf{Q}^T = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \forall i \in \{1, 2\} \}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

**Observatia 1.2.** Grupul de ortotropie  $g_6$  este caracterizat prin transformările ortogonale care lasă invariante tensorii  $\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1$  și  $\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2$ .

Prezentăm o teoremă de caracterizare pentru funcții invariante în raport cu  $g_6$ , care reprezintă un caz particular al teoremei de reprezentare pentru funcții anizotrope dată de Liu (1982).

Introducem următoarele mulțimi:  $\mathcal{D} \subset \mathfrak{R} \times Lin^n$  și  $\mathcal{M} = \{(\mathbf{Q}(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1)\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}(\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2)\mathbf{Q}^T) \mid \mathbf{Q} \in Ort\}$ .

**Teorema 1.1.** O funcție  $f : \mathcal{D} \rightarrow X$  cu  $X \in \{\mathfrak{R}, Lin\}$  este invariantă relativ la grupul de ortotropie  $g_6$  (ortotropă), dacă și numai dacă există  $\hat{f} : \mathcal{D} \times \mathcal{M} \rightarrow X$  izotropă, astfel încât

$$f(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{A}) = \hat{f}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{A}, \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2), \forall (\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{A}) \in \mathcal{D}. \quad (1.17)$$

**Teorema 1.2.** În cadrul constitutiv al materialelor elasto-plastice ortotrope cu mici deformații elastice, funcțiile constitutive și de evoluție sunt reprezentate prin funcțiile izotrope asociate, conform egalităților:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\Delta] &= \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2)[\Delta], \\ \mathbf{N}^p(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}) &= \hat{\mathbf{N}}^p(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2), \\ \boldsymbol{\Omega}(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}) &= \hat{\boldsymbol{\Omega}}(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2) \\ \mathbf{l}(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}) &= \hat{\mathbf{l}}(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2) \\ b(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}) &= \hat{b}(\Pi, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2) \\ \forall \Delta, \Pi, \boldsymbol{\alpha} \in Sim, \boldsymbol{\kappa} \in \mathfrak{R}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

unde  $\hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathbf{N}}^p, \hat{\boldsymbol{\Omega}}^p, \hat{\mathbf{l}}, \hat{b}$  sunt funcții izotrope în raport cu toate argumentele lor.

Această caracterizare a funcțiilor constitutive și de evoluție invariante relativ la grupul de ortotropie  $g_6$ , de exemplu  $f$ , prin intermediul funcțiilor notate  $\hat{f}$  care devin izotrope în raport cu argumentele specifice, permite trecerea de la configurația relaxată la cea actuală.



## Capitolul 2

# Model elasto-plastic ortotrop cu anizotropie orientatională și spin plastic

Capitolul 2 prezintă rezultate publicate în articolul Cleja Țigoiu, Iancu (2011). Rezultatele principale sunt formalizate prin teoremele 2.1 și 2.2.

Ipoteza micilor deformații elastice ( $\mathbf{E} \simeq \mathbf{R}^e$ ), permite caracterizarea comportamentului materialului în configurația actuală. Transformarea  $\mathbf{R}^e$  realizează trecerea de la configurația relaxată la configurația actuală. În mod natural se introduc derivatele obiective ale câmpurilor, asociate spinului elastic  $\omega^e = \dot{\mathbf{R}}^e (\mathbf{R}^e)^T$ .

Formulăm reprezentarea constitutivă a materialului pentru o istorie a procesului de deformație dată prin **ecuații de tip rate** (ecuații de tip diferențial).

Modelul elasto-plastic prezentat este dezvoltat în articolul Cleja Țigoiu (2007) și este caracterizat de **anizotropie orientatională**: direcțiile de ortotropie din configurația actuală nu rămân fixe în timpul procesului de deformare. Un rol esențial în descrierea evoluției axelor de ortotropie îl are **spinul plastic**. Variația în timp a rotației elastice se exprimă prin derivatele temporale ale unghiurilor lui Euler. Rezultatele privind rotația arbitrară au fost publicate în articolul Cleja Țigoiu și Iancu (2011), iar cazul rotației plane a axelor de ortotropie a fost considerat în articolul Cleja-Țigoiu (2007).

Pentru cazul când axa inițială de ortotropie  $\mathbf{n}_3$  este perpendiculară pe placă, pentru un proces de deformație omogen, se obține o teoremă cu caracter general care descrie un set de condiții suficiente ca rotația axelor să se desfășoare în planul plăcii.

Câmpurilor definite în configurația izoclină:

$\Pi$ -tensorul Piola Kirchhoff,

$\alpha$ - variabila de ecrisare cinematică,

$\varepsilon^e$  - tensorul micilor deformații rotit,

$\mathbf{n}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ - direcțiile de ortotropie din configurația relaxată

li se asociază câmpurile din configurația actuală:

$\mathbf{T}$ -tensorul de tensiune Cauchy,

$\mathbf{A}$ -variabila de ecrisare cinematică

$\bar{\varepsilon}^e$  -tensorul micilor deformații elastice rotit

$\mathbf{m}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ - direcțiile de ortotropie din configurația actuală

prin intermediul rotației  $\mathbf{R}^e$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{R}^e \Pi(\mathbf{R}^e)^T, \mathbf{A} = \mathbf{R}^e \alpha(\mathbf{R}^e)^T, \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e &= \mathbf{R}^e \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}^e)^T, \mathbf{m}_i = \mathbf{R}^e \mathbf{n}_i, i = 1, 2, 3\end{aligned}\quad (2.1)$$

Variabila scalară de ecrusare rămâne aceeași prin trecerea de la configurația relaxată, izoclină la configurația actuală.

**Observația 2.1.** *Proprietatea funcțiilor introduse în teorema 1.2, de exemplu  $\hat{\mathbf{N}}^p$ , de a fi izotrope în raport cu argumentele din domeniul lor de definiție, conduce la egalități de forma:*

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^e \hat{\mathbf{N}}^p(\boldsymbol{\kappa}, \Pi, \alpha, \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2)(\mathbf{R}^e)^T &= \hat{\mathbf{N}}^p(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2), \\ \forall \mathbf{R}^e \in Ort.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Relații analoage au loc și pentru celelalte funcții tensoriale constitutive și de evoluție izotrope asociate.

Modelul de tip rate utilizează definiția derivatelor obiective. Pentru câmpuri tensoriale simetrice și respectiv pentru câmpuri vectoriale, derivatele obiective asociate spinului elastic  $\boldsymbol{\omega}^e := \dot{\mathbf{R}}^e(\mathbf{R}^e)^{-1}$  sunt definite prin:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\mathbf{T}} &:= \frac{d}{dt}(\mathbf{T}) - \boldsymbol{\omega}^e \mathbf{T} + \mathbf{T} \boldsymbol{\omega}^e \equiv \mathbf{R}^e \dot{\Pi}(\mathbf{R}^e)^T \\ \overset{\circ}{\mathbf{m}}_k &:= \dot{\mathbf{m}}_k - \boldsymbol{\omega}^e \mathbf{m}_k \equiv \mathbf{R}^e \dot{\mathbf{n}}_k\end{aligned}\quad (2.3)$$

**Propoziția 2.1.** (Cleja-Țigoiu (2007))

*Proiecția derivatei obiective atașate spinului elastic a tensorului de tensiune pe direcțiile de anizotropie reprezintă derivata temporală a componentei pe aceleași direcții:*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{m}_k \cdot \mathbf{T} \mathbf{m}_j) = \mathbf{m}_k \cdot \overset{\circ}{\mathbf{T}} \mathbf{m}_j \quad (2.4)$$

Descrierea anizotropiei orientationale se va realiza prin intermediul **unghiurilor lui Euler**. Se vor folosi 3 repere ortonormate:

- $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$  reperul ortonormat fixat,
- $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  axele inițiale de ortotropie în configurația relaxată,
- $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$  axele de ortotropie în configurația actuală.

Axele actuale de ortotropie satisfac condiția inițială  $\mathbf{m}_i(t_0) = \mathbf{n}_i, i=1,2,3$ .

În figura 2.1 sunt reprezentate axele  $\mathbf{j}_i$  și  $\mathbf{m}_i, i \in \{1, 2, 3\}$ .

Notăm cu  $\mathbf{R} \in Ort$  tensorul de rotație ce caracterizează poziția axelor de ortotropie  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$  în raport cu axele fixe  $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ :

$$\mathbf{R} \mathbf{j}_k = \mathbf{m}_k, k = 1, 2, 3.$$

Notăm cu  $\mathbf{R}_0 \in Ort$  rotația ce caracterizează poziția axelor inițiale de ortotropie  $\mathbf{n}_i$  față de axele fixe  $\mathbf{j}_i$  astfel ca  $\mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0, \mathbf{R}_0(\mathbf{j}_k) = \mathbf{n}_k, k = 1, 2, 3$ . Rotația elastică  $\mathbf{R}^e \in Ort$  este legată de  $\mathbf{R}$  prin relația  $\mathbf{R}^e(t) = \mathbf{R}(t) \mathbf{R}(t_0)^{-1}$  și are loc condiția inițială  $\mathbf{R}^e(t_0) = \mathbf{I}$ .

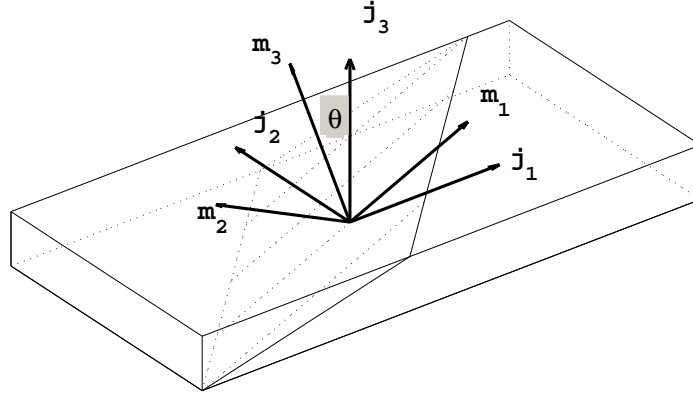


Figura 2.1: Placa, axele  $\mathbf{j}_k$  și axele de ortotropie în configurația actuală

Notăm  $\tilde{T}_{ij} := \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{Tm}_j$ ,  $\tilde{A}_{ij} := \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{Am}_j$ ,  $\tilde{D}_{ik} = \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{Dm}_k$ ,  $\tilde{W}_{ik} = \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{Wm}_k$ , componentele în raport cu baza formată de axele actuale de anizotropie.

Pentru a caracteriza evoluția componentelor variabilelor modelului în raport cu baza  $\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_j$ , se exprimă:

-componentele  $R_{ik} = \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{Rj}_k$  ale rotației  $\mathbf{R}$  cu ajutorul unghiurilor lui Euler notate astfel:  $\psi$  -unghiul de precesie,  $\theta$ -unghiul de nutație,  $\phi$ -rotația proprie.

-componentele spinului elastic  $\omega^e$  ca funcții de unghiurile lui Euler și de derivatele lor.

**Rotația generală** a axelor de ortotropie are loc dacă  $\sin(\theta) \neq 0$  pe un anumit interval de timp. În acest caz se pot exprima derivatele unghiurilor lui Euler în funcție de componentele  $\tilde{W}_{ij}$  și  $\hat{\Omega}_{ij}^p$ .

Menționăm:

- $\hat{\mu}$  reprezintă factorul plastic regândit prin funcția izotropă asociată,

- $\hat{\mathbf{N}}^p$  reprezintă funcția izotropă care definește partea simetrică a vitezei de deformare plastică,

- $\hat{\mathbf{I}}$  reprezintă funcția izotropă care caracterizează evoluția variabilei cinematice de ecrusare,

- $\hat{b}$  reprezintă funcția izotropă care caracterizează evoluția variabilei scalare de ecrusare

- $\hat{\Omega}^p$  reprezintă funcția izotropă care definește spinul plastic.

Funcțiile constitutive și de evoluție izotrope asociate depind de tensorul de tensiune Cauchy  $\mathbf{T}$ , variabilele de ecrusare  $\mathbf{A}$ ,  $\kappa$  și de unghiurile lui Euler prin prezența axelor de ortotropie.

Se obține următorul rezultat prin care se descrie evoluția în timp a câmpurilor, pentru procese de deformare caracterizate, în punctul material fixat, prin funcții netede pe porțiuni.

**Teorema 2.1.** Fie o istorie a procesului de deformare  $t \rightarrow \mathbf{F}(t) \in C_{loc}^1([t_0, t_f]) \cap C^0([t_0, t_f])$  într-un punct material fixat. Dacă  $\sin(\theta) \neq 0$  de-a lungul procesului, evoluția în timp a componentelor tensiunii Cauchy  $\mathbf{T}$  și a variabilei tensoriale de ecrusare  $\mathbf{A}$  în baza  $\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_j$ , a variabilei scalare de ecrusare  $\kappa$  și a unghiurilor  $\psi, \theta, \varphi$  este descrisă de sistemul diferențial:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{T}}_{11} &= -\hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \psi, \theta, \varphi)(a_{11}\hat{N}_{11}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{12}\hat{N}_{22}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{13}\hat{N}_{33}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})) + \\
 &\quad + a_{11}\tilde{D}_{11}(t, \psi, \theta, \varphi) + a_{12}\tilde{D}_{22}(t, \psi, \theta, \varphi) + a_{13}\tilde{D}_{33}(t, \psi, \theta, \varphi) \\
 \dot{\hat{T}}_{22} &= -\hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \psi, \theta, \varphi)(a_{12}\hat{N}_{11}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{22}\hat{N}_{22}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{23}\hat{N}_{33}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})) + \\
 &\quad + a_{12}\tilde{D}_{11}(t, \psi, \theta, \varphi) + a_{22}\tilde{D}_{22}(t, \psi, \theta, \varphi) + a_{23}\tilde{D}_{33}(t, \psi, \theta, \varphi) \\
 \dot{\hat{T}}_{33} &= -\hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \psi, \theta, \varphi)(a_{13}\hat{N}_{11}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{23}\hat{N}_{22}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{33}\hat{N}_{33}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})) + \\
 &\quad + a_{13}\tilde{D}_{11}(t, \psi, \theta, \varphi) + a_{23}\tilde{D}_{22}(t, \psi, \theta, \varphi) + a_{33}\tilde{D}_{33}(t, \psi, \theta, \varphi) \\
 \dot{\hat{T}}_{12} &= -\hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \psi, \theta, \varphi)(a_{44}\hat{N}_{12}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})) + a_{44}\tilde{D}_{12}(t, \psi, \theta, \varphi) \\
 \dot{\hat{T}}_{13} &= -\hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \psi, \theta, \varphi)(a_{66}\hat{N}_{13}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})) + a_{66}\tilde{D}_{13}(t, \psi, \theta, \varphi) \\
 \dot{\hat{T}}_{23} &= -\hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \psi, \theta, \varphi)(a_{55}\hat{N}_{23}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})) + a_{55}\tilde{D}_{23}(t, \psi, \theta, \varphi) \\
 \dot{\hat{A}}_{ij} &= \hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \psi, \theta, \varphi)\hat{l}_{ij}(\mathbf{T}, \mathbf{A}), i, j = 1, 2, 3 \\
 \dot{\kappa} &= \hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \psi, \theta, \varphi)\hat{b}(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \\
 \dot{\varphi} &= \hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \psi, \theta, \varphi)[\hat{\Omega}_{12}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) - \cot\theta(\hat{\Omega}_{13}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})\cos\varphi + \hat{\Omega}_{23}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})\sin\varphi)] - \\
 &\quad - \tilde{W}_{12}(t, \psi, \theta, \varphi) + \cot\theta(\tilde{W}_{13}(t, \psi, \theta, \varphi)\cos\varphi + \tilde{W}_{23}(t, \psi, \theta, \varphi)\sin\varphi) \\
 \dot{\theta} &= \hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \psi, \theta, \varphi)(\hat{\Omega}_{23}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})\cos\varphi - \hat{\Omega}_{13}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})\sin\varphi) + \\
 &\quad + \tilde{W}_{13}(t, \psi, \theta, \varphi)\sin\varphi - \tilde{W}_{23}(t, \psi, \theta, \varphi)\cos\varphi \\
 \dot{\psi} &= \hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \psi, \theta, \varphi)\frac{1}{\sin\theta}(\hat{\Omega}_{13}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})\cos\varphi + \hat{\Omega}_{23}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})\sin\varphi) - \\
 &\quad - \frac{1}{\sin\theta}(\tilde{W}_{13}(t, \psi, \theta, \varphi)\cos\varphi + \tilde{W}_{23}(t, \psi, \theta, \varphi)\sin\varphi)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

cu condițiile inițiale

$$\tilde{T}_{ij}(t_0) = 0, \tilde{A}_{ij}(t_0) = 0, \kappa(t_0) = 0, \varphi(t_0) = \varphi_0, \theta(t_0) = \theta_0, \psi(t_0) = \psi_0. \tag{2.6}$$

Fie  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  direcțiile de ortotropie astfel încât  $\mathbf{n}_3 = \mathbf{j}_3$  ( $\theta_0 = 0$ ). Se dorește determinarea unui set de condiții suficiente pentru care rotația  $\mathbf{R}$  să păstreze direcția  $\mathbf{m}_3$  fixă. În acest caz spunem că procesul elasto-plastic omogen se desfășoară cu **rotație plană** a axelor de anizotropie și are loc egalitatea  $\theta(t) = 0 \forall t \in [t_0, t_f]$ .

**Ipoteze:**

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 0 \\ \tilde{T}_{13} = \tilde{T}_{23} = \tilde{A}_{13} = \tilde{A}_{23} = 0 &\Rightarrow (\hat{N}_{13}^p = \hat{N}_{23}^p = 0) \text{ și } (\hat{\Omega}_{13}^p = \hat{\Omega}_{23}^p = 0) \text{ și} \\ (\hat{l}_{13} = \hat{l}_{23} = 0) & \\ h_c &> 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Prezentăm teorema de caracterizare a pentru cazul rotației plane:

**Teorema 2.2.** Fie procesul de deformare  $t \rightarrow \mathbf{F}(t) \in C_{loc}^1([t_0, t_f]) \cap C^0([t_0, t_f])$ , astfel încât  $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ ,  $D_{13}(t) = 0$  și  $D_{23}(t) = 0 \forall t \in [t_0, t_f]$ . Dacă sunt verificate ipotezele (2.7) și condițiile inițiale  $T_{ij}(t_0) = 0$ ,  $A_{ij}(t_0) = 0$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\kappa(t_0) = 0$  și  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ ,  $\theta(t_0) = 0$ ,  $\psi(t_0) = 0$ , atunci componentele  $T_{13}$ ,  $T_{23}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{23}$  și unghiul  $\theta$  sunt nule în timpul procesului elasto-plastic.

*Evoluția variabilelor nenule este descrisă de sistemul diferențial:*

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{T}}_{11} &= -\hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \varphi)[a_{11}\hat{N}_{11}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{12}\hat{N}_{22}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{13}\hat{N}_{33}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})] + \\ &\quad + a_{11}\tilde{D}_{11}(\varphi) + a_{12}\tilde{D}_{22}(\varphi) + a_{13}\tilde{D}_{33}(\varphi) \\ \dot{\tilde{T}}_{22} &= -\hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \varphi)[a_{12}\hat{N}_{11}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{22}\hat{N}_{22}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{23}\hat{N}_{33}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})] + \\ &\quad + a_{12}\tilde{D}_{11}(\varphi) + a_{22}\tilde{D}_{22}(\varphi) + a_{23}\tilde{D}_{33}(\varphi) \\ \dot{\tilde{T}}_{33} &= -\hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \varphi)[a_{13}\hat{N}_{11}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{23}\hat{N}_{22}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{33}\hat{N}_{33}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})] + \\ &\quad + a_{13}\tilde{D}_{11}(\varphi) + a_{23}\tilde{D}_{22}(\varphi) + a_{33}\tilde{D}_{33}(\varphi) \\ \dot{\tilde{T}}_{12} &= -\hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \varphi)a_{44}\hat{N}_{12}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{44}\tilde{D}_{12}(\varphi) \\ \dot{\tilde{A}}_{11} &= \hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \varphi)\hat{l}_{11}(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \\ \dot{\tilde{A}}_{22} &= \hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \varphi)\hat{l}_{22}(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \\ \dot{\tilde{A}}_{33} &= \hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \varphi)\hat{l}_{33}(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \\ \dot{\tilde{A}}_{12} &= \hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \varphi)\hat{l}_{12}(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \\ \dot{\kappa} &= \hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \varphi)\hat{b}(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \\ \dot{\varphi} &= \hat{\mu}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \varphi)\hat{\Omega}_{12}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \text{ cu } \hat{\mu} = \frac{1}{h_c} < \hat{\beta} > \mathcal{H}(\hat{\mathcal{F}}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\text{cu } \hat{\mu} = \frac{1}{h_c} < \hat{\beta} > \mathcal{H}(\hat{\mathcal{F}}).$$

**Observatia 2.2.** Rotația axelor de anizotropie are loc în planul  $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  și este descrisă de unghiul  $\varphi$ .

## Capitolul 3

# Model constitutiv cu spin plastic, anizotropie orientațională și cu suprafața de plasticitate pătratică în tensiuni

Prezentarea din acest capitol are la bază rezultatele publicate în articolul Cleja-Țigoiu și Iancu (2011) și are drept scop punerea în evidență a capacității reprezentării constitutive elaborate de a modela comportamentul real, determinat experimental, al materialelor elasto-plastice. Se elaborează o strategie privind determinarea constantelor de spin și de ecrusare care să corespundă datelor experimentale, prin simulări numerice a răspunsului materialului în procese omogene de deformare.

Se va folosi modelul constitutiv descris în capitolul 2 cu următoarele precizări:

1) Funcția de plasticitate este pătratică în raport cu variabila  $\bar{\mathbf{S}} := \mathbf{T} - \mathbf{A}$  numită tensiune efectivă:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}(\mathbf{T}, \mathbf{A}, \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2) = & K_{11}\bar{S}_{11}^2 + K_{22}\bar{S}_{22}^2 + K_{33}\bar{S}_{33}^2 + K_{m1}\bar{S}_{12}^2 + \\ & + K_{m2}\bar{S}_{13}^2 + (2K_{33} + K_{m1} - K_{m2})\bar{S}_{23}^2 + K_{12}\bar{S}_{11}\bar{S}_{22} - k, \end{aligned} \quad (3.1)$$

2) Se utilizează trei tipuri de spini plastici:

• *Spinul plastic de tip Mandel:*

$$\hat{\Omega}^P = A_1\{(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)\bar{\mathbf{S}}\}^a + A_2\{(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)\bar{\mathbf{S}}\}^a, \quad (3.2)$$

• *Spinul plastic de tip Liu-Wang:*

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^P = & \eta_1\{\hat{\mathbf{N}}^P(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)\}^a + \eta_2\{\hat{\mathbf{N}}^P(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)\}^a + \\ & + \eta_3\{(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)\hat{\mathbf{N}}^P(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)\}^a, \end{aligned} \quad (3.3)$$

• *Spinul plastic de tip Dafalias:*

$$\hat{\Omega}^P = \eta(\bar{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{N}}^P - \hat{\mathbf{N}}^P\bar{\mathbf{S}}), \quad (3.4)$$

Cap.3. Model constitutiv cu spin plastic, anizotropie orientațională și cu suprafața de plasticitate pătratică în tensiuni

3) Ecuația de evoluție pentru variabila de ecrusare cinematică în configurația actuală este descrisă de o lege de tip Prager-Ziegler adaptată materialului ortotrop:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{T}, \mathbf{A}, \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2) = & c_0 \hat{\mathbf{N}}^P + c_1 [\hat{\mathbf{N}}^P(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) + (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) \hat{\mathbf{N}}^P] + \\ & + c_2 [\hat{\mathbf{N}}^P(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2) + (\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2) \hat{\mathbf{N}}^P]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Modelul constitutiv este descris prin sisteme de ecuații de tip diferențial prezentate în teorema 2.1 pentru cazul  $\theta_0 \neq 0$ , respectiv în teorema 2.2 pentru cazul  $\theta_0 = 0$ .

În simularea numerică se consideră problema deformării omogene a plăcii plane pentru cazurile  $\theta_0 \neq 0$  și pentru  $\theta = 0$ .

Se studiază:

- influența constantelor de plasticitate asupra modelului, prin intermediul soluției numerice a sistemului diferențial obținute folosind aplicații *Matlab*,
- evoluția axelor de ortotropie, pentru condiția inițială  $\theta_0 = 0$ , cu scopul de a determina constante de spin și de ecrusare cinematică ce realizează o bună concordanță cu datele experimentale prezentate în articolul Kim și Yin (1997).

Prezentăm câteva dintre rezultatele numerice obținute pentru o placă omogenă supusă unei deformații uniaxiale omogene.

**Problema** Se consideră o placă ce este confecționată dintr-un **material ortotrop**, având forma unui paralelipiped dreptunghic cu muchiile paralele cu axele  $\mathbf{j}_k, k = 1, 2, 3$ . Poziția axelor inițiale de ortotropie  $\mathbf{n}_k, k = 1, 2, 3$  în raport cu axele fixe  $\mathbf{j}_k, k = 1, 2, 3$  este descrisă de valorile inițiale ale unghiurilor lui Euler  $\varphi_0, \theta_0, \psi_0$ .

Se consideră că în fiecare punct al plăcii este impus procesul de deformație:

$$\mathbf{F}(t) = \lambda_1(t) \mathbf{j}_1 \otimes \mathbf{j}_1 + \lambda_2(t) \mathbf{j}_2 \otimes \mathbf{j}_2 + \lambda_3(t) \mathbf{j}_3 \otimes \mathbf{j}_3, \quad \forall t \in [t_0 = 0, T] \quad (3.6)$$

cu  $\lambda_2(t) = \lambda_3(t) = 1 \quad \forall t \in [t_0 = 0, T]$ , ce corespunde unei stări axiale de deformație de-a lungul axei  $\mathbf{j}_1$ .

Gradientul vitezei, tensorul viteză de deformație și spinul miscării sunt:

$$\mathbf{L} = \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} \mathbf{j}_1 \otimes \mathbf{j}_1 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

Să se determine variabilele  $\mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \varphi, \theta, \psi$  care caracterizează comportamentul elasto-plastic ortotrop.

Rotația elastică este descrisă prin intermediul unghiurilor lui Euler  $\psi, \theta, \phi$  care descriu poziția axelor actuale de anizotropie  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$  în raport cu un reper ortogonal fixat  $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ .

**În cazul rotației generale ( $\theta_0 \neq 0$ ):**

Este studiată influența constantelor de plasticitate  $K_{11}$  și  $K_{22}$  asupra evoluției unghiurilor lui Euler și a componentelor tensiunii, pentru condițiile inițiale  $\Psi_0 = \pi/3, \theta_0 = \pi/3, \varphi_0 \in \{\pi/6, \pi/4, \pi/3\}$ .

**Observatia 3.1.** Se constată că pentru condițiile inițiale  $\varphi_0 = \pi/3, \varphi_0 = \pi/4$ , prin înjumătățirea constantei de plasticitate  $K_{22}$  funcția  $h_c$  devine nulă și, în consecință,  $\varepsilon^P(x) :=$

$\int_{x_1}^x \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}^P(u) \cdot \mathbf{D}^P(u)} du \rightarrow \infty$ . În acest caz spunem ca s-a produs deteriorarea materialului. Pentru  $K_{22}/2$ , valoarea inițială  $\varphi_0 = \pi/6$  ne conduce la un comportament diferit: procesul rămâne elastic,  $\beta \leq 0$ . Deoarece spinul total este nul, unghiurile ce descriu evoluția rotației rămân constante.

**În cazul rotației plane ( $\theta_0 = 0$ ), se analizează:**

- 1) influența spinului plastic și a anizotropiei inițiale asupra:
  - -componentelor  $A_{12}$  și  $T_{12}$  - figura 3.1
  - -evoluției axelor de ortotropie - figura 3.2
- 2) evoluția tensiunii uniaxiale  $\sigma_u := \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{T} \mathbf{j}_1 = T_{11}$  ca funcție de unghiul  $\Phi_0$ , pentru diferite valori ale deformației plastice echivalente - figura 3.3(a),
- 3) raportul  $R := \frac{D_{33}^p}{D_{22}^p}$  -figura 3.3(b),
- 4) evoluția unghiului dintre vectorul propriu  $\mathbf{v}_1$ , asociat tensiunii din planul  $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ , și direcția  $\mathbf{j}_1$ , notat cu  $\alpha$  -figura 3.4(a) pentru spin de tip Mandel și figura 3.4(b) pentru spin de tip Dafalias.

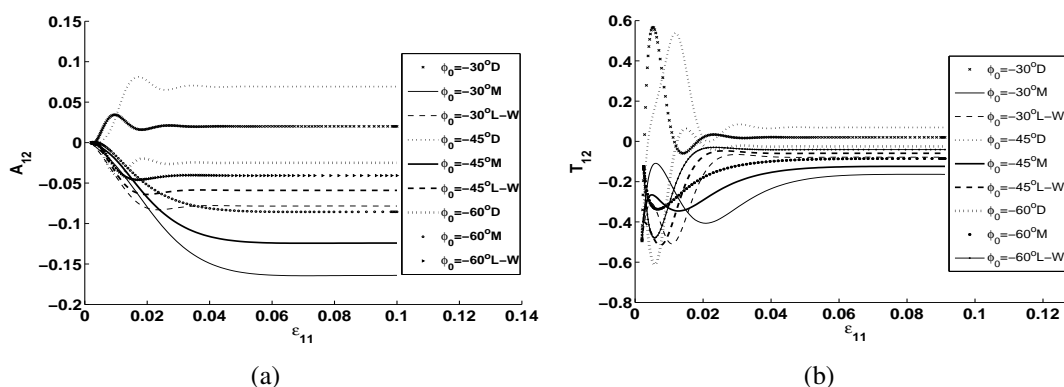


Figura 3.1: Influența ortotropiei inițiale (a) asupra componentei  $A_{12}$  a tensorului de ecruisare cinematică și (b) asupra componentei  $T_{12}$  a tensiunii, pentru toți cei trei spini.

**Observatia 3.2.** O bună concordanță cu datele experimentale din articolul Kim și Yin (1997) se obține pentru spinul plastic de tip Dafalias. Precizăm că s-a folosit același set de constante de material pentru toate cele trei valori inițiale  $\varphi_0 \in \{-30^\circ, -45^\circ, -60^\circ\}$ , spre deosebire de reprezentările din Dafalias (2000) pentru care se utilizează mai multe constante de spin. Pentru spini de tip Mandel și Liu Wang nu s-au găsit constante care să conducă pentru  $\varphi_0 = -30^\circ$  la rotația în sens opus față de rotația obținută pentru  $\varphi_0 \in \{-45^\circ, -60^\circ\}$ .



Cap.3. Model constitutiv cu spin plastic, anizotropie orientatională și cu suprafața de plasticitate pătratică în tensiuni

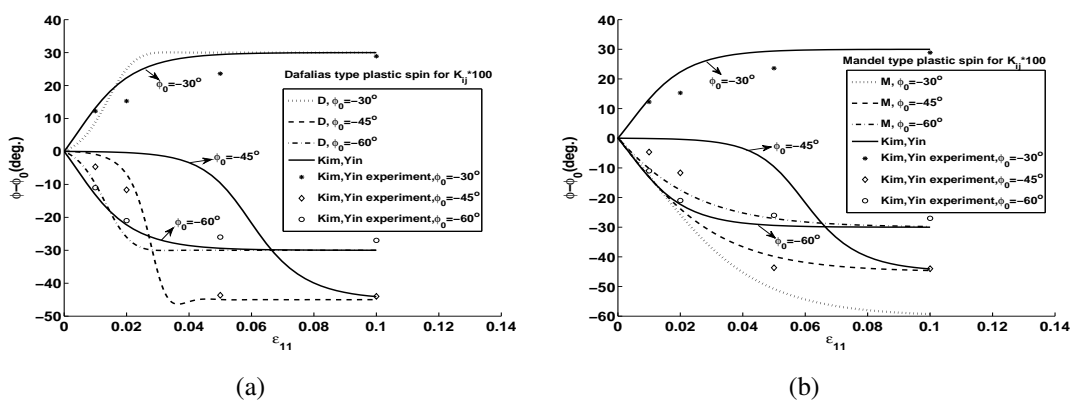


Figura 3.2: Variația unghiului  $\Phi - \Phi_0$  (cu  $\Phi = \varphi$ ) ca funcție de  $\epsilon_{11}$ , (a) pentru spinul plastic de tip Dafalias corespunzător unui material cu  $K_{ij} * 100$  și (b) pentru spin plastic de tip Mandel cu  $A_1 = 15$  and  $A_2 = 1615$ . Liniile solide corespund soluției din modelul propus de Kim and Yin (1997), iar punctele corespund datelor experimentale, care se găsesc în figura lor Fig. 5 pentru  $\psi = -\Phi_0$ .

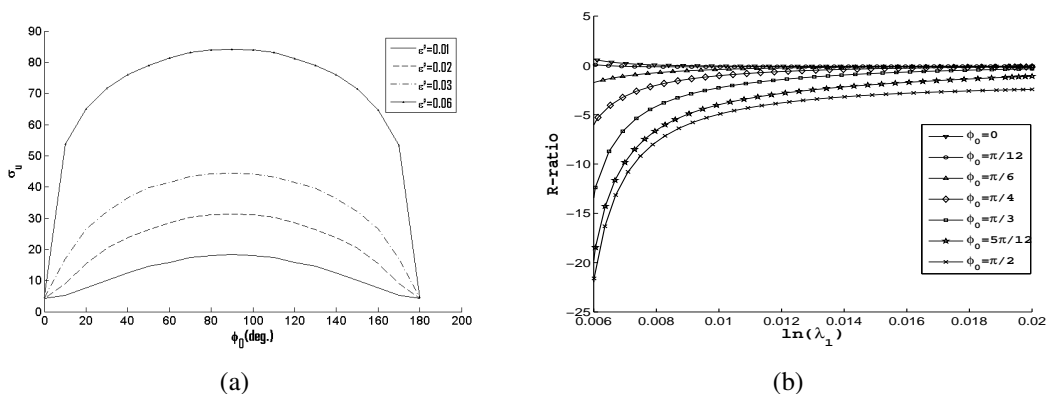


Figura 3.3: (a) Tensiunea uniaxială  $\sigma_u := \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{Tj}_1$  în funcție de unghiul  $\Phi_0$ , pentru diverse valori ale deformației plastice echivalente și condițiile inițiale  $\theta_0 = 0, \Psi_0 = 0$ . (b) Raportul  $R$  – ratio pentru diferite valori ale unghiului  $\Phi_0$  și pentru  $\theta_0 = 0, \Psi_0 = 0$ .

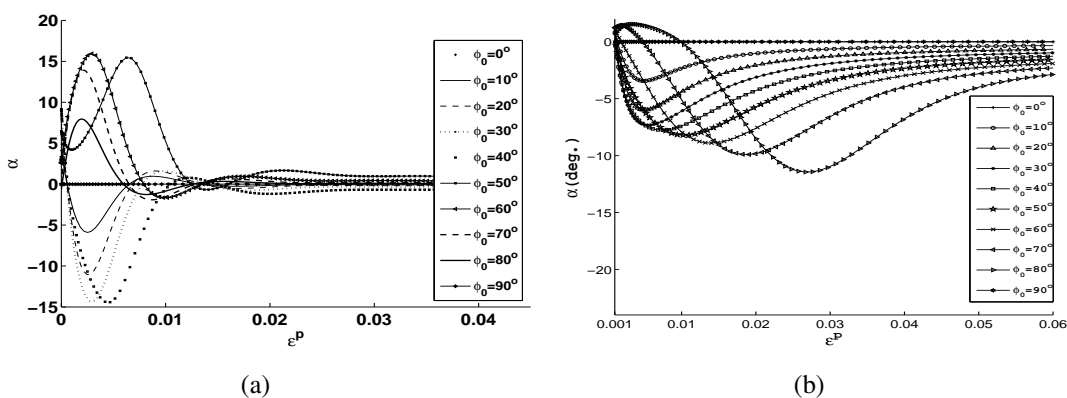


Figura 3.4: Unghiul  $\alpha$ , care măsoară rotația vectorului propriu  $\mathbf{v}_1$  al tensiunii în plan ca funcție de deformația plastică echivalentă  $\epsilon^P$ , (a) pentru spin plastic de tip Dafalias și (b) pentru spin plastic de tip Mandel.

## Capitolul 4

# Model elasto-plastic ortotrop cu suprafața de plasticitate dependentă de al treilea invariant al tensiunii

Prezentarea din acest capitol are la bază principalele rezultate publicate în articolul Cleja-Țigoiu și Iancu (2013), în care se pune accentul pe asimetria condiției inițiale de plasticitate pentru tracțiune și compresiune (de natură experimentală).

**Modelarea constitutivă** realizează:

- descrierea efectului de tip Bauchinger inițial, numit în literatură "strength differential effect", care este realizată prin utilizarea funcției de plasticitate dependentă de al treilea invariant, nesimetrică, reprezentată prin invarianti ortotropi,
- introducerea spinilor plastici generalizați care, prin particularizări ale constantelor, se reduc la spinii considerați în capitolul 3,
- introducerea unei legi de evoluție pentru ecruisarea cinematică ce reprezintă o generalizare la cazul ortotrop a legii de tip Armstrong-Frederick pentru materiale izotrope,
- utilizarea teoremei de reprezentare pentru funcții anizotrope a lui Liu (1982) și a teoremelor lui Wang (1970) pentru a genera funcțiile constitutive și de evoluție,
- deducerea sistemelor diferențiale care permit simularea proceselor omogene cu stare plană de tensiune, folosind tehnica recalculării factorului plastic din Cleja-Țigoiu (2007).

Contribuțiile privind **rezultatele numerice** sunt bazate pe simularea proceselor de deformare omogenă și se referă la:

- determinarea setului de constante de material care permite descrierea prin simulare numerică a datelor experimentale din articolele: Verma et. al (2011) (asimetria suprafeței inițiale de plasticitate și influența ecruisării), și Kim, Yin (1997) ( evoluția axelor de ortotropie în timpul proceselor elasto-plastice de deformare),
- introducerea criteriului de selecție a tipului de spin prin condiția de realizare a concordanței rezultatelor numerice cu datele experimentale din Kim și Yin (1997).
- utilizarea ipotezei de stare plană de tensiune și modelarea condițiilor de predeformare a plăcii pe baza soluțiilor sistemului diferențial, astfel încât în simulările numerice să se țină seama de condițiile în care au fost realizate experimentele prezentate în articolul Kim, Yin (1997).

În cele ce urmează precizăm câteva detalii legate de modelul constitutiv utilizat în acest capitol.

1) **Funcția de plasticitate dependentă de al treilea invariant** este de tip Drucker:

$$\mathcal{F} := (\hat{f}_2)^{3/2} - \gamma \hat{f}_3 - F, \quad (4.1)$$

cu  $\hat{f}_2, \hat{f}_3$  funcții omogene de gradul doi respectiv trei în raport cu tensiunea efectivă, notată  $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{T} - \mathbf{A}$ , și  $F$  funcție ce depinde numai de variabila scalară de ecrusare,  $\kappa$ .

**Problemă:** Să se determine expresii generale pentru funcțiile izotrope  $\hat{f}_2$  și  $\hat{f}_3$  cu argumentul  $(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)$ , folosind teorema de reprezentare pentru funcții izotrope cu valori scalare de tip Wang (1970), care să fie independente de presiunea hidrostatică.

**Propozitia 4.1.** *Funcția  $\hat{f}_2$  independentă de presiunea hidrostatică are următoarea reprezentare:*

$$\begin{aligned} \hat{f}_2 = & \frac{1}{2}(K_{11} + K_{22} - K_{33})(\bar{S}_{11} - \bar{S}_{22})^2 + \frac{1}{2}(K_{11} + K_{33} - K_{22})(\bar{S}_{11} - \bar{S}_{33})^2 + \\ & + \frac{1}{2}(K_{22} + K_{33} - K_{11})(\bar{S}_{22} - \bar{S}_{33})^2 + K_{m1}\bar{S}_{12}^2 + K_{m2}\bar{S}_{13}^2 + K_{m3}\bar{S}_{23}^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Funcția  $\hat{f}_2$  independentă de presiunea hidrostatică (4.2), este pozitiv definită dacă și numai dacă:

$$\begin{aligned} K_{11} + K_{22} - K_{33} > 0, \quad K_{11} + K_{33} - K_{22} > 0, \quad K_{22} + K_{33} - K_{11} > 0, \\ K_{m1} > 0, \quad K_{m2} > 0, \quad K_{m3} > 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Funcția  $\hat{f}_3$  independentă de presiunea hidrostatică are următoarea reprezentare:

$$\begin{aligned} \hat{f}_3 = & k_1\bar{S}_{11}^3 + k_2\bar{S}_{22}^3 + k_3\bar{S}_{33}^3 + k_4\bar{S}_{11}^2\bar{S}_{22} + k_5\bar{S}_{11}^2\bar{S}_{33} + k_6\bar{S}_{22}^2\bar{S}_{11} + k_7\bar{S}_{22}^2\bar{S}_{33} + k_8\bar{S}_{33}^2\bar{S}_{11} + \\ & + k_9\bar{S}_{33}^2\bar{S}_{22} + k_{10}\bar{S}_{12}^2\bar{S}_{11} + k_{11}\bar{S}_{12}^2\bar{S}_{22} + k_{12}\bar{S}_{12}^2\bar{S}_{33} + k_{13}\bar{S}_{13}^2\bar{S}_{11} + k_{14}\bar{S}_{13}^2\bar{S}_{22} + \\ & + k_{15}\bar{S}_{13}^2\bar{S}_{33} + k_{16}\bar{S}_{23}^2\bar{S}_{11} + k_{17}\bar{S}_{23}^2\bar{S}_{22} + k_{18}\bar{S}_{23}^2\bar{S}_{33} + k_{19}\bar{S}_{11}\bar{S}_{22}\bar{S}_{33} + k_{20}\bar{S}_{12}\bar{S}_{13}\bar{S}_{23}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

$K_{11}, K_{22}, K_{33}, K_{m1}, K_{m2}, K_{m3}, k_i, i \in \{1, \dots, 20\}$  sunt constante.

2) **Spinul plastic** este modelat prin funcții ortotrope, dependente de variabile specifice, cu valori tensori antisimetrice.

• Spinul plastic generat de  $\bar{\mathbf{S}}$  și variabilele orientaționale  $\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2$  numit *spin plastic I*, este descris de funcția:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^p = & A_1(\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) - (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)\bar{\mathbf{S}}) + A_2(\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2) - (\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)\bar{\mathbf{S}}) + \\ & + A_3((\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) - (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)) + \\ & + A_4(\bar{\mathbf{S}}^2(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) - (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)\bar{\mathbf{S}}^2) + A_5(\bar{\mathbf{S}}^2(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2) - (\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)\bar{\mathbf{S}}^2) + \\ & + A_6((\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)\bar{\mathbf{S}}^2(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) - (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)\bar{\mathbf{S}}^2(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pentru  $A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 0$ , se obține spinul plastic de tip Mandel propus de Cleja-Țigoiu (2007) și utilizat în Cleja-Țigoiu și Iancu (2011).

Cap.4. Model elasto-plastic ortotrop cu suprafața de plasticitate dependentă de al treilea invariant al tensiunii

• Spinul plastic generat de  $\hat{\mathbf{N}}^p$  și variabilele orientacionale  $\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2$  numit *spin plastic II*, este descris de funcția:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^p &= \eta_1(\hat{\mathbf{N}}^p(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) - (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)\hat{\mathbf{N}}^p) + \eta_2(\hat{\mathbf{N}}^p(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2) - (\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)\hat{\mathbf{N}}^p) + \\ &- \eta_3((\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)\hat{\mathbf{N}}^p(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) - (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)\hat{\mathbf{N}}^p(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)) + \eta_4((\hat{\mathbf{N}}^p)^2(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) - \\ &- (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)(\hat{\mathbf{N}}^p)^2) + \eta_5((\hat{\mathbf{N}}^p)^2(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2) - (\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)(\hat{\mathbf{N}}^p)^2) + \\ &+ \eta_6((\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)(\hat{\mathbf{N}}^p)^2(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) - (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)(\hat{\mathbf{N}}^p)^2(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dacă  $\eta_4 = \eta_5 = \eta_6 = 0$ , se obține spinul plastic de tip Liu-Wang, folosit de Cleja-Țigoiu (2007) și în capitolul 3.

• Spinul plastic generat de  $\bar{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{N}}^p$  și variabilele orientacionale  $\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2$  numit *spin plastic III*, este descris de funcția:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^p &= \tilde{\eta}(\bar{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{N}}^p - \hat{\mathbf{N}}^p\bar{\mathbf{S}}) + \tilde{\eta}_1(\bar{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{N}}^p(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) - (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)\hat{\mathbf{N}}^p\bar{\mathbf{S}}) + \\ &+ \tilde{\eta}_2(\bar{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{N}}^p(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2) - (\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)\hat{\mathbf{N}}^p\bar{\mathbf{S}}) + \\ &+ \tilde{\eta}_3((\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)\hat{\mathbf{N}}^p\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) - (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)\bar{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{N}}^p(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pentru  $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_2 = \tilde{\eta}_3 = 0$ , se obține spinul plastic de tip Dafalias introdus în Cleja-Țigoiu (2007), și folosit în Cleja-Țigoiu și Iancu (2011).

3) **Ecuatia de evoluție pentru variabila de ecrusare cinematică** este de tip Armstrong-Frederick generalizată pentru materiale ortotrope:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{A}} &= \mu \hat{\mathbf{l}}(\mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2), \quad \text{cu} \\ \hat{\mathbf{l}} &= c_0 \hat{\mathbf{N}}^p + c_1 [\hat{\mathbf{N}}^p(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) + (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)\hat{\mathbf{N}}^p] + \\ &+ c_2 [\hat{\mathbf{N}}^p(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2) + (\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)\hat{\mathbf{N}}^p] - \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2) [d_0 \mathbf{A} + \\ &+ d_1(\mathbf{A}(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) + (\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1)\mathbf{A}) + d_2(\mathbf{A}(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2) + (\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)\mathbf{A})] \end{aligned} \quad (4.8)$$

unde  $c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2$  sunt constante de material.

Pentru  $d_0 = d_1 = d_2 = 0$  se reduce la legea de tip Prager-Zigler pentru materiale ortotrope introdusă de Cleja-Țigoiu (2007). O lege de ecrusare de tip Armstrong-Frederick este introdusă în Cleja-Țigoiu (2000a) dar pentru un model cu variabila tensorială de ecrusare nesimetrică.

4) **Ecuatia de evoluție pentru variabila de ecrusare scalară** este propusă sub forma:

$$\dot{\kappa} = \hat{\mu} \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2), \quad \hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{\sigma_Y(x_c + y_c e^{-z_c \kappa})} \bar{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{N}}^p \quad (4.9)$$

unde  $k, n, x_c, y_c, z_c$  sunt constante de material.

Se folosește funcția scalară  $F$  de tip Voce cu expresia  $F(\kappa) = \sigma_Y^3(x_c + y_c e^{-z_c \kappa})^3$ .

Formulăm sistemul diferențial care descrie o stare de rotație plană ( $\theta(t) = 0$ ), și corespunde condiției de stare plană de tensiune.

Cap.4. Model elasto-plastic ortotrop cu suprafața de plasticitate dependentă de al treilea invariant al tensiunii

**Teorema 4.1.** Fie un proces de deformație  $t \rightarrow \mathbf{F}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  astfel încât  $D_{13}(t) = D_{23}(t) = W_{13}(t) = W_{23}(t) = 0$ .

1. Sistemul diferențial care descrie procesul elasto-plastic supus condiției de stare plană de tensiune este:

$$\begin{aligned}
 \dot{T}_{11} &= -\hat{\mu}_{pl}[\tilde{a}_{11} \hat{N}_{11}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + \tilde{a}_{12} \hat{N}_{22}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})] + \tilde{a}_{11} \tilde{D}_{11}(t, \varphi) + \tilde{a}_{12} \tilde{D}_{22}(t, \varphi) \\
 \dot{T}_{22} &= -\hat{\mu}_{pl}[\tilde{a}_{12} \hat{N}_{11}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + \tilde{a}_{22} \hat{N}_{22}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})] + \tilde{a}_{12} \tilde{D}_{11}(t, \varphi) + \tilde{a}_{22} \tilde{D}_{22}(t, \varphi) \\
 \dot{T}_{12} &= -\hat{\mu}_{pl} a_{44} \hat{N}_{12}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{44} \tilde{D}_{12}(t, \varphi) \\
 \dot{A}_{11} &= \hat{\mu}_{pl}[(c_0 + 2c_1) \hat{N}_{11}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) - \hat{b}(\mathbf{T}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa})(d_0 + 2d_1)A_{11}] \\
 \dot{A}_{22} &= \hat{\mu}_{pl}[(c_0 + 2c_2) \hat{N}_{22}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) - \hat{b}(\mathbf{T}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa})(d_0 + 2d_2)A_{22}] \\
 \dot{A}_{12} &= \hat{\mu}_{pl}[(c_0 + c_1 + c_2) \hat{N}_{12}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) - \hat{b}(\mathbf{T}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa})(d_0 + d_1 + d_2)A_{12}] \\
 \dot{\boldsymbol{\kappa}} &= \hat{\mu}_{pl} \hat{b}(\mathbf{T}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}) \\
 \dot{\varphi} &= \hat{\mu}_{pl} \hat{\Omega}_{12}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) - \tilde{W}_{12}(\varphi)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

cu constanta de ecrusare  $c_0 = 0$  și cu condițiile inițiale  $T_{ij}(t_0) = 0, A_{ij}(t_0) = 0, i, j = 1, 2, \boldsymbol{\kappa}(t_0) = \mathbf{0}$  și  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ .

2. Expresia factorului plastic modificat  $\hat{\mu}_{pl}$ , este:

$$\hat{\mu}_{pl}(t, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}, \varphi) = \frac{\beta_{pl}}{h_{c,pl}}, \tag{4.11}$$

cu  $\beta_{pl}$  și  $h_{c,pl}$  având expresiile:

$$\begin{aligned}
 \beta_{pl} &= [\tilde{a}_{11} \hat{N}_{11}^p + \tilde{a}_{12} \hat{N}_{22}^p] \tilde{D}_{11} + [\tilde{a}_{12} \hat{N}_{11}^p + \tilde{a}_{22} \hat{N}_{22}^p] \tilde{D}_{22} + 2a_{44} \hat{N}_{12}^p \tilde{D}_{12}, \\
 h_{c,pl} &= \hat{N}_{11}^p (\tilde{a}_{11} \hat{N}_{11}^p + \tilde{a}_{12} \hat{N}_{22}^p) + \hat{N}_{22}^p (\tilde{a}_{12} \hat{N}_{11}^p + \tilde{a}_{22} \hat{N}_{22}^p) + 2a_{44} (\hat{N}_{12}^p)^2 \\
 &\quad + \hat{N}_{11}^p \hat{l}_{11} + \hat{N}_{22}^p \hat{l}_{22} + 2\hat{N}_{12}^p \hat{l}_{12} + (\partial_{\boldsymbol{\kappa}} F(\boldsymbol{\kappa})) \hat{b}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

3. Setul de constante elastice este:

$$\tilde{a}_{11} = a_{11} - \frac{a_{13}^2}{a_{33}}, \quad \tilde{a}_{12} = a_{12} - \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}}, \quad \tilde{a}_{22} = a_{22} - \frac{a_{23}^2}{a_{33}}. \tag{4.13}$$

4. Viteza de deformare axială este:

$$\tilde{D}_{33}(\varphi) = \frac{\hat{\mu}_{pl}}{a_{33}} (a_{13} \hat{N}_{11}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{23} \hat{N}_{22}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{33} \hat{N}_{33}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})) - \frac{a_{13}}{a_{33}} \tilde{D}_{11}(\varphi) - \frac{a_{23}}{a_{33}} \tilde{D}_{22}(\varphi). \tag{4.14}$$

Cap.4. Model elasto-plastic ortotrop cu suprafața de plasticitate dependentă de al treilea invariant al tensiunii

Strategia privind determinarea **constantelor de material** are la bază simulări numerice ale unor procese pentru deformații omogene și se realizează în trei etape:

1) Se determină constantele ce descriu suprafața inițială de plasticitate folosind un set de caracteristici de ortotropie pentru un material ce prezintă efect Bauschinger inițial, prezente în Verma et al. (2011).

2) Se determină o parte din constantele de ecruisare folosind curbele pentru experiențe unidimensionale tensiune-deformație din Verma et al. (2011).

3) Se determină constantele de spin și constantele de ecruisare rămase urmărind obținerea compatibilității cu datele experimentale privind evoluția unghiurilor de ortotropie, din articolul Kim și Yin (1997).

Figurile 4.1 și 4.2 arată o bună concordanță cu datele experimentale din Verma et al. (2011).

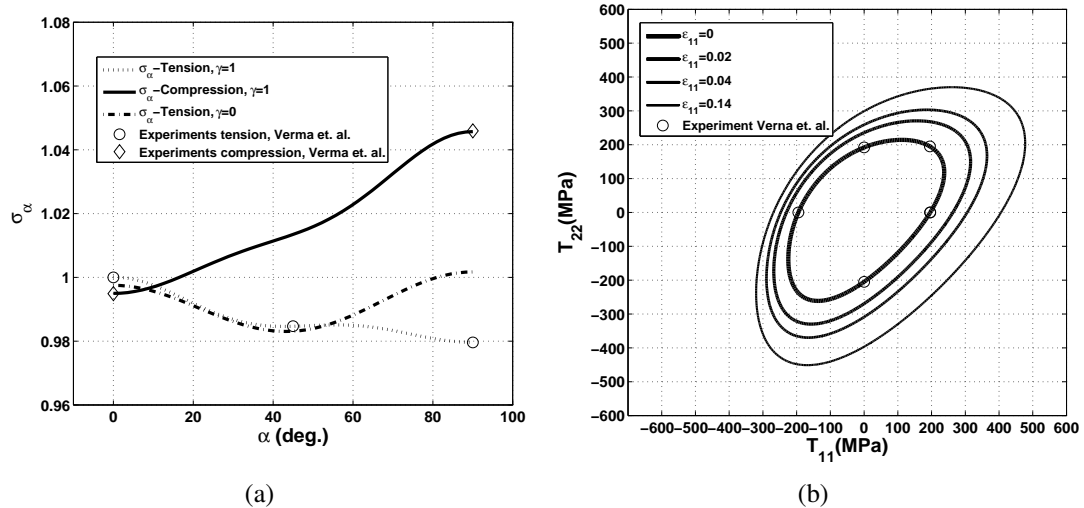


Figura 4.1: (a) Limita de plasticitate uniaxială  $\sigma_\alpha$  și datele experimentale din Verma et al. (2011), (b) curbele de plasticitate  $(T_{11}, T_{22})$  reprezentate pentru diferite valori ale deformației uniaxiale  $\epsilon_{11}$ .

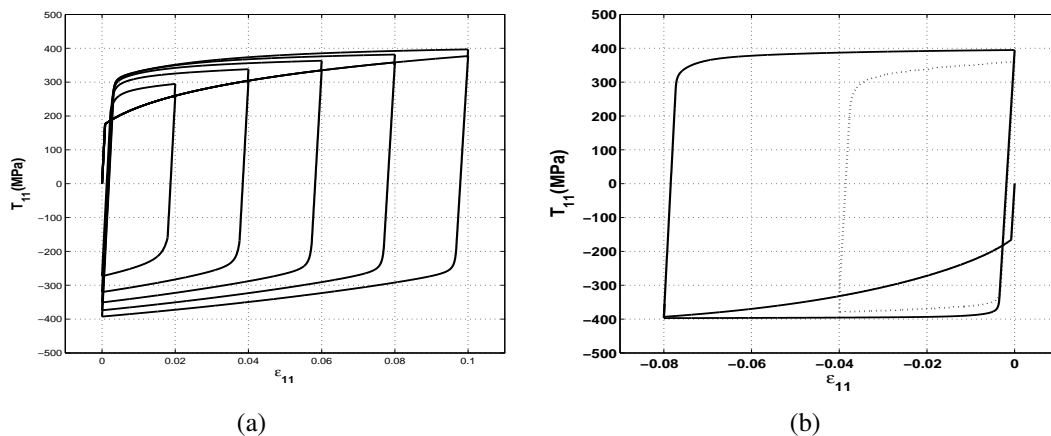


Figura 4.2: Curbele deformație-tensiune obținute pentru tensiune uniaxială pentru (a) teste TCT cu pre-deformare de 2%, 4%, 6%, 8%, 10% și (b) teste CTC cu pre-deformare de -4% și -8%.

Cap.4. Model elasto-plastic ortotrop cu suprafața de plasticitate dependentă de al treilea invariant al tensiunii

Se utilizează sistemul diferențial (4.10) pentru a simula experimentele folosite de Kim și Yin (1997) pentru studiul evoluției axelor de ortotropie.

Se analizează:

- influența constantelor de ecruisare  $c_2$ ,  $d_2$  asupra evoluției unghiului  $\varphi$ - figura 4.3(a),
- influența tipului de spin asupra evoluției unghiului  $\varphi$  -figurile 4.3(b), 4.3(c), 4.3(d)
- influența tipului de spin asupra evoluției componentelor  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ - figura 4.4.

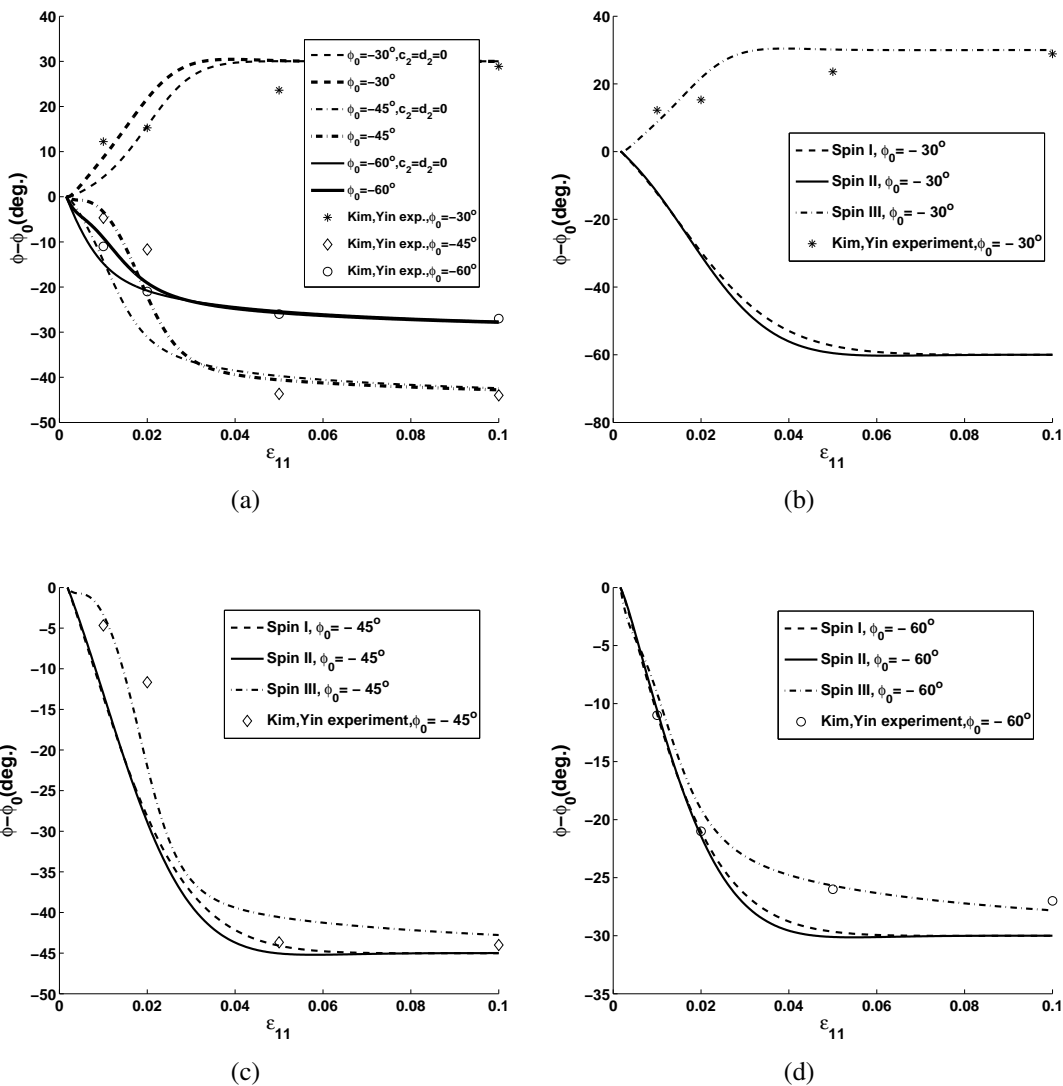


Figura 4.3: Variația unghiului lui Euler  $\varphi - \varphi_0$ , cu notația  $\Phi := \varphi$ , după o pre-deformare de 3% ca funcție de a doua deformare axială,  $\varepsilon_{11}$ , reprezentată pentru (a) spin plastic III cu  $c_2 = 0, d_2 = 0$  și  $c_2 = 120, d_2 = 250$ , și pentru cele trei tipuri de spin cu condițiile inițiale (b)  $\varphi_0 = -30^\circ$ , (c)  $\varphi_0 = -45^\circ$  (d)  $\varphi_0 = -60^\circ$ . Efectul Kim și Yin observat experimental se obține pentru spin III, în cazul stării plane de tensiune.

Cap.4. Model elasto-plastic ortotrop cu suprafața de plasticitate dependentă de al treilea invariant al tensiunii

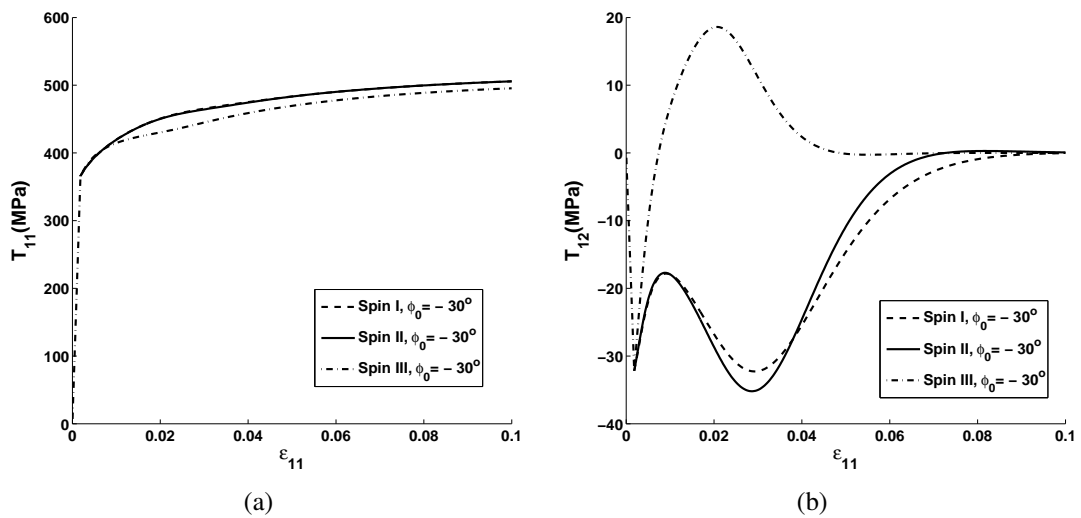


Figura 4.4: Influența spinului plastic asupra (a) componente normale  $T_{11}$  a tensiunii și asupra (b) componente de forfecare  $T_{12}$ , pentru condiția inițială  $\varphi_0 = -30^\circ$ ,

Se modelează experimente ce implică deformații de tip forfecare în planul plăcii cu ipoteza de stare plană de tensiune și se analizează:

- influența spinului plastic și a anizotropiei inițiale asupra evoluției unghiului  $\varphi_0$  în prezența deformării cu spin total nenul -figura 4.5,
- influența spinului plastic asupra evoluției componentelor tensiunii în prezența deformării cu spin total nenul -figura 4.6.

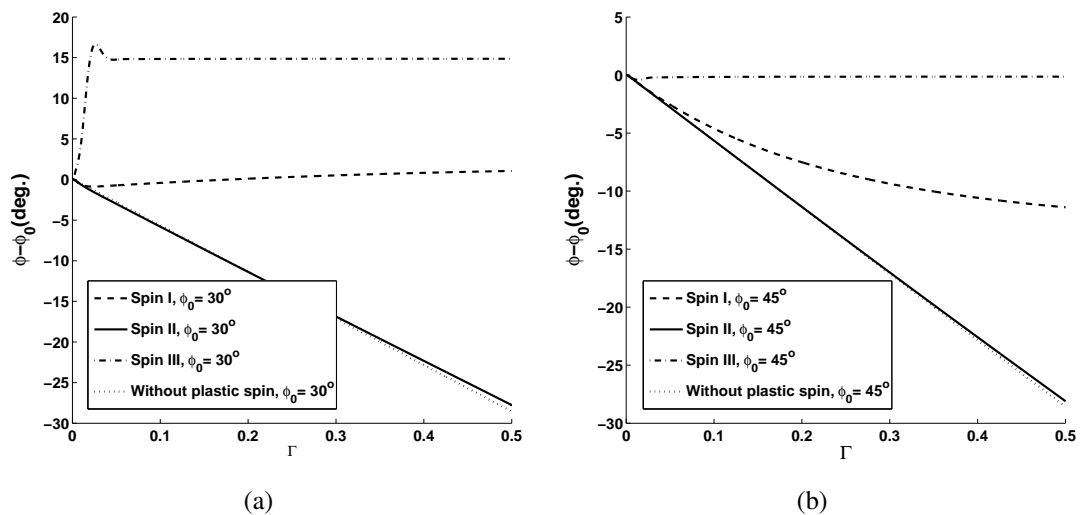


Figura 4.5: Variația unghiului lui Euler ca funcție de componenta de forfecare a deformației,  $\Gamma$  pentru cele trei tipuri de spin plastic și de asemenea fără spin plastic, folosind valorile inițiale (a)  $\varphi_0 = 30^\circ$ , (b)  $\varphi_0 = 45^\circ$ ,

**Concluzii:**

1) Suprafața de plasticitate dependentă de al treilea invariant este suficient de flexibilă pentru a putea modela comportamentul materialelor ce au limite de plasticitate cu module diferite la tracțiune și compresiune. Curbele TCT și CTC arată evoluția efectului Bauschinger, iar evoluția curbelor de plasticitate este efectul ecrisării cinemate și scalare folosite în modelul elasto-plastic.



Cap.4. Model elasto-plastic ortotrop cu suprafața de plasticitate dependentă de al treilea invariant al tensiunii

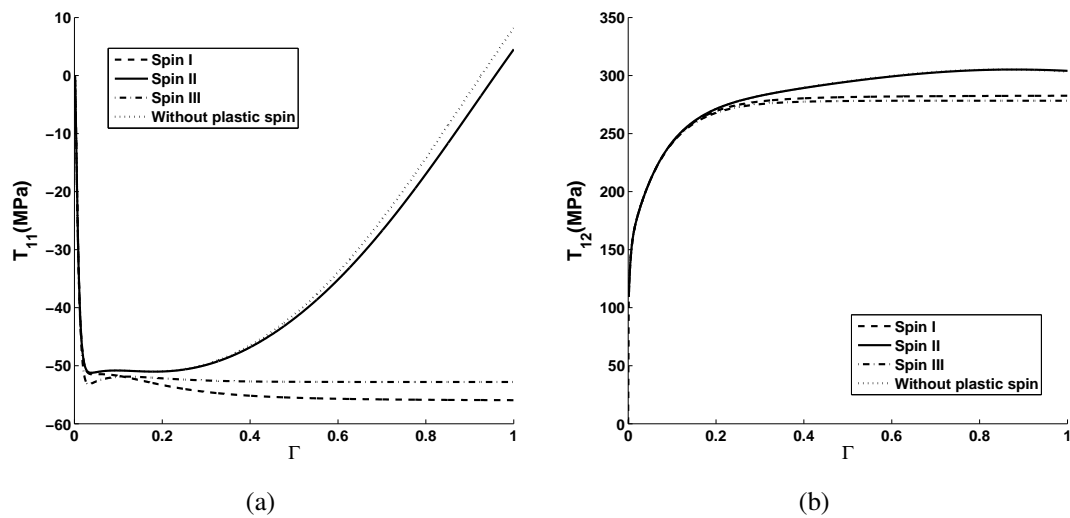


Figura 4.6: Variația componentelor (a)  $T_{11}$ , (b)  $T_{12}$ , ca funcții de componenta de forfecare a deformației,  $\Gamma$ , pentru cele trei tipuri de spin plastic și de asemenea fără spin plastic, folosind valoarea inițială  $\varphi_0 = 45^\circ$ .

2) Pentru spinii plastici I și II nu s-au determinat constante care să conducă la efectul Kim și Yin dar o bună concordanta cu datele experimentale se obține pentru  $\varphi_0 = -45^\circ$  și  $\varphi_0 = -60^\circ$ .

Efectul Kim s-a putut obține numai pentru spinul III care este o generalizare a spinului de tip Dafalias. Pentru spinul III, se îmbunătățesc rezultatele folosind  $c_2, d_2$  nenule:  $c_2 = 120, d_2 = 250$  așa cum se observă în figura 4.3(a).

Această constatare arată că variabila  $A_{22}$  influențează evoluția axelor de ortotropie. Efectul Kim este obținut și de către Dafalias (2000) care utilizează valori diferite ale constantei ce descrie spinul plastic pentru a obține curbe mai apropiate de valorile experimentale. În modelarea din prezenta lucrare, pentru același set de constante al spinului III, se obține o bună aproximare pentru toate valorile inițiale  $\varphi_0 \in \{-30^\circ, -45^\circ, -60^\circ\}$ .

3) În figura 4.5, obținută pentru deformații caracterizate de prezența componentei de forfecare nenulă, se observă că pentru spinii plastici I și III are loc o stabilizare a unghiului de ortotropie. Pentru spinul plastic II și în absența spinului plastic comportamentul este diferit, aproape liniar.

Reprezentări similare celor din figura 4.6, pentru componenta de forfecare  $T_{12}$  și componenta normală  $T_{11}$ , se găsesc în Kuroda (1996) (figura 1 și figura 2) pentru un spin plastic ce corespunde spinului III într-un model izotrop.

## Capitolul 5

# Metode numerice pentru inegalități variaționale în elasto-plasticitatea finită anizotropă

În acest capitol se reformulează problema cvasistatică de echilibru, la momentul  $t$ , cu date pe frontieră și condiții inițiale, prin inegalitatea variațională în necunoscutele  $\mathbf{v}$  - viteza actuală și  $\beta$  -factorul plastic, cuplată cu modelul constitutiv de tip "rate" elaborat în capitolul 2.

Este reconsiderată forma inegalității variaționale în cazul stării plane de tensiune, la momentul de timp  $t$ , folosind rezultatele prezentate în capitolul 4. Asocierea inegalității variaționale cu sistemul diferențial ce caracterizează evoluția în timp a variabilelor modelului elasto-plastic permite actualizarea stării sistemului. Inegalitatea variațională reprezentată la momentul  $t$  conține în coeficienți valorile curente ale tensiunii, variabilelor de ecrusare și ale rotației  $\mathbf{R}$ .

Se formulează un algoritm numeric de rezolvare a problemei de elasto-plasticitate cu date pe frontieră și condiții inițiale, formulată în viteze.

Exemplificăm metoda numerică pentru o placă plană constituită dintr-un material ortotrop, în stare plană de tensiune, supusă unor condiții pe frontieră în viteze. Se prezintă rezultatele numerice obținute și se analizează influența unghiului  $\varphi_0$ , ce caracterizează poziția axelor inițiale de ortotropie față de axele geometriei plăcii, asupra variabilelor modelului. Pentru un proces elastic izotrop se compară rezultatele cu cele obținute folosind programul de element finit *COMSOL*.

În acest capitol se folosește formalismul mișcării relative care a stat la baza articolelor Cleja-Țigoiu (2000b), Cleja-Țigoiu și Matei (2012), pentru a obține formularea "în viteze" a ecuației cvasistatice de echilibru și a condițiilor pe frontieră asociate.

Condiții necesare și suficiente pentru existența și unicitatea soluției inegalităților variaționale abstracte sunt aplicabile formalismului considerat în teză și pot fi găsite în lucrările Lions (1969), Glowinski et al. (1976).

**Formularea prin inegalitate variațională a problemei elasto-plastice - cazul stării plane de tensiune**

**Ipoteze:**

- domeniul are forma unei plăci subțiri de grosime  $2h$ :  $\Omega \times [-h, h]$  cu  $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$  și  $\frac{\sqrt{meas(\Omega)}}{2h} \ll 1$ ,
- axele de ortotropie  $\mathbf{n}_1$  și  $\mathbf{n}_2$  sunt în planul plăcii, axa  $\mathbf{n}_3$  este perpendiculară pe planul plăcii ( $\mathbf{n}_3 = \mathbf{j}_3$ ),
- se impun condiții pe frontieră în viteze, compatibile cu ipoteza:  $\mathbf{T}\mathbf{j}_3 = \mathbf{0}$  în timpul procesului elasto-plastic,
- cadru constitutiv este cel descris în capitolul 2, §2.1, cu restricția:  $\mathbf{T}\mathbf{j}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \hat{N}_{13}^p = \hat{N}_{23}^p = \hat{Q}_{23} = \hat{l}_{13} = \hat{l}_{23} = \hat{l}_{33} = 0$ .

Se formulează în domeniul  $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$  următoarea problemă:

**Problema cu date pe frontieră și condiții inițiale pentru cazul stării plane de tensiune (Problema (EP)):**

Se consideră date funcțiile  $\hat{\mathbf{S}}_t \in (L^\infty(\Omega_t))^2$  și  $\hat{\mathbf{U}}_t \in (H^{1/2}(\Omega_t))^2$ .  
Să se determine funcțiile  $\mathbf{u} : \Omega_t \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{T}, \mathbf{A} : \Omega_t \times [t_0, t_f] \rightarrow Sim$ ,  
 $\varphi, \kappa : \Omega_t \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathfrak{R}$  care verifică:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\hat{\mathbf{S}}_t(\mathbf{x}, t)) &= 0 \text{ în } \Omega_t, \\ \hat{\mathbf{S}}_t(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{L}(\mathbf{x}, t)\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \hat{\mathcal{E}}[\mathbf{D}] - \hat{\mu}\hat{\mathcal{E}}[\partial_{\mathbf{T}}\mathcal{F}] \text{ în } \Omega_t, \\ \hat{\mathbf{S}}_t(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(t)|_{\Gamma_{1,t}} &= \hat{\mathbf{S}}_t(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_{2,t}} &= \hat{\mathbf{U}}_t(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{t} \in [t_0, t_f], \end{aligned} \quad (5.1)$$

condițiile inițiale

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{0}, \varphi(\mathbf{X}, t_0) = \kappa(\mathbf{X}, t_0) = 0, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{0}, \quad (5.2)$$

$$\forall \mathbf{X} \in \Omega,$$

ecuațiile constitutive și de evoluție ce caracterizează modelul elasto-plastic ortotrop:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{T}} &= \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)[\mathbf{D}] - \hat{\mu}\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2)[\hat{\mathbf{N}}^p], \\ \overset{\circ}{\mathbf{A}} &= \hat{\mu}\hat{\mathbf{l}}(\mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2), \\ \overset{\circ}{\kappa} &= \hat{\mu}\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{T}, \mathbf{A}, \kappa, \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2), \\ \overset{\circ}{\mathbf{m}}_k &= 0, \\ \hat{\mu} &= \frac{1}{h_c} < \hat{\beta} > \mathcal{H}(\hat{\mathcal{F}}), \quad h_c = \hat{\mathcal{E}}[\hat{\mathbf{N}}^p] \cdot \hat{\mathbf{N}}^p + \hat{\mathbf{N}}^p \cdot \hat{\mathbf{i}} - \partial_{\kappa}\hat{\mathcal{F}}\hat{\mathbf{b}}, \\ \hat{\beta} &= \hat{\mathcal{E}}[\hat{\mathbf{N}}^p] \cdot \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Se introduce spațiul normat:

$\mathcal{V}(t) = (H^1(\Omega_t))^2 \times L^2(\Omega_t)$  cu norma

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{\|w_1\|_{H^1(\Omega_t)}^2 + \|w_2\|_{H^1(\Omega_t)}^2 + \|\delta\|_{L^2(\Omega_t)}^2}, \forall \mathbf{V} = (w_1, w_2, \delta) \in \mathcal{V}(t). \quad (5.4)$$

Mulțimea câmpurilor de viteze cinematic admisibile la momentul  $t$ , mulțimea multiplicatorilor plastici admisibili și mulțimea vectorilor admisibili se definesc prin:

$$\mathcal{V}_{ad}(t) \equiv \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega_t))^2 \mid \mathbf{v}|_{\Gamma_{2t}} = \hat{\mathbf{U}}_t\}, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t) \equiv \{\delta \in L^2(\Omega_t) \mid \delta(\mathbf{x}) = 0, \text{ dacă } \mathbf{x} \in \Omega_t - \Omega_t^p, \\ \delta(\mathbf{x}) \geq 0, \text{ dacă } \mathbf{x} \in \Omega_t^p\}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\mathcal{K}(t) := \{(v_1, v_2, \beta) \in \mathcal{V}(t) \mid (v_1, v_2)|_{\Gamma_{2t}} = \hat{\mathbf{U}}(t), \beta \in \mathcal{M}(t)\}. \quad (5.7)$$

Expresia tensorului de elasticitate, tensor simetric de ordinul 4, este precizată prin:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{D}) = (\tilde{a}_{11}\tilde{D}_{11} + \tilde{a}_{12}\tilde{D}_{22})\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1 + (\tilde{a}_{12}\tilde{D}_{11} + \tilde{a}_{22}\tilde{D}_{22})\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2 + a_{44}\tilde{D}_{12}(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_1). \quad (5.8)$$

unde  $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{22}$  sunt constante ce caracterizează starea plană de tensiune și depind de constantele elasticității liniare ortotrope.

Se introduc:

-operatorul  $\nabla$ ,  $\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i,k=1,2} v_{i,k}(\mathbf{x}, t) \mathbf{j}_i \otimes \mathbf{j}_k$ , în spațiul bidimensional  $\mathfrak{R}^2$ ,

-tensorul de tensiune,  $\mathbf{T}$ , reprezentat prin:  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i,k=1,2} T_{ik}(\mathbf{x}, t) \mathbf{j}_i \otimes \mathbf{j}_k$  și similar

funcțiile tensoriale  $\hat{\mathbf{N}}^p, \hat{\mathbf{I}}$ .

**Teorema 5.1.** *La orice moment de timp  $t$ , câmpul vitezelor,  $\mathbf{v}$  și factorul plastic echivalent,  $\beta$ ,  $(\mathbf{v}, \beta) \in \mathcal{K}(t)$ , satisfac următoarea inegalitate:*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \{\nabla \mathbf{v} \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{w} - \nabla \mathbf{v}) + \tilde{\mathcal{E}}[\{\nabla \mathbf{v}\}^s] \cdot (\nabla \mathbf{w} - \nabla \mathbf{v})\} d\mathbf{x} - \\ & - \int_{\Omega_t^p} \beta \frac{1}{h_{c,pl}} \tilde{\mathcal{E}}[\partial_{\mathbf{T}} \hat{\mathcal{F}}] \cdot (\nabla \mathbf{w} - \nabla \mathbf{v}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_t^p} (\delta - \beta) \frac{1}{h_{c,pl}} \tilde{\mathcal{E}}[\partial_{\mathbf{T}} \hat{\mathcal{F}}] \cdot \{\nabla \mathbf{v}\}^s d\mathbf{x} \quad (5.9) \\ & + \int_{\Omega_t^p} \frac{1}{h_{c,pl}} (\delta - \beta) \beta d\mathbf{x} \geq \int_{\Gamma_{1t}} \hat{\mathbf{S}}_t \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{v}) da \end{aligned}$$

pentru orice câmp de vectori admisibili  $(\mathbf{w}, \delta) \in \mathcal{K}(t)$ .

Notăm:

$$\begin{aligned} a[\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}] &= \int_{\Omega_t} \{\nabla \mathbf{v} \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{w}) + \tilde{\mathcal{E}}[\{\nabla \mathbf{v}\}^s] \cdot (\nabla \mathbf{w})\} d\mathbf{x} - \\ & - \int_{\Omega_t^p} \beta \frac{1}{h_{c,pl}} \tilde{\mathcal{E}}[\mathbf{N}^p] \cdot (\nabla \mathbf{w}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_t^p} \delta \frac{1}{h_{c,pl}} \hat{\mathcal{E}}[\mathbf{N}^p] \cdot \{\nabla \mathbf{v}\}^s d\mathbf{x} + \int_{\Omega_t^p} \frac{1}{h_{c,pl}} \delta \beta d\mathbf{x} \quad (5.10) \end{aligned}$$

$$f[\tilde{\mathbf{U}}] = \int_{\Gamma_{1t}} \hat{\mathbf{S}}_t \cdot \mathbf{w} da, \quad \forall \mathbf{U} = (\mathbf{v}, \beta), \tilde{\mathbf{U}} = (\mathbf{w}, \delta) \in \mathcal{V}_t$$

**Teorema 5.2. (IV-EP-TP)**

Să se determine  $\mathbf{U} = (v_1, v_2, \beta) \in \mathcal{K}(t)$  astfel încât  $a[\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{U}] \geq f[\tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{U}]$ ,  $\forall \tilde{\mathbf{U}} \in \mathcal{K}(t)$

Se reformulează **Problema (EP)** prin inegalitatea variațională la momentul  $t$ , cuplată cu sistemul diferențial ce caracterizează evoluția variabilelor modelului.

**Teorema 5.3.** 1) La fiecare moment de timp  $t$ , câmpul de viteze  $\mathbf{v}$  și factorul plastic  $\beta$  sunt soluțiile problemei de inegalitate variațională (IV-EP-TP):

Să se determine  $\mathbf{U} = (v_1, v_2, \beta) \in \mathcal{K}(t)$  astfel încât  $a[\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{U}] \geq f[\tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{U}]$ ,  $\forall \tilde{\mathbf{U}} \in \mathcal{K}(t)$ ; funcționalele  $a$  și  $f$  sunt definite în formulele (5.10).

2) Evoluția variabilelor  $\dot{T}_{11}$ ,  $\dot{T}_{22}$ ,  $\dot{T}_{12}$ ,  $\dot{A}_{11}$ ,  $\dot{A}_{22}$ ,  $\dot{A}_{12}$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\kappa}$  în fiecare punct  $\mathbf{x} \in \Omega$ , fixat, depinde de  $\nabla \mathbf{v}$  și  $\beta$  și este descrisă de sistemul diferențial:

$$\begin{aligned}\dot{T}_{11} &= -\frac{\beta}{h_{c,pl}} [\tilde{a}_{11} \hat{N}_{11}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + \tilde{a}_{12} \hat{N}_{22}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})] + \tilde{a}_{11} \tilde{D}_{11}(\varphi) + \tilde{a}_{12} \tilde{D}_{22}(\varphi) \\ \dot{T}_{22} &= -\frac{\beta}{h_{c,pl}} [\tilde{a}_{12} \hat{N}_{11}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + \tilde{a}_{22} \hat{N}_{22}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A})] + \tilde{a}_{12} \tilde{D}_{11}(\varphi) + \tilde{a}_{22} \tilde{D}_{22}(\varphi) \\ \dot{T}_{12} &= -\frac{\beta}{h_{c,pl}} a_{44} \hat{N}_{12}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) + a_{44} \tilde{D}_{12}(\varphi) \\ \dot{A}_{ij} &= \frac{\beta}{h_{c,pl}} \hat{l}_{11}(\mathbf{T}, \mathbf{A}), \quad i, j \in \{1, 2\} \\ \dot{\varphi} &= \frac{\beta}{h_{c,pl}} \hat{\Omega}_{12}^p(\mathbf{T}, \mathbf{A}) - \tilde{W}_{12}(\varphi) \\ \dot{\kappa} &= \frac{\beta}{h_{c,pl}} \hat{b}(\mathbf{T}, \mathbf{A})\end{aligned}\tag{5.11}$$

Parametrul de ecruisare are expresia:  $h_{c,pl} = \tilde{\mathcal{E}}[\hat{\mathbf{N}}^p] \cdot \hat{\mathbf{N}}^p + \hat{\mathbf{N}}^p \cdot \hat{l} + (\partial_{\kappa} F(\kappa)) \hat{b}$ .

Componentele  $\tilde{D}_{ik}$  au expresiile dependente de  $\nabla \mathbf{v}$  și  $R$ .

3) Ecuația pentru determinarea vitezei de deformare axială  $v_3$  este:

$$v_{3,3} = \frac{\beta}{h_c a_{33}} (a_{13} N_{11}^p + a_{23} N_{22}^p + a_{33} N_{33}^p) - \frac{a_{13}}{a_{33}} \tilde{D}_{11} - \frac{a_{23}}{a_{33}} \tilde{D}_{22}\tag{5.12}$$

Proprietatea de simetrie a funcționalei  $a[\cdot; \cdot]$  ( $a[\mathbf{U}, \mathbf{V}] = a[\mathbf{V}, \mathbf{U}]$ ,  $\forall \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{V}(t)$ ) ne conduce la echivalența problemei de inegalitate variațională cu problema de minimizare:

Să se determine  $\mathbf{U} \in \mathcal{K}(t)$  astfel încât  $J(\mathbf{U}) \leq J(\mathbf{V}) \forall \mathbf{V} \in \mathcal{K}(t)$

pentru funcționala  $J: \mathcal{V}(t) \rightarrow \Re$ ,  $J(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} a[\mathbf{V}, \mathbf{V}] - f[\mathbf{V}]$ .

Prin aplicarea metodei elementului finit se obține o problemă de minimizare în dimensiune finită.

### Problema de minimizare în spații produs. Algoritmul Gauss-Seidel

În acest paragraf se particularizează metoda Gauss Seidel cu constrângeri pe spații produs. Se demonstrează convergența algoritmului particularizând demonstrația din Cea (1971) și se determină o formulă de evaluare a erorii.

Se consideră următoarea problemă de minimizare:

**Pmin 1:** Să se determine  $u \in \mathcal{K}$  astfel încât  $J(u) \leq J(v), \forall v \in \mathcal{K}$ .

#### Ipoteze:

- 1)  $N \in \mathbf{N}, N > 0, \mathcal{V}_i = \mathfrak{R}$
- 1)  $J: \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}, J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N a_{kl} v_k v_l - \sum_{k=1}^N f_k v_k,$
- 3)  $A = (a_{ij})_{i,j \in \{0,1,\dots,N\}} \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathfrak{R})$  o matrice simetrică
- 4) Valorile proprii  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \in \mathfrak{R}$  verifică  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$
- 5)  $(f_1, f_2, \dots, f_N) \in \mathfrak{R}^N$
- 6)  $I_0, I_1 \subset \mathbf{N}$  astfel încât  $I_0 \cup I_1 = \{1, 2, \dots, N\}$  și  $I_0 \cap I_1 = \emptyset$
- 7)  $\mathcal{K}_i = [0, \infty), \forall i \in I_0$  și  $\mathcal{K}_i = \mathfrak{R}, \forall i \in I_1$ .

(5.13)

Algoritmul Gauss-Seidel cu constrângeri: (Cea (1971))

- $$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ Fie } \mathbf{u}^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_N^0) \in \mathcal{K} \text{ arbitrar.} \\ (2) \text{ Se presupune că } \mathbf{u}^n \in \mathcal{K} \text{ a fost determinat.} \\ \text{Se determină } \mathbf{u}^{n+1} \in \mathcal{K} \text{ în } N \text{ pași calculând succesiv componentele } u_i^{n+1}, i \in \{1, \dots, N\}. \\ \text{Se presupune că la pasul } i \text{ sunt determinate componentele } u_j^{n+1} \in \mathcal{K}_j, \forall j < i. \\ \text{Se determină } u_i^{n+1} \text{ soluție a următoarei probleme de minimizare:} \\ \mathbf{Pmin 2:} \text{ Să se determine } u_i^{n+1} \in \mathcal{K}_i \text{ astfel încât} \\ J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) \leq J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) \forall v_i \in \mathcal{K}_i \end{array} \right. \quad (5.14)$$

**Teorema 5.4.** Dacă ipotezele (5.13) sunt îndeplinite, atunci sunt adevărate următoarele afirmații:

- (1) Problema **Pmin 1** pentru funcționala  $J: \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R}, J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N a_{kl} v_k v_l - \sum_{k=1}^N f_k v_k$

are o unică soluție  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$

(2) Șirul  $\mathbf{u}^n$  obținut prin Algoritmul Gauss-Seidel cu constrângeri converge tare la  $\mathbf{u}$  în  $\mathcal{V}$ .

$$(3) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^n\| \leq \frac{\lambda_N}{\lambda_1} \sqrt{\frac{N^2 - N}{\lambda_1} (J(\mathbf{u}^{n-1}) - J(\mathbf{u}^n))}$$

### Algoritm numeric pentru o problemă de elasto-plasticitate

Se consideră **Problema (EP)**. Pentru rezolvarea numerică se propune algoritmul numit **Algoritm cu pas de timp variabil pentru rezolvarea problemei elasto-plastice în cazul stării plane de tensiune** ce are la bază teorema 5.3.

Descrierea algoritmului:

Se realizează o triangularizare a domeniului  $\Omega$ . La momentul de timp  $t_0 = 0$  se cunosc valorile inițiale ale câmpurilor  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$ . Se alege un pas inițial de timp.

Se consideră cunoscute câmpurile  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$  la momentul de timp  $t = t_n$  și se parcurg etapele:

1) se obține problema de minimizare în dimensiune finită de forma (**Pmin 1**) folosind metoda elementului finit; coeficienții funcționalei pătratice  $a(\cdot, \cdot)$  depind de  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$  și se calculează în fiecare element,

2) se aproximează soluția problemei în dimensiune finită folosind algoritmul Gauss-Seidel de minimizare pe spații produs cu restricții, descris în (5.14),

3) se actualizează câmpul de deplasare și coordonatele nodurilor,

4) se actualizează variabilele  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\kappa$ ,  $\varphi$  utilizând metoda Runge Kutta de ordinul 4 pentru sistemul diferențial (5.11); aceste variabile se consideră constante pe element,

5) se actualizează domeniul  $\Omega_t^p$  folosind funcția de plasticitate și valorile actualizate pentru tensiune și variabilele de ecrusare.

În timpul procesului elasto-plastic pasul de timp se ajustează (se micșorează) dacă există un element  $e$  în care starea de tensiune este astfel încât  $\hat{\mathcal{F}}(1, e) > pF(1, e)$  unde  $\hat{\mathcal{F}}$  conține valorile funcției de plasticitate în fiecare element  $e$ ,  $p \in (0, 1)$  reprezintă un procent,  $F$  conține valoarea  $F(\kappa)$  în fiecare element  $e$ .

**Observatia 5.1.** Pentru componentele vitezei se folosesc funcții de formă liniare în raport cu fiecare variabilă, iar pentru funcția  $\beta$  se folosesc funcții de formă constante pe element. Componentele vitezei intervin în problema de inegalitate variațională prin derivatele lor în raport cu variabilele ce definesc coordonatele punctului de la momentul  $t$ , iar pentru funcția  $\beta$  nu intervin derivate.

Se va determina tensorul de deformație Green,  $\Delta = \frac{1}{2}(\mathbf{FF}^T - \mathbf{I})$  la fiecare pas de timp și în fiecare element  $e$ . Utilizarea unei măsuri de deformație specifică elasto-plasticității cu deformații finite este necesară având în vedere că modelul constitutiv este elasto-plastic ortotrop cu deformații finite.

### Rezultate numerice

Fie o placă plană dreptunghiulară reprezentată în figura 5.1, încastrată pe porțiunea AD, cu viteză impusă pe frontiera BC astfel încât  $\chi(BC)$  este paralelă și egală cu AD în timpul procesului.

Datele pe frontieră sunt:

$$\mathbf{v}|_{[DA]} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}|_{[BC]} = \bar{\mathbf{v}} = v_{fr} \mathbf{j}_1 \text{ -condiția pe frontieră în viteze}$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{0} \text{ pe } (AB) \cup (CD) \text{ -condiția pe frontieră în tensiuni}$$

La momentul inițial placa este liberă de tensiune și nedeformată, iar orientarea direcțiilor inițiale de ortotropie este descrisă prin valoarea inițială  $\varphi_0$ .

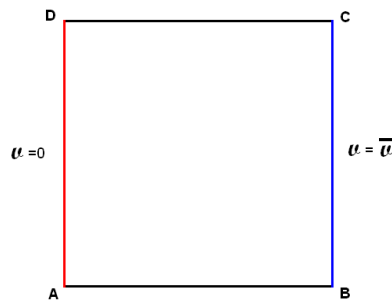


Figura 5.1: Placa nedeformată cu condițiile pe frontieră în viteze

Pentru deplasarea relativă de 1% a punctului B, obținută la momentul  $T = 100$  secunde, se reprezintă distribuția în plan pentru o parte din necunoscutele problemei, folosind valorile inițiale  $\varphi_0 = \pi/6$  și  $\varphi_0 = \pi/3$ :

- componenta  $T_{11}$  este reprezentată în figura 5.2,
- componenta  $\Delta_{11}$  este reprezentată în figura 5.3,
- unghiul  $\varphi$  este reprezentat în figura Fig5-8.

Se observă influența poziției axelor inițiale de ortotropie asupra evoluției variabilelor.



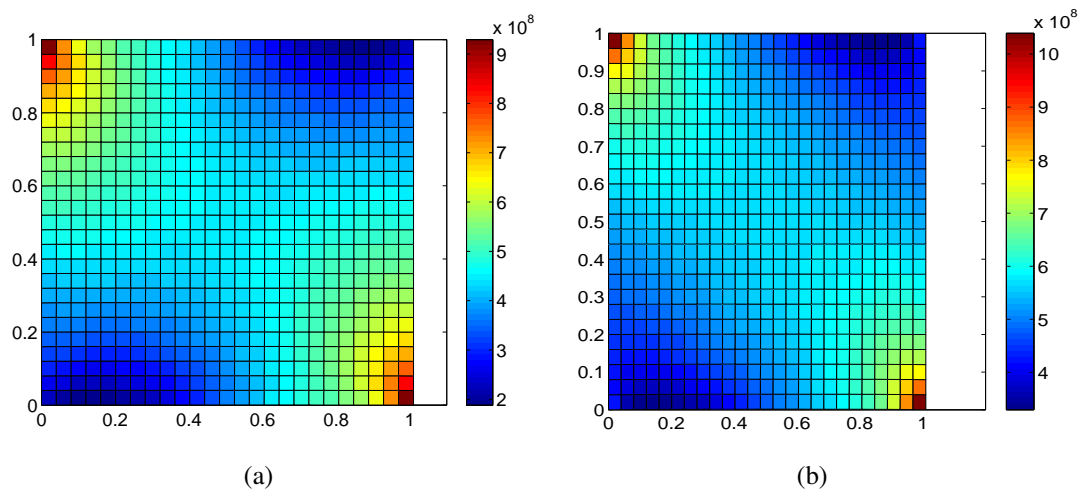


Figura 5.2: Distribuția componentei  $T_{11}$  (Pa) a tensiunii pentru (a)  $\varphi_0 = \pi/6$ , (b)  $\varphi_0 = \pi/3$

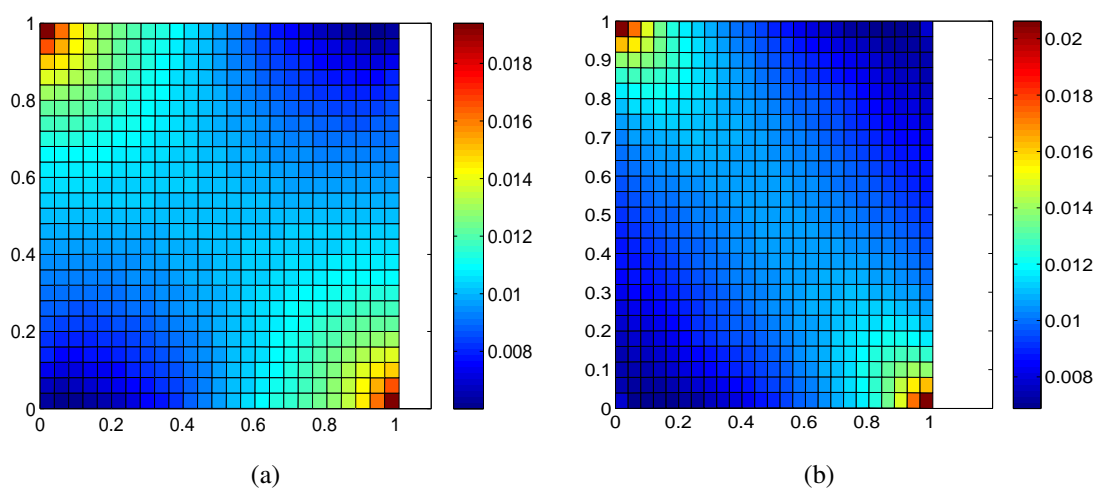


Figura 5.3: Distribuția componentei  $\Delta_{11}$  a deformației pentru (a)  $\varphi_0 = \pi/6$ , (b)  $\varphi_0 = \pi/3$

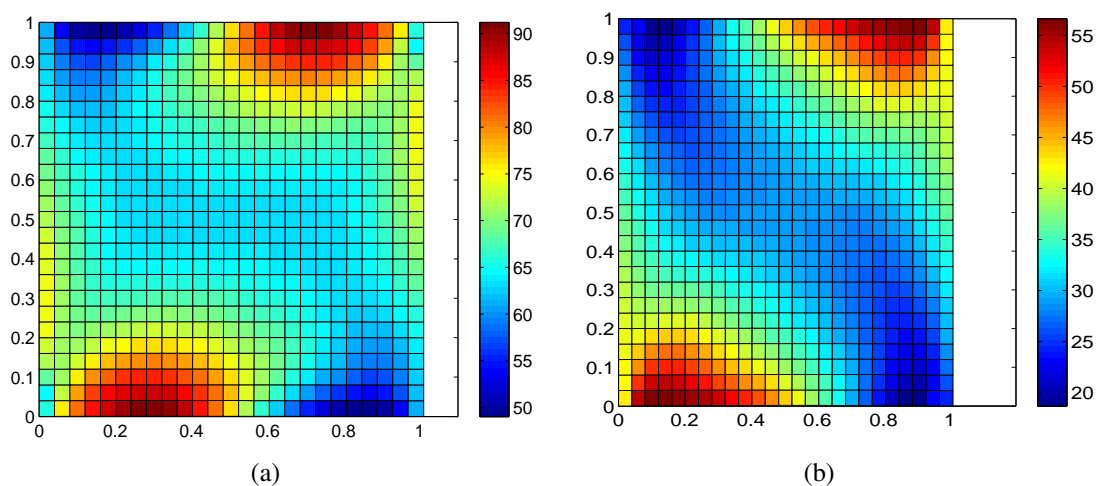


Figura 5.4: Distribuția unghiului  $\varphi$ (grade) pentru (a)  $\varphi_0 = \pi/6$ , (b)  $\varphi_0 = \pi/3$

### Validarea algoritmului

Folosind programul de element finit *COMSOL*, se modelează problema descrisă anterior, pentru cazul elastic izotrop.

S-au reprezentat:

- componentele deplasării  $u_1$  (figura 5.5),  $u_2$ ,
- componentele tensiunii  $T_{11}$  (figura 5.6),  $T_{22}$ ,  $T_{12}$ .

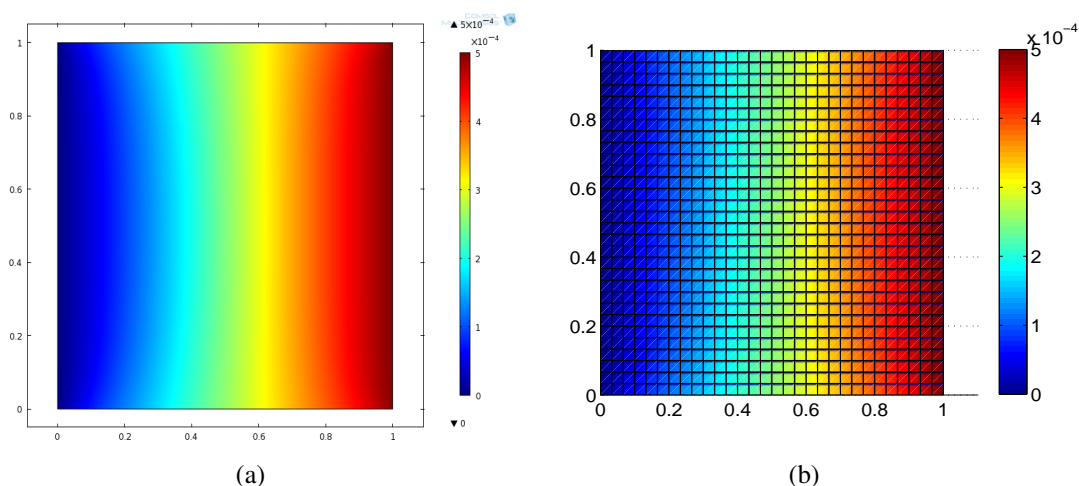


Figura 5.5: Distribuția componentei  $u_1$ (m) obținută cu (a) *COMSOL*, (b) Programul *Matlab*

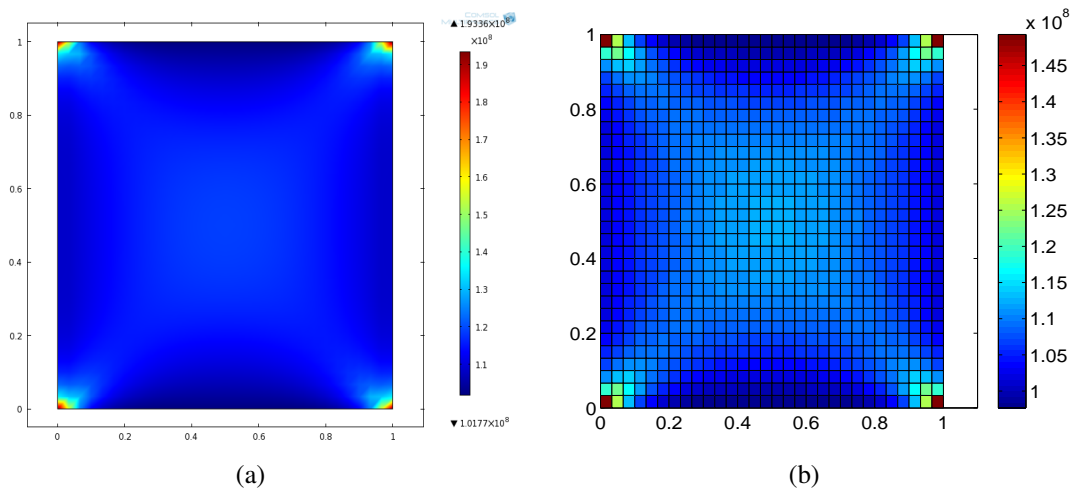


Figura 5.6: Distribuția componentei  $T_{11}$ (Pa) obținută cu (a) *COMSOL*, (b) Programul *Matlab*

Urmărim în primul rând aspectele calitative ale distribuției componentelor deplasării și tensiunii. Este de remarcă că, în cazul izotrop, pentru componentele tensiunii se obține o distribuție simetrică în raport cu axa mediană orizontală a plăcii.

### Concluzii:

În această teză, se dezvoltă modele constitutive complexe pentru materiale ortotrope cu deformații finite. Modelarea constitutivă de tip rate permite caracterizarea evoluției tensiunii Cauchy, a variabilelor de ecrusare cinematică și scalară, dar și a axelor de ortotropie (a unghiurilor lui Euler) prin sisteme de tip diferențial.

Au fost elaborate modele constitutive Euleriene (în configurația deformată). Rotațiile arbitrare ale axelor de ortotropie sunt caracterizate prin unghiurile lui Euler, rotația plană fiind un caz particular.

Modelele constitutive descriu proprietățile reale ale materialelor: efect Bauschinger inițial, ecrusare, încărcări ciclice, rotația axelor de ortotropie. Determinarea funcțiilor constitutive (prin constantele de material) se realizează astfel încât prin simulări numerice să poată fi descrise datele experimentale din articolele Verma et al. (2011) și Kim, Yin (1997). Se constată că modelul este flexibil și poate descrie:

- anizotropia orientatională (variația în timp a axelor de ortotropie)
- anizotropia inițială (suprafața inițială de plasticitate)
- anizotropia structurală (dată de variabilele de ecrusare)
- deformațiile finite.

Formularea problemelor elasto-plastice cu date pe frontieră și condiții inițiale prin inegalitate variațională la momentul de timp fixat,  $t$ , cuplată cu sistemul diferențial asociat modelului, permite studiul comportării materialului pentru **proces neomogene**.

Pentru inegalitatea variațională asociată modelului elasto-plastic cu stare plană de tensiune s-a propus un algoritm numeric cu pas de timp ajustat ce are la bază metoda elementului finit și algoritmul Gauss-Seidel pentru minimizare cu constrângeri. Actualizarea domeniului curent de deformație plastică se realizează la fiecare moment de timp  $t$ , utilizând funcția de plasticitate și variabilele de ecrusare actualizate.

S-au prezentat câteva dintre rezultatele numerice obținute pentru o problemă de elasto-plasticitate, folosind valorile inițiale  $\varphi_0 = \pi/6$  și  $\varphi_0 = \pi/3$  ce descriu poziția axei de ortotropie  $n_1$  în raport cu geometria plăcii.

Rezultatele originale din capitolele 2, 3 și 4 au fost publicate în două articole în colaborare, iar rezultatele din capitolul 5 vor face obiectul unui articol în curs de elaborare.

### Perspective:

-determinarea de soluții numerice pentru domenii și condiții pe frontieră complexe, compatibile cu probleme de interes tehnic,

-utilizarea de algoritmi numerici specifici inegalităților variaționale,

-studii calitative privind existența, unicitatea, stabilitatea soluțiilor de elasto-plasticitate prin intermediul inegalității variaționale.

**Bibliografie**

Armstrong, P.J., Frederick, C.O., 1966. A Mathematical representation of the multiaxial Bauchinger effect. *Central Electricity generating Board Report*, Berkeley Nuclear Laboratories, RD/B/N 731.

Cea, J., 1971. *Optimisation. Theorie and Algorithmes*. Dunod, Paris.

Cleja-Țigoiu, S., 2000a. Orthotropic  $\Sigma$ - models in finite elasto- plasticity. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, **45**, 219–227.

Cleja-Țigoiu, S., 2000b. Anisotropic and Dissipative Finite Elasto-Plastic Composite, *Rendiconti del Seminario Matematico Universit e Politecnico di Torino*, **58**, 1.

Cleja-Țigoiu S., 2007. Anisotropic Elasto-plastic Model for Large Metal Forming Deformation Processes, In Modeling and Experiments in Material Forming. *International Journal of Forming Processes*, **10**, 67–87.

Cleja-Țigoiu S., Iancu L., 2011, Orientational Anisotropy and Plastic Spin in Finite Elasto-Plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, **48 (6)**, 939–952.

Cleja-Țigoiu S., Iancu L., 2013. Orientational anisotropy and strength-differential effect in orthotropic elasto-plastic materials. *International Journal of Plasticity*, **47**, 80-110,

Cleja-Țigoiu, S., Matei, A., 2012. Rate Boundary Value Problems and Variational Inequalities in Rate-Independent Finite Elasto-Plasticity, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 1-29, DOI: 10.1177/1081286511426915.

Cleja-Țigoiu S., Soós E. 1989. Material symmetry of elastoplastic materials with relaxed configurations. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, **34**, 513–521.

Cleja-Țigoiu S., Soós E. 1990. Elastoplastic models with relaxed configurations and internal state variables. *Applied Mechanics Reviews*, **43**, 131–151.

Dafalias Y.F., 2000. Orientational evolution of plastic orthotropy in sheet metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **48**, 2231–2255.

Glowinski, R., Lions, J.L., Tremolieres, R., 1976. *Analise numerique des inequations variationnelles*. Dunod, Paris.

Kim, K.H., Yin, J.J., 1997. Evolution of anisotropy under plane state. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **45**, 841–845.

Kuroda M., 1995. Plastic spin associated with a corner theory of plasticity. *International Journal of Plasticity*, **11**, 547–570.

Kuroda M., 1996. Roles of plastic spin in shear banding, *International Journal of Plasticity*, **12**, 671–693.

Lions, J. L., 1969. *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non- lineaires*. Dunod, Paris.

Liu, I-Shih, 1982. On representations of anisotropic invariants. *International Journal of Engineering Science*, **40**, 1099-1109.

Mandel J., 1972. *Plasticité classique et viscoplasticité*. CISM- Udine, Springer- Verlag, Vienna, New- York.

Noll, W., 1958. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media.

## Bibliografie

---

*Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **2**, 197–226.

Noll, W., 1967. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities . *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **27**, 1–32.

Noll, W., 1972. A new mathematical theory of simple materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **48**, 1–50.

Truesdell, C., Noll, W., 1965. The non-linear field theories of Mechanics. *Handbuch der Physik*, **III/3**.

Truesdell, C., 1972. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Acad. Press.

Verma, R.K., Kuwabara, T., Chung, K., Haldar, A., 2011. Experimental evaluation and constitutive modeling of non-proportional deformation for asymmetric steels. *International Journal of Plasticity*, **27**, 82–101.

Wang, C.C., 1970. A new representation theorem for Isotropic Functions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **36**, 166–223.

Zbib, H.M., Aifantis, E.C., 1988. On the concept of relative and plastic spins and its implications to large deformation theories. I & II, *Acta Mechanica*, **75**, 15–33, and 35–56.