EXTINDERI SIMETRICE DE VALUĂRI DE LA K LA $K(X_1,\ldots,X_n)$

1. INTRODUCERE

Extinderile unei valuări de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$ sunt, în general, foarte complexe și greu de descris. Având în vedere clasificările extinderilor unei valuări de la K la $K(X)$, facută în [9] și [11], conform căreia acestea se împart în:

1. r.t.-extinderi
2. r.a.t.-extinderi
3. r.a.f.-extinderi (și mai departe în $V_-(G_v)$ / $V_+(G_v)$ / ...)

numărul de combinații posibile pentru extinderile unei valuări de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$, obținute în urma extinderilor succesive de la $K(X_1,\ldots,X_i)$ la $K(X_1,\ldots,X_{i+1})$, este de ordinul 3^n, fără aparente restricții.

Mai mult decât atât, fiecare extindere intermediară, de la $K(X_1,\ldots,X_i)$ la $K(X_1,\ldots,X_{i+1})$, este profund legată de închiderea algebrică a corpului de la care pleacă, făcând abordarea clasică, cu ajutorul perechilor minimale, extrem de dificilă și nepractică. Orice tentativă de a folsi direct rezultatele obținute în cazul extinderilor unei valuări de la K la $K(X)$ ne trimite în domeniul geometriei algebrice unde continuarea analizei devine foarte laborioasă.

O serie de lucrări precedente vizează diverse simplificări ale acestei probleme. În lucrarea [11] este discutat un caz particular, pentru $n = 2$, anume valuările de rang 2 pe $K(X_1, X_2)$ care sunt triviale pe K și se introduce noțiunea de divizor prim pe $K(X_1, X_2)$ sub forma unei valuări pe $K(X_1, X_2)$, trivială pe K, al cărei corp rezidual este transcedent peste K.

În [14] se introduce un nou tip de divizor pe $K[X_1,\ldots,X_n]$, definit ca un șir de polinoame cu proprietăți speciale, care, împreună cu algoritmul Euclidian corespunzător, este folosit pentru a descrie acțiunea unei valuări Gaussiene asupra corpului de fracții de polinoame și a obține generalizări, pentru un n arbitrar, ale teoremelor principale din [7], [9] și [10].

Lucrările [15], [16] și [17] studiază extinderile de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$ în anumite condiții speciale în care forma finală a extinderii este ușor de descris, dar acele condiții speciale sunt, în schimb, oarecum greu de asigurat.

În [18] se realizează o caracterizare completă a extinderilor unei norme nearhimedeene la o normă pe algebra polinomială $K[X_1,\ldots,X_n]$, cu aplicații importante în geometria algebrică.

În această lucrare ne propunem să studiem extinderile de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$ plecând de la o altă perspectivă și anume definind o clasă de extinderi care au o singură proprietate specială, anume simetria în raport cu nedeterminatele $X_1,\ldots,X_n$. Vom defini noțiuni specifice acestor extinderi, cu ajutorul cărora vom demonstra o serie de rezultate care simplifică clasificarea acestui gen de extinderi față de cazul general.

Legătura cu extinderile generale se face prin intermediul fracțiilor de polinoame simetrice, al căror subcorp, $K(e_1^{(n)},\ldots, e_n^{(n)})$, al lui $K(X_1,\ldots,X_n)$, restricționează extinderile care sunt simetrice în raport cu $X_1,\ldots,X_n$ la extinderi care nu sunt neapărat simetrice (cazul general) în raport cu $e_1^{(n)},\ldots, e_n^{(n)}$. Odată facută această legătură, se deschide calea studiului în sens invers, plecând de la extinderi oarecare, dar privite pe subcorpul fracțiilor de polinoame simetrice, apoi încercând să descriem cum acestea se extind de la $K(e_1^{(n)},\ldots, e_n^{(n)})$ la $K(X_1,\ldots,X_n)$. Cum extinderea $K(X_1,\ldots,X_n)$ / $K(e_1^{(n)},\ldots, e_n^{(n)})$ este Galoisiană cu grupul Galois S_n al permutărilor cu n elemente, pentru orice valuare w^e fixată pe $K(e_1^{(n)},\ldots, e_n^{(n)})$ și pentru orice valuare w pe $K(X_1,\ldots,X_n)$ care extinde w^e, avem că orice altă valuare w' care extinde w^e este de forma $w' = w \circ \sigma$, cu $\sigma \in \mathrm{Gal}(K(X_1,\ldots,X_n) / K(e_1^{(n)},\ldots, e_n^{(n)})) \cong S_n$ (a se vedea [19]).

Lucrarea este structurată în 8 capitole, incluzându-l pe cel de față. Celelalte capitole, 2-8, vor fi prezentate pe scurt în cele ce urmează.

Capitolul 2 este destinat, exclusiv, teoriei deja existente în materie. Aici vom prezenta noțiunile și rezultatele principale din teoria valuărilor ce ne vor fi utile pe parcursul acestei lucrări, insistând pe clasificarea extinderilor unei valuări de la K la $K(X)$.

În **capitolul 3**, vom defini noțiunile de valuare simetrică și ultrasimetrică. Vom prezenta o serie de proprietăți ale acestora, vom demonstra o serie de rezultate ce fac legătura dintre aceste valuări și subcorpul fracțiilor de polinoame simetrice, vom analiza extinderea simetriei la închiderea algebrică și vom trage câteva concluzii importante în privința acestor valuări, în general.

Capitolul 4 se va ocupa de cea mai simplă categorie de valuări simetrice, dar în același timp foarte utilă pentru caracterizarea valuărilor simetrice în general, numite sugestiv *valuări rezidual-transcendente simple*. Ele sunt, de fapt, cea mai largă generalizare a extinderilor Gaussiene, pentru care se păstrează proprietatea de simetrie. Cel mai important rezultat al acestui capitol este Teorema 4.3, care permite caracterizarea completă a acestor valuări. Aspectul cel mai interesant dezvăluit de această teoremă se referă nu la ceea ce se întâmplă „pe lungime” (extinderile intermediare) ci „pe lățime”, adică extinderile de la K la $K(X_i)$. Deși aceste extinderi sunt similare și, la prima vedere, au libertate totală în modul în care își formează corpurile reziduale, faptul că pot fi prelungite coeziv la o valuare rezidual-transcendentă simplă limitează, printr-o forță nevăzută, această libertate.

În **capitolul 5** vom defini un tip de simetrie mai tare, anume acela care permite și extinderea simetriei la oricâte alte nedeterminate. Valuările de acest tip se vor numi *simetric-deschise* și vor dovedi o proprietate esențială: există un lanț de extinderi ale acestora la închiderile algebrice ale corpurilor pe care sunt definite, care le prelungesc simetria. Cel mai important rezultat în cadrul acestui capitol este Teorema 5.6, care împarte extinderile simetric-deschise în doar două categorii, dintre care, cea de a doua este reprezentată, în fapt, de extinderi care se pot scrie ca limită a unui șir de extinderi din prima categorie. În finalul capitolului, vom prezenta un tabel cu toate posibilele extinderi simetric-deschise, împărțite în 7 tipuri, în funcție de parametrii acestora.

În **capitolul 6** vom discuta extinderile simetric-închise. Vom defini gradul de simetrie al unei valuări și vom face legăturile dintre acesta și noțiunile prezentate anterior. Vom constata, astfel, că pentru studierea unei extinderi simetric-închise este suficient să studiem o restricție a acestia, pe care o vom numi *restricția cea mai relevantă*.

Capitolul 7 este rezervat exemplelor și contra-exemplelor diverse, menite a oferi o mai bună înțelegere a conceptelor și rezultatelor generale discutate în capitolele anterioare.

În fine, **capitolul 8** este destinat concluziilor și temelor de cercetare ulterioară, rezultate din problemele rămase nerezolvate de această lucrare. Accentul rămâne pus pe legătura dintre extinderile simetrice și extinderile generale, prin intermediul fracțiilor de polinoame simetrice.

Definițiile și rezultatele principale ale acestei lucrări (în special cele conținute în capitolele 3-5) au fost publicate, respectiv acceptate spre publicare, în articolele [20], respectiv [21].

3. SIMETRIA VALUĂRILOR ÎN RAPORT CU $X_1,\ldots,X_n$

Vom începe prin definirea clasei speciale de extinderi de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$ la care ne vom referi pe tot parcusul acestei lucrări.

Definiţia 3.1: O valuare w pe $K(X_1,\ldots,X_n)$, cu $n \geq 2$, se numeşte *valuare simetrică* (în raport cu $X_1,\ldots,X_n$) dacă, oricare ar fi $\pi \in S_n$ (adică π este o permutare a mulțimii $\{1,2,\ldots,n\}$) şi oricare ar fi $f \in K(X_1,\ldots,X_n)$, avem:

$$w\left(f(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = w\left(f(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \ldots, X_{\pi(n)})\right).$$

În acest caz notăm cu $\pi f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = f(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \ldots, X_{\pi(n)})$, aplicaţia:

$$f \to \pi f$$

fiind un automorfism al lui $K(X_1,\ldots,X_n)$ care îl lasă pe loc pe K (şi care lasă pe loc şi fracțiile simetrice de polinoame din $K(X_1,\ldots,X_n)$).

Pentru $n < 2$ vom considera că w este în mod trivial simetrică.
Fie w o extindere simetrică a lui v de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$. Notăm, pentru $0 \le i \le n$:
(3.1.4) $K_i := K(X_1,\ldots,X_i)$, convenind că $K_0 = K$;
(3.1.5) $u_i :=$ restricția lui w la K_i, convenind că $u_0 = v$, $u_n = w$;
(3.1.6) O_i, G_i, resp. $k_i :=$ inelul de valuare, grupul de valuare, resp. corpul rezidual ale lui u_i.

Propoziția 3.2: O extindere w pe $K(X_1,\ldots,X_n)$ a unei valuări v pe K, cu $n \ge 2$, este simetrică dacă și numai dacă pentru orice i cu $1 \le i \le n$-1 avem că w este simetrică în raport cu X_i , X_n .

Să trecem, acum, la definirea unei subclase a extinderilor simetrice, anume acelea care manifestă simetrie și în ceea ce privește corpurile reziduale.

Definiţia 3.3: O valuare w pe $K(X_1,\ldots,X_n)$, cu $n \ge 2$, se numeşte *valuare ultrasimetrică* (în raport cu $X_1,\ldots,X_n$) dacă, oricare ar fi o permutare π a $\{1,2,\ldots,n\}$ şi oricare ar fi $f \in K(X_1,\ldots,X_n)$, avem:

$$w(f) \ge 0 \Leftrightarrow w(\pi f) \ge 0 \text{ și, când ambele inegalități sunt adevărate, avem și } f^* = (\pi f)^* \text{ în } k_w.$$

Prima condiție din definiția valuării ultrasimetrice, w, spune că, pentru orice $\pi \in S_n$, w și πw au același inel de valuare. Acest fapt era asigurat și de simetria simplă. Ceea ce este în plus față de simetria simplă este a doua condiție, anume că reprezentarea claselor lui k_w este invariantă la permutarea nedeterminatelor.

În cele ce urmează, să notăm cu $e_1^{(n)},\ldots,e_n^{(n)}$ polinoamele simetrice elementare în n nedeterminate. Cunoaștem faptul că $K(X_1,\ldots,X_n) \,/\, K(e_1^{(n)},\ldots, e_n^{(n)})$ este o extindere Galois, cu grupul Galois izomorf cu grupul de permutări S_n. Propoziția următoare va face legătura între simetrie și restricția la subcorpul polinoamelor simetrice.

Propoziția 3.4: O valuare w pe $K(X_1,\ldots,X_n)$ este simetrică dacă și numai dacă restricția ei la $K(e_1^{(n)},\ldots, e_n^{(n)})$ se poate extinde în mod unic la $K(X_1,\ldots,X_n)$.

Pentru a începe studiul extinderilor simetrice, chiar dacă vom încerca să evităm problemele complicate ridicate de geometria algebrică, atâta vreme cât discutăm despre extinderi la mai multe nedeterminate, vom avea nevoie să trecem măcar frugal prin închideri algebrice intermediare în corpul $K(X_1,\ldots,X_n)$. De aceea, va trebui să definim un comportament similar în ceea ce privește extinderea la aceste închideri algebrice intermediare. Așadar, să introducem o nouă noțiune care să extindă proprietatea de simetrie.

Definiţia 3.6: Fie w o valuare simetrică pe $K(X_1,\ldots,X_n)$ în raport cu $X_1,\ldots,X_n$. Fie $\overline{K(X_1,\ldots,X_n)}$ o închidere algebrică a lui $K(X_1,\ldots,X_n)$ și $\overline{w}$ o extindere a lui w de la $K(X_1,\ldots,X_n)$ la $\overline{K(X_1,\ldots,X_n)}$.

Spunem că $\overline{w}$ *extinde simetria* lui w dacă, pentru orice partiționare:

$$\{1,2,\ldots,n\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \cup \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}\}, \text{ cu } 0 \le m < n,$$

restricția lui $\overline{w}$ la $\overline{K(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})}(X_{j_1},\ldots,X_{j_{n-m}})$ este simetrică în raport cu $X_{j_1},\ldots,X_{j_{n-m}}$, unde $\overline{K(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})}$ este închiderea lui $K(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})$ în $\overline{K(X_1,\ldots,X_n)}$.

Fie w o extindere simetrică a lui v de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$ și $\overline{w}$ care extinde simetria lui w. În acest caz notăm cu:

(3.6.1) $\delta_a := \overline{w}(X - a)$, pentru oricare $a \in \overline{K}$, unde X este oricare dintre $X_1,\ldots,X_n$;

(3.6.2) $\mathscr{M}_{\overline{w}} := \{\delta_a \;/\; a \in \overline{K}\}$.

Și de această dată, pentru $n < 2$ vom considera că extinderea simetriei este asigurată în mod trivial.

Definiţia 3.10: Fie v o valuare pe K și w o extindere simetrică a lui v de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$. Notăm cu:

$$\text{freedeg}\, w = \text{card } \{ i \in \{1,\ldots,n\} \;/\; G_i \cap \boldsymbol{Q}G_{i-1} \neq G_i \}$$

și îl numim *gradul de libertate* al extinderii w (în raport cu v).

În cele ce urmează vom discuta despre prelungirea unei valuări simetrice de rang 1 la completatul $\widehat{K(X_1,\ldots,X_n)}$. În această situație, prelungirea simetriei este asigurată, așa cum rezultă din propoziția următoare.

Propoziția 3.11: Fie v o valuare pe K și w o extindere simetrică a ei pe $K(X_1,\ldots,X_n)$ în raport cu $X_1,\ldots,X_n$, de rang 1. Fie $\widehat{K(X_1,\ldots,X_n)}$ completatul lui $K(X_1,\ldots,X_n)$ în raport cu w. Atunci w se extinde la o valuare $\widehat{w}$ pe $\widehat{K(X_1,\ldots,X_n)}$ care este conservată de orice automorfism al lui $\widehat{K(X_1,\ldots,X_n)}$ care este prelungirea prin continuitate a unui automorfism al lui $K(X_1,\ldots,X_n)$ care conservă pe w.

4. EXTINDERI SIMETRICE SIMPLE

Vom începe acest capitol cu analizarea celui mai simplu exemplu de extindere simetrică, valuarea w a lui Gauss, aceea care prelungește o valuare oarecare v pe K la $K(X_1,\ldots,X_n)$ făcând ca, pentru $F \in K[X_1,\ldots,X_n]$ scris ca

$$F = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in I} a_{i_1,\ldots,i_n} \cdot X_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{i_n}, \text{ cu } a_{i_1,\ldots,i_n} \in K$$

unde I este o mulțime finită de n-upluri de indici, să avem:

$$w(F) = \inf_{(i_1,\ldots,i_n)\in I}\left(v(a_{i_1,\ldots,i_n})\right).$$

În privința acestei extinderi putem enunța următorul rezultat.

Propoziţia 4.1: Valuarea w a lui Gauss, care prelungește o valuare oarecare v pe K la $K(X_1,\ldots,X_n)$ are următoarele proprietăți:

(4.1.1) w este simetrică, cu $\operatorname{freedeg} w = 0$;

(4.1.2) w este trivială dacă și numai dacă v este trivială;

(4.1.3) Restricția w^e a lui w la $K(e_1^{(n)},\ldots, e_n^{(n)})$ este de asemenea Gausiannă, deci și ea simetrică și izomorfă cu w ca extinderi ale lui v la două corpuri izomorfe.

Putem trece acum la scopul principal al acestui capitol, anume definirea și caracterizarea unei clase de extinderi care generalizează extinderile Gausiene, anume extinderile rezidual transcendente simple. Pentru a le defini, însă, vom avea nevoie de câteva rezultate, mai întâi.

Teorema următoare reprezintă un rezultat important pentru descrierea extinderilor simetrice, deoarece face legătura între mai multe elemente caracteristice: rezidual-transcendență, grad transcendent, numărul de grade de libertate, ultrasimetrie și scrierea uzuală bazată pe infimum.

Cel mai interesant aspect dezvăluit de teorema următoare este, însă, altul. Pentru extinderile de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$, în care toate prelungirile intermediare sunt rezidual-transcendente, este evident faptul că, „pe lungime", corpurile reziduale $k_1,\ldots,k_n$ câștigă câte un grad de transcendență la fiecare pas, dar teorema următoare ne spune și ce se întâmplă „pe lățime", cu extinderile de la K la $K(X_i)$. Deși aceste extinderi sunt similare și, la prima vedere, au libertate totală în modul în care își formează corpurile reziduale, faptul că pot fi prelungite la o valuare comună, printr-o formulă simetrică, acționează ca o forță nevăzută care le limitează această libertate.

Teorema 4.3: Fie w o extindere simetrică a lui v de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$, cu $n \geq 2$, o închidere algebrică fixată a acestuia din urmă, $\overline{K(X_1,\ldots,X_n)}$ și fie $\overline{w}$ care extinde simetria lui w la $\overline{K(X_1,\ldots,X_n)}$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(4.3.1) u_1 este o r.t.-extindere a lui v la K_1 și $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ sunt algebric independente peste k_v, unde, pentru orice i, χ_i este un element care generează transcendența corpului rezidual al lui $w|_{K(X_i)}$;

(4.3.2) $\operatorname{tr.deg}(k_w : k_v) = n$ și $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ sunt algebric independente peste k_v, unde, pentru orice i, χ_i este un element care generează transcendența corpului rezidual al lui $w|_{K(X_i)}$;

(4.3.3) $\operatorname{freedeg}(w) = 0$ și $\sup\{\,\overline{w}(X_n - \rho) \,/\, \rho \in \overline{K(X_1,\ldots,X_{n-1})}\,\} \in \mathcal{M}_{\overline{w}}$;

(4.3.4) există $a \in \overline{K}$ și $\delta \in \boldsymbol{Q}G_v$ astfel încât, pentru orice $F \in \overline{K}[X_1,\ldots,X_n]$ scris ca:

$$F = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in I} a_{i_1,\dots,i_n} \cdot (X_1 - a)^{i_1} \cdot (X_2 - a)^{i_2} \cdot \ldots \cdot (X_n - a)^{i_n} ,$$

cu I o mulțime finită de n-upluri de indici, avem:

$$\overline{w}(F) = \inf_{(i_1,\dots,i_n)\in I} \left(\overline{v}(a_{i_1,\dots,i_n}) + (i_1 + \ldots + i_n)\cdot \delta\right).$$

Teorema anterioară a creat premizele definirii clasei de extinderi anunțate. Să trecem, deci, la definirea extinderilor rezidual transcendente simple, care sunt o generalizare a extinderilor gaussiene, dar cu o importanță foarte mare pentru capitolele următoare.

Definiţia 4.4: O extindere w, a unei valuări v de la K la $K(X_1,\dots,X_n)$, care respectă condițiile echivalente din Teorema 4.3, se numeşte *rezidual-transcendentă simplă* (*r.t.s.-extindere*) în raport cu $X_1,\dots,X_n$.

Propoziția următoare este utilă pentru a găsi o formulă simplă de definiție a extinderilor rezidual-transcendente simple. Prin intermediul ei, condiția de existență a extinderii simetriei la $\overline{K(X_1,\dots,X_n)}$ va fi asigurată.

Propoziția 4.4: Fie w o extindere a lui v de la K la $K(X_1,\dots,X_n)$ pentru care există $a \in \overline{K}$ și două cantități $\delta, \varepsilon \in \boldsymbol{QG_v}$ cu $\delta \le \varepsilon$, astfel încât următoarele condiții să fie îndeplinite:

(4.4.1) (a, δ) este pereche minimală în raport cu K și v;

(4.4.2) $w(X_i - X_1) = \varepsilon$, pentru orice $i \in \{2,\dots,n\}$;

(4.4.3) dacă notăm cu:

$g \in K[X]$, polinomul monic minimal al lui a;

v' – extindere a lui v la $K(a)$;

$$\gamma = \sum_{\substack{a' \in \overline{K} \\ g(a')=0}} \inf\ (\ \delta, v'(a' - a)\ )\ ;$$

avem că, pentru orice $F \in K[X_1,\dots,X_n]$ scris ca:

$$F = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in I} f_{i_1,\dots,i_n}(X_1)\cdot g(X_1)^{i_1} \cdot (X_2 - X_1)^{i_2} \cdot \ldots \cdot (X_n - X_1)^{i_n} ,\ \deg f_{i_1,\dots,i_n} < \deg g$$

cu I o mulțime finită de n-upluri de indici, avem:

$$w(F) = \inf_{(i_1,\dots,i_n)\in I} \left(v'(f_{i_1,\dots,i_n}(a)) + i_1\cdot\gamma + (i_2 + \ldots + i_n)\cdot \varepsilon\right).$$

atunci w este o valuare simetrică pe $K(X_1,\dots,X_n)$ și oricare ar fi $\overline{K(X_1,\dots,X_n)}$ o închidere algebrică a lui $K(X_1,\dots,X_n)$ și $\overline{w}$ o extindere a lui w de la $K(X_1,\dots,X_n)$ la $\overline{K(X_1,\dots,X_n)}$ avem că $\overline{w}$ extinde simetria lui w.

Odată asigurată extinderea simetriei la $\overline{K(X_1,\dots,X_n)}$, putem da următorul corolar cu valoare de definiție echivalentă pentru extinderile r.t.s.

Corolarul 4.5: Fie w o extindere oarecare a lui v de la K la $K(X_1,\dots,X_n)$, cu $n \geq 2$. Atunci w este r.t.s-extindere dacă și numai dacă există $a \in \overline{K}$ și $\delta \in \boldsymbol{Q}G_v$ astfel încât următoarele condiții să fie îndeplinite:

(4.4.1) $w(X_i - X_1) = \delta$, pentru orice $i \in \{2,\dots,n\}$;

(4.4.2) dacă notăm cu:

$g \in K[X]$, polinomul monic minimal al lui a;

v' – extindere a lui v la $K(a)$;

$$\gamma = \sum_{\substack{a' \in \overline{K} \\ g(a')=0}} \inf\ (\ \delta,\ v'(a' - a)\ )\ ;$$

atunci, pentru orice $F \in K[X_1,\dots,X_n]$ scris ca:

$$F\ =\ \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in I} f_{i_1,\dots,i_n}(X_1)\cdot g(X_1)^{i_1}\cdot (X_2 - X_1)^{i_2}\cdot\ldots\cdot(X_n - X_1)^{i_n}\ ,\ \deg\ f_{i_1,\dots,i_n} < \deg g$$

cu I o mulțime finită de n-upluri de indici, avem:

$$w\,(F)\ =\ \inf_{(i_1,\dots,i_n)\in I}\left(v'(f_{i_1,\dots,i_n}(a)) + i_1\cdot\gamma + (i_2 + \ldots + i_n)\cdot\delta\right).$$

În particular, extinderea lui Gauss respectă condițiile date în Corolarul 4.5, dacă punem atât $a = 0$ cât și $\delta = \varepsilon = 0$, deci este un caz particular de r.t.s.-extindere.

Propoziția 4.6: Fie o r.t.s.-extindere w, a unei valuări v de la K la $K(X_1,\dots,X_n)$. Cu notațiile făcute la Corolarul 4.5 și cu următoarele, suplimentare:

$e = e(\gamma, K(a))$, cel mai mic întreg pozitiv astfel încât $e\cdot\gamma \in G_{v'}$;

$h \in K[X]$ astfel încât $\deg h < \deg g$ și $v'(h(a)) = e\cdot\gamma$ (X aici este generic);

$r_i = g(X_i)^e / h(X_i)$, care este un element din $K(X_i)$;

$\chi_i = r_i^* :=$ clasa lui r_i în corpul rezidual al lui $w|_{K(X_i)}$;

avem:

(4.6.1) $G_n = G_{v'} + \boldsymbol{Z}\gamma \subseteq \boldsymbol{Q}G_v$;

(4.6.2) $k_n\ =\ k_{v'}(\chi_1, \dots, \chi_n)$.

5. EXTINDERI SIMETRIC-DESCHISE

În acest capitol ne vom ocupa de extinderile simetrice, de la K la $K(X_1,\dots,X_n)$, care pot fi prelungite indefinit prin simetrie. Vom vedea că aceste extinderi au o libertate limitată în ceea ce privește definiția lor, lucru ce ne va ajuta în caracterizarea acestora. Definiția exactă pentru această clasă de extinderi este dată în continuare.

Definiţia 5.1: O extindere w, a unei valuări v de la K la $K(X_1,\dots,X_n)$, simetrică în raport cu $X_1,\dots,X_n$, se numeşte *simetric-deschisă* (în raport cu $X_1,\dots,X_n$) dacă, adăugând oricâte elemente algebric independente peste $K(X_1,\dots,X_n)$, $X_{n+1},\dots,X_{n+r}$, există o extindere simetrică a ei la $K(X_1,\dots,X_{n+r})$ în raport cu $X_1,\dots,X_{n+r}$.

Următoarea lemă are o importanță deosebită deoarece asigură extinderea simetriei unei extinderi simetric-deschise, w, a unei valuări v de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$, la o închidere algebrică fixată, $\overline{K(X_1,\ldots,X_n)}$, fapt ce se va dovedi necesar în multe dintre rezultatele viitoare.

Lema 5.3: Fie o extindere w a lui v de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$, simetric-deschisă în raport cu $X_1,\ldots,X_n$ și o închidere algebrică fixată $\overline{K(X_1,\ldots,X_n)}$ a lui $K(X_1,\ldots,X_n)$. Fie o partiție a $\{1,2,\ldots,n\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \cup \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}\}$, cu $0 \le m < n$ și să notăm cu $L = K(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})$ și cu $Y_1, \ldots, Y_k$ nedeterminatele $X_{j_1},\ldots,X_{j_{n-m}}$ (unde $k = n - m$). Să fixăm $\{Y_r\}_{r\ge k+1}$ un șir de elemente transcendente și algebric independente peste $L(Y_1, \ldots, Y_k)$. Atunci:

(5.3.1) Pentru orice L' o extindere normală finită a lui L, există $r \ge k+1$ și o extindere ω a lui w la $L(Y_1, \ldots, Y_r)$, simetrică în raport cu $X_{i_1},\ldots,X_{i_m}$, $Y_1, \ldots, Y_r$, astfel încât oricare ar fi o extindere ω' a acesteia la $L'(Y_1, \ldots, Y_r)$ avem că ω' este simetrică în raport cu $Y_1, \ldots, Y_r$.

(5.3.2) Orice extindere $\overline{w}$ a lui w la $\overline{K(X_1,\ldots,X_n)}$ extinde simetria lui w.

Prima propoziție din acest capitol pregătește terenul pentru clasificarea extinderilor simetric-deschise, stabilind că, pentru ca o extindere simetrică să poată fi extinsă simetric mai departe, ea nu poate avea libertate deplină decât în privința primei extinderi intermediare, cea de la K la $K(X_1)$.

Propoziția 5.4: Fie o extindere simetrică w, a unei valuări v, de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$, o închidere algebrică fixată $\overline{K(X_1,\ldots,X_n)}$ și o extindere $\overline{w}$ a lui w la $\overline{K(X_1,\ldots,X_n)}$.

Atunci w este simetric-deschisă în raport cu $X_1,\ldots,X_n$ dacă și numai dacă fie $n = 1$, fie $n \ge 2$ și există $\varepsilon \in G_2$ majorant al mulțimii $\mathcal{M}_1 = \{ \overline{w}(X_1 - a) \ / \ a \in \overline{K} \}$, astfel încât, pentru orice $F \in K[X_1,\ldots,X_n]$ scris ca:

$$F = \sum_{(i_2,\ldots,i_n)\in I} f_{i_2,\ldots,i_n} \cdot (X_2 - X_1)^{i_2} \cdot \ldots \cdot (X_n - X_1)^{i_n}, \text{ cu } f_{i_2,\ldots,i_n} \in K[X_1]$$

unde I este o mulțime finită de $(n$-1)-upluri de indici, avem:

$$w(F) = \inf_{(i_2,\ldots,i_n)\in I} \left(u_1(f_{i_2,\ldots,i_n}) + (i_2 + \ldots + i_n) \cdot \varepsilon \right).$$

O serie de concluzii se pot trage în urma propoziției precedente, inclusiv în privința problemei rămasă nelămurită în observația [5.1.1]. Vom prezenta aceste concluzii în corolarul următor.

Corolarul 5.5: Cu notațiile din propoziția de mai sus avem::
(5.5.1) Este adevărată afirmația duală observației [5.1.1], în direcția cealaltă: pentru orice extindere simetric-deschisă în raport cu $X_1,\ldots,X_n$ există o extindere a ei,

simetric-deschisă în raport cu $X_1,\ldots,X_i$, pentru orice $i > n$, cu tr.deg $(K(X_1,\ldots,X_i) : K) = i$.
(5.5.2) Pentru un lanț de extinderi simetric-deschise, obținut grație (5.5.1), există un lanț de extinderi ale acestora la închiderile algebrice ale corpurilor pe care sunt definite, care le prelungesc simetria.
(5.5.3) O extindere simetrică este simetric-deschisă dacă și numai dacă se poate prelungi la o extindere simetrică la $K(X_1,\ldots,X_{n+1})$ a cărei prelungire mai departe la $\overline{K(X_1,\ldots,X_{n+1})}$ îi prelungește simetria acesteia din urmă.
(5.5.4) Dacă $n \geq 3$, o extindere simetric-deschisă nu poate fi ultrasimetrică în raport cu $X_1,\ldots,X_n$.
(5.5.5) Dacă w este simetric-deschisă atunci:

$0 \leq \text{freedeg}\, w \leq 2$;

$n - 2 \leq \text{tr.deg}\,(k_w : k_v) \leq n$;

$n - 1 \leq \text{freedeg}\, w + \text{tr.deg}\,(k_w : k_v) \leq n$.

Acum putem da un rezultat care caracterizează complet extinderile simetric-deschise, împărțindu-le în două categorii, după cum există sau nu o extindere intermediară rezidual algebrică de torsiune în șirul de extinderi. Suplimentar, teorema va arăta că a doua categorie se poate reduce de fapt la un șir de extinderi din prima categorie.

Teorema 5.6: Orice extindere simetric-deschisă w, a unei valuări v, de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$, pentru $n \geq 2$, se găsește în una dintre următoarele două posibile situații:

(I) $\text{freedeg}\, w + \text{tr.deg}\,(k_w : k_v) = n$ și, în acest caz, w este definită de un triplet (a, δ, ε), în care avem $a \in \overline{K}$, $\delta \in \mathrm{Z} \times \boldsymbol{Q}G_v$ și $\varepsilon \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z} \times \boldsymbol{Q}G_v$, $\varepsilon > \delta$ astfel încât pentru orice $F \in K[X_1,\ldots,X_n]$ scris ca:

$$F = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in I} f_{i_1,\ldots,i_n} \cdot g^{i_1}(X_2 - X_1)^{i_2} \cdot \ldots \cdot (X_n - X_1)^{i_n}, \text{ cu}$$

$$f_{i_1,\ldots,i_n} \in K[X_1], \text{ astfel încât } \deg f_{i_1,\ldots,i_n} < \deg g$$

unde I este o mulțime finită de n-upluri de indici și $g \in K[X_1]$ este polinomul monic minimal al lui a peste K, avem:

$$w(F) = \inf_{(i_1,\ldots,i_n)\in I}\left(\bar{v}\,(f_{i_1,\ldots,i_n}(a)) + i_1\cdot\gamma + (i_2+\ldots+i_n)\cdot\varepsilon\right), \quad \text{cu } \gamma = \sum_{a'\in\overline{K},\, g(a')=0} \inf\left(\delta_a, \bar{v}(a'-a)\right)$$

(II) $\text{freedeg}\, w + \text{tr.deg}\,(k_w : k_v) = n - 1$ și, în acest caz, w este limita unui sistem ordonat de extinderi de tipul **(I)**, ce au în definiție aceeași valoare a lui ε.

Următorul tabel descrie complet extinderile simetric-deschise ale unei valuări v, de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$, ocolind problemele complicate ridicate de geometria algebrică și precizând formula grupului de valuare, formula corpului rezidual și proprietățile extinderii în cazul fiecărui tip de astfel de extindere identificat.

6. EXTINDERI SIMETRIC-ÎNCHISE

În acest capitol vom studia extinderile simetrice, de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$, care nu pot fi prelungite indefinit prin simetrie, numite *simetric-închise*. Vom începe prin a defini o măsură a gradului în care o valuare oarecare se poate restricționa sau extinde la o valuare simetrică.

Definiția 6.1: Fie w o extindere a lui v de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$. Notăm cu $\operatorname{symmdeg} w$ și o numim *gradul de simetrie* al lui w (în raport cu $X_1,\ldots,X_n$) cantitatea următoare, după caz:

(I) dacă w nu e simetrică în raport cu $X_1,\ldots,X_n$, $\operatorname{symmdeg} w$ este cel mai mare k, cu $1 \leq k < n$, astfel încât, oricare ar fi $\{X_{i_1},\ldots,X_{i_k}\} \subset \{X_1,\ldots,X_n\}$, avem că $w|_{K(X_{i_1},\ldots,X_{i_k})}$ este simetrică în raport cu $X_{i_1},\ldots,X_{i_k}$;

(II) dacă w este simetrică în raport cu $X_1,\ldots,X_n$, $\operatorname{symmdeg} w$ este cel mai mare k, cu $k \geq n$, astfel încât, oricare ar fi $X_{n+1},\ldots,X_k$ algebric independente peste $K(X_1,\ldots,X_n)$, există ω o prelungire a lui w la $K(X_1,\ldots,X_k)$ care este simetrică în raport cu $X_1,\ldots,X_k$ sau ∞, atunci când nu există un cel mai mare k ;

și îl numim *gradul de simetrie* al extinderii w (în raport cu v).

Observații:
(6.1.1) $1 \leq \operatorname{symmdeg} w \leq \infty$;
(6.1.2) w este simetrică în raport cu $X_1,\ldots,X_n$ dacă și numai dacă $\operatorname{symmdeg} w \geq n$;
(6.1.3) w este simetric-deschisă dacă și numai dacă $\operatorname{symmdeg} w = \infty$.

Ne interesează acum să comparăm gradele de deschidere simetrică ale două valuări, dintre care una este restricția (sau izomorfă cu restricția) celeilalte. Vom constata că, prin extindere la mai multe nedeterminate, acest grad scade sau, cel mult, rămâne neschimbat.

Propoziția 6.2: Fie w o extindere a lui v de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$ și w' o extindere a sa la $K(X_1,\ldots,X_{n+r})$, unde $X_{n+1},\ldots,X_{n+r}$ sunt algebric independente peste $K(X_1,\ldots,X_n)$. Atunci avem:

$$\operatorname{symmdeg} w \;\geq\; \operatorname{symmdeg} w'$$

Acest rezultat ne permite să reducem studiul unei valuări simetric-închise pe $K(X_1,\ldots,X_n)$ la studiul celei mai relevante restricții a acesteia, anume una dintre restricțiile u_k, la corpul $K(X_1,\ldots,X_k)$, cu $k \leq n$.

Definiția 6.3: Fie w o extindere a lui v de la K la $K(X_1,\ldots,X_n)$. Se numește *restricția cea mai relevantă* (din punct de vedere al simetriei) a valuării w valuarea:

$$u_i := w|_{K(X_1,\ldots,X_i)}$$

cu i cel mai mic indice astfel încât $1 \leq i \leq n$ și $\text{symmdeg}\, u_i = \text{symmdeg}\, w$.
Să remarcăm că definiția este consistentă în cazul în care w nu este simetrică, deoarece $\text{symmdeg}\, w$ reprezintă numărul de nedeterminate care, luate în orice combinație dintre $X_1,\ldots,X_n$, dau restricții echivalente.

Observații:
(6.3.1) Dacă u_i este restricția cea mai relevantă a lui w atunci $i \leq \text{symmdeg}\, w$;
(6.3.2) Dacă u_i este restricția cea mai relevantă a lui w atunci restricția cea mai relevantă a lui u_i este tot u_i;
(6.3.3) Dacă $n \geq 2$ și w este simetric-deschisă atunci restricția cea mai relevantă a lui w este u_2.

Exemplul 9 și Exemplul 10 oferă două exemple fundamental diferite de extinderi simetric-închise în care este discutată și restricția cea mai relevantă.

8. CONCLUZII ȘI TEME DE CERCETARE ULTERIOARĂ

Vom începe acest capitol prin a trece în revistă contribuțiile aduse până acum. În sfera extinderilor de valuări de la v pe K la w pe $K(X_1,\ldots,X_n)$, în capitolul 3, am definit noțiunea de simetrie a valuării w în raport cu nedeterminatele $X_1,\ldots,X_n$ și am stabilit proprietățile ei de bază. Am continuat prin a discuta despre extinderi ultrasimetrice, acea subclasă a extinderilor simetrice pentru care clasele din corpul rezidual sunt invariante la permutarea nedeterminatelor fracțiilor reprezentante. Am stabilit un criteriu de bază pentru verificarea simetriei (Propoziția 3.4), anume unicitatea extinderii restricției lui w la corpul fracțiilor simetrice, $K(e_1^{(n)},\ldots, e_n^{(n)})$, înapoi la corpul de fracții inițial, $K(X_1,\ldots,X_n)$ și am discutat câteva urmări ale acestui rezultat. Am definit și discutat în termeni generali prelungirea simetriei la închiderea algebrică și completatul corpului $K(X_1,\ldots,X_n)$ (Propoziția 3.11). Am definit gradul de libertate al unei extinderi simetrice ca fiind numărul de extinderi intermediare de tip r.a.f.

Capitolul 4 a fost rezervat extinderilor rezidual transcendente simple, ce stau la baza studiului extinderilor simetrice. Pentru a le defini, am început prin a analiza extinderile Gaussiene din punct de vedere al simetriei apoi am continuat prin a da o teoremă ce stabilește echivalența a patru definiții posibile pentru extinderile rezidual transcendente simple. În continuare, am arătat că aceste extinderi admit extinderea simetriei și la închiderea algebrică, proprietate care ne-a permis să le dăm o formă exactă de definiție (Corolarul 4.5). În finalul capitolului, am enumerat proprietățile extinderilor rezidual transcendente simple.

În următoarele două capitole, 5 și 6, am făcut diferențierea între extinderile simetric-deschise (care se pot prelungi indefinit rămânând simetrice) și cele simetric-închise. Pentru cele simetric-deschise, am analizat extinderea simetriei la închiderea algebrică (Lema 5.3) și am obținut o formulă exactă de definiție cu excepția primei extinderi intermediare (Propoziția 5.4). Apoi am demonstrat că pot fi împărțite în două categorii, dintre care cea de a doua conține limite de șiruri de extinderi simetric-deschise din prima categorie (Teorema 5.6). Cu ajutorul acestor rezultate am realizat un tabel cu clasificarea completă a extinderilor simetric-deschise. În continuare, am definit gradul de simetrie al unei extinderi și am început analiza extinderilor simetric-închise pe baza acestei cantități. Am demonstrat că pentru orice extindere simetrică este suficient să analizăm o așa numită cea mai relevantă restricție a sa, care păstrează același grad de simetrie (Propoziția 6.2).

În încheierea lucrării am oferit exemple de extinderi simetrice, ultrasimetrice, asimetrice deși au elemente de simetrie în definiție, simetric-deschise, simetric-închise, toate acestea împreună cu condiții ce nu sunt necesare sau nu sunt suficiente pentru a obține tipurile enumerate.

În continuare, vom enumera teme de studiu ce merită atenție în cercetări ulterioare care să continue și, poate, să definitiveze ceea ce a fost început în această lucrare.

1. Un prim subiect ce este interesant de studiat este forma extinderii w^e, a unei valuări v pe K la corpul fracțiilor de polinoame simetrice, $K(e_1^{(n)},\dots, e_n^{(n)})$ care să se extindă, mai departe, la o valuare w, simetrică pe $K(X_1,\dots,X_n)$, în raport cu $X_1,\dots,X_n$. Știm din Corolarul 3.5 că, pentru ca acest lucru să se întâmple, w^e trebuie să se extindă în mod unic la w. Dar această unicitate nu dă o formulă pentru w^e și ar fi interesant de căutat o astfel de formulă sau un set de condiții simple pe care w^e să le îndeplinească. Acest set de condiții ar trebui să implice, în primul rând, următoarea condiție:

$$\text{pentru orice } f \in K(X_1,\dots,X_n) \text{ să avem } w^e\left(\left(\sum_{\pi\in S_n}\pi f\right)^n\right) \geq w^e\left(\prod_{\pi\in S_n}\pi f\right)$$

pentru că, dacă nu ar fi așa, am obține:

$$w^e\left(\prod_{\pi\in S_n}\pi f\right) > n\cdot w^e\left(\sum_{\pi\in S_n}\pi f\right) = n\cdot w\left(\sum_{\pi\in S_n}\pi f\right) \geq n\cdot \inf_{\pi\in S_n} w(\pi f)$$

deci factorii πf, cu $\pi \in S_n$, nu ar putea avea toți valuarea $w(f)$, deci w nu ar fi simetrică.

Această condiție nu este, însă, suficientă decât pentru $n = 2$ și este, oricum, greu de verificat. Ceea ce ne-ar interesa ar fi o condiție legată, eventual, doar de valuările polinoamelor simetrice elementare.

2. Studierea extinderilor simetric-închise și clasificarea acestora ținând cont de gradul lor de libertate, gradul de simetrie și cea mai relevantă restricție (restricția la numărul minimal de nedeterminate, care păstrează încă același grad de simetrie).

Știm deja că avem următoarele clase de extinderi simetrice w, ale lui v de la K la $K(X_1,\dots,X_n)$:

- extinderi simetric-deschise, pentru care $\operatorname{symmdeg} w = \infty$ și restricția lor relevantă este u_2; acestea se clasifică în două sub-tipuri:
  (I) generalizare a extinderii lui Gauss (în sensul dat de Propoziția 4.4);
  (II) un șir convergent de valuări de tipul (I);

- extinderi cu $\operatorname{symmdeg} w = n < \infty$ și $\operatorname{symmdeg} u_{n\text{-}1} = \infty$, deci restricția lor relevantă este chiar w și, conform (5.5.5), $\operatorname{freedeg} w \leq 3$; la aceste extinderi, ultima extindere intermediară închide lanțul de extineri deschise;

- extinderi cu $\operatorname{symmdeg} w \geq n$, $\operatorname{symmdeg} w < \infty$, restricția relevantă este u_2 și $\operatorname{freedeg} w = n$.

Ar fi de dorit, însă, de aflat dacă există și altfel de clase de extinderi simetric-închise și de obținut o caracterizare completă a acestora, așa cum a fost realizată caracterizarea extinderilor simetric-deschise.

3. Stabilirea condițiilor și a modului în care o extindere oarecare, u, a lui v de la K la $K(Y_1,\ldots,Y_n)$, poate fi redusă la o extindere simetrică. Identificând $Y_1,\ldots,Y_n$ cu $e_1^{(n)},\ldots,e_n^{(n)}$, polinoamele simetrice elementare în n nedeterminate, $X_1,\ldots,X_n$, și verificând că extinderea w, a lui u la $K(X_1,\ldots,X_n)$, care este o extindere algebrică a lui $K(Y_1,\ldots,Y_n)$, se face în mod unic, obținem simetria extinderii w și, de acolo, u se scrie ca o simplă restricție a lui w.

Folosindu-ne de rezultatele obținute pentru extinderile simetrice, s-ar putea încheia, astfel, capitolul studierii extinderilor de valuări la $K(X_1,\ldots,X_n)$.