Universitatea din Bucureşti
Scoala Doctorală de Matematică

Sisteme multivalente de logică temporală

Rezumatul tezei

Conducător Ştiinţific: Prof. Dr. George Georgescu

Doctorand: Carmen-Elena Stama (Chiriţă)

Bucureşti
∼ 2012 ∼

Cuprins

Introducere

Logicile neclasice au apărut datorită incapacităţii logicii clasice de a formaliza unele teorii ştiinţifice. Printre cele mai importante logici neclasice amintim logicile intuiţioniste, logicile modale, logicile temporale şi logicile cu mai multe valori. Evoluţia logicii, precum şi impactul altor discipline asupra logicii, au condus la apariţia unor sisteme logice mixte. Noile sisteme logice au fost construite combinând şi rafinând sisteme logice existente.

Scopul tezei de faţă este de a studia unele sisteme logice obţinute din logicile temporale ([5], [19],[31]) şi din logica Moisil θ-valentă ([54], [2], [3], [16]). Înainte de a prezenta contribuţiile acestei teze, vom trece în revistă câteva date istorice, idei şi rezultate asupra logicilor temporale şi asupra logicii Moisil θ-valente.

Primele sisteme de logică temporală au fost introduse de A. N. Prior în 1957 ([61]), cu motivaţii de natură filozofică şi lingvistică. În termeni generali, logica temporală studiază propoziţii a căror valoare de adevăr depinde de timp. Ea se obţine din logica clasică adăugând operatorii "the strong future G" şi "the strong past H". "The future" F şi "the past" P pot fi introduşi ca operatori derivati. Logicile temporale s-au dezvoltat în paralel cu logicile modale. Rezultate şi tehnici existente în logicile modale au fost transferate logicilor temporale. Semanticilor de tip Kripke [38], [39] adaptate logicilor temporale, au permis demonstrarea unor teoreme de completitudine. Teoremele de reprezentare ale algebrelor modale ale lui Lemmon ([41]) au fost extinse la algebrele temporale, conducând la noi demonstraţii ale teoremelor de completitudine.

Articolul fundamental al lui Gabbay ([19]) este un studiu aprofundat al calculelor cu predicate asociate unor sisteme temporale. În [19] sunt demonstrate mai multe teoreme de completitudine, cu tehnici rafinate ce împletesc ideile demonstraţiilor lui Kripke cu metoda lui Henkin din cazul calculului cu predicate clasic ([34]).

În zilele noastre, cercetările asupra logicilor temporale s-au îmbogăţit considerabil şi au apărut sisteme temporale noi. Asemenea sisteme de logică temporală sunt intens utilizate în informatică (vezi, de ex. [40]).

Primul sistem de logică cu mai multe valori a fost creat de J. Łukasiewicz în anul 1920 ([45]). Acest sistem avea trei valori de adevăr şi era motivat de analiza judecăţilor modale ale lui Aristotel. În anul 1920, E. Post a studiat un sistem de logică cu n valori de adevăr. Mai târziu, în 1930, Łukasiewicz şi Tarski au considerat o logică ale cărei valori de adevăr erau luate în intervalul $[0,1]$ (vezi [46]).

G. C. Moisil a introdus în anul 1940 algebrele Łukasievicz 3-valente şi 4-valente în scopul algebrizării logicilor lui Łukasiewicz 3-valente şi 4-valente. În 1941, Moisil a definit şi algebrele Łukasiewicz n-valente. Aceste contribuţii ale lui Moisil se găsesc în seria de lucrari [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53].

Un exemplu al lui A. Rose din 1965 a arătat că pentru valenţele $n \geq 5$, în algebra Łukasiewicz nu mai poate fi întâlnită implicaţia lukasiewicziană. Aceasta a însemnat că structurile introduse de Moisil algebrizează corect logicile lui Łukasiewicz doar pentru $n = 3$ şi $n = 4$. De fapt, logicianul român introduse un nou tip de logică multivalentă, esenţial diferită de cea a lui Łukasiewicz. Logica lui Moisil este bazată pe ideea de nuanţă şi are în centru principiul de determinare al lui Moisil. În plan algebric, nuanţele sunt produse de o familie de $n-1$ operaţii unare, numite endomorfisme chrysippiene.

În anul 1969, Moisil a definit algebrele Łukasiewicz θ-valente, unde θ este tipul de ordine al unui lanţ mărginit I. Aceste algebre au o familie de endomorfisme chrysippiene indexate de lanţul I şi fiecărui endomorfism chrysippian îi corespunde o negaţie. Teoria algebrei Łukasiewicz θ-valente a fost dezvoltată de matematicieni români şi străini. Printre matematicienii români amintim pe V. Boicescu, A. Filipoiu, A. Iorgulescu şi S. Rudeanu. Ca material de referinţă pentru algebrele Łukasievicz-Moisil n-valente, indicăm monografia [4]. Ideile logicii asociate algebrelor Łukasiewicz-Moisil θ-valente sunt expuse în cartea lui Moisil "*Lecţii asupra raţionamentelor nuanţate*", apărută postum. Ele trebuie corelate şi cu teoria mulţimilor fuzzy a lui Zadeh. Formalizarea logicii Moisil θ-valente a fost realizată de V. Boicescu şi de A. Filipoiu. Sistemul formal al calcului cu predicate al logicii Moisil θ-valente a fost studiat de A. Filipoiu în [16] (vezi şi [4]).

Ideea de a studia sisteme modale sau temporale bazate pe o logică cu mai multe valori nu este nouă. Lucrările [17], [18], [32], [58] studiază sisteme modale construite plecând de la logici Łukasiewicz (finit sau infinit valente). În ceea ce priveşte logicile temporale bazate pe logici cu mai multe valori menţionăm contribuţiile din [15], [6], [7], [8].

În această teză vom studia sisteme temporale ce au ca suport logicile Moisil θ-valente (calculul propoziţional şi calculul cu predicate). În ceea ce priveşte prezentarea rezultatelor din teză vom adopta punctul de vedere că un sistem logic poate fi descris prin sintaxa, semantica şi algebra sa. Aceasta corespunde tradiţiei algebrice în tratarea sistemelor logice, stabilite de profesorul Gr. C. Moisil şi urmată apoi de cei mai mulţi logicieni români. Vom trece acum în revistă contribuţiile din această teză.

Capitolul 2 (Secţiunea 2.2) este consacrat principalelor structuri algebrice ale acestei lucrări: algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente slab-temporale şi algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente temporale. Ele provin din două surse algebrice: algebrele Boole slab-temporale (respectiv algebrele Boole temporale) şi algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente. Vom privi noile structuri ca fiind obţinute din algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente prin adăugarea unor operatori temporali G şi H supuşi unor condiţii similare celor de la algebrele Boole slab-temporale (temporale). Problema noastră este în ce măsură proprietăţile existente în cazul surselor menţionate se pot extinde în noul cadru algebric. Capitolul începe cu definirea noilor structuri şi cu demonstrarea unora din proprietăţile lor aritmetice. Fiecărei algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente slab-temporale (temporale) îi este asociată o algebră Boole slab-temporală (temporală). Reciproc, fiecărei algebre Boole slab-temporală (temporală) îi este asociată o algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă slab-temporală (temporală). Cele două construcţii au un caracter funcţional producând o pereche de functori adjuncţi C şi In între categoria $WTLM_\theta$ ($WTLM_\theta$) şi $WT\mathbb{B}$ ($T\mathbb{B}$). Functorul In este adjunct la dreapta a lui C, C este fidel şi In este deplin fidel. Functorii C şi In stabilesc o legătură puternică între cele două categorii, permiţând transferul unor proprietăţi de la una către cealaltă. Rezultatele principale ale capitolului sunt teoremele de reprezentare ale algebrelor Łukasiewicz-Moisil θ-valente slab-temporale şi algebrelor Łukasiewicz-Moisil θ-valente temporale. Demonstraţia lor se bazează pe functorii adjuncţi C şi In. O secţiune a capitolului studiază congruenţele şi filtrele într-o algebră Łucasiewicz-Moisil θ-valentă slab-temporală.

În **Capitolul 3 (Secţiunea 3.2)** sunt introduse algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice slab-temporale şi temporale. Ca structuri algebrice, ele sunt obţinute înzestrând algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice cu operatorii temporali G şi H satisfăcând axiomele specifice. Exemplele principale de algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice slab-temporale (respectiv de algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice temporale) sunt construite plecând de la un sistem slab-temporal (respectiv de la un sistem temporal). Centrul boolean al unei algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice slab-temporale (respectiv algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă poliadică temporală) devine o algebră Boole poliadică slab-temporală (algebră Boole poliadică temporală). Se obţine astfel un functor covariant C de la categoria algebrelor Łukasiewicz-Moisil θ-valentel poliadice slab-temporale (temporale) la categoria algebrelor Boole poliadice slab-temporale (temporale). Se construieşte apoi un adjunct la dreapta In al functorului C, In de la categoria algebrelor Boole poliadice slab-temporale (temporale) la categoria algebrelor Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice slab-temporale (temporale). Rezultatul principal al acestui capitol este o teoremă de reprezentare a algebrelor Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice slab-temporale (Teorema 3.2.11). Acest rezultat extinde atât teorema de reprezentare a algebrelor Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice, cât şi teorema de reprezentare a algebrelor Boole poliadice slab-temporale. Demonstraţia sa constă din alăturarea mai multor leme şi propoziţii asupra modului cum functorii C şi In păstrează proprietăţile şi construcţiile poliadice.

Demonstrarea unei teoreme de reprezentare pentru algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice temporale rămâne o problemă deschisă.

Capitolul 4 (Secţiunea 4.2) al tezei studiază calculul propoziţional Moisil θ-valent slab-temporal $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi calculul propoziţional Moisil θ-valent temporal $\mathcal{TM}_\theta(k)$. Aceste două sisteme temporale sunt construite plecând de la logica Moisil θ-valentă $\mathcal{M}_\theta(k)$ şi adăugând operatorii temporali G şi H a căror comportare sintactică este reglată de unele axiome şi reguli de deducţie. Structurile studiate în capitolul 2 constituie algebra logicii celor două calcule propoziţionale: algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ este o algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă slab-temporală iar algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{TM}_\theta(k)$ este o algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă temporală. În capitol sunt studiate pe rând cele trei componente ale sistemelor $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$: sintaxa, algebra şi semantica. Semanticile celor două sisteme sunt definite în maniera semanticilor Kripke. Rezultatele principale ale capitolului sunt două teoreme de completitudine ale lui $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$ în raport cu aceste semantici de tip Kripke. Ele pot fi privite ca extensiile teoremelor de completitudine pentru calculele propoziţionale clasice. Demonstraţia celor două teoreme de completitudine ale capitolului este de natură algebrică, utilizându-se teoremele de reprezentare din capitolul precedent (Teorema 2.2.9 şi Teorema 2.2.10). Ar fi interesant de obţinut demonstraţii ale acestor teoreme de completitudine folosind mulţimile maximal consistente ale lui $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$.

În **Capitolul 5 (Secţiunea 5.2)** sunt studiate alte două sisteme de logică temporală: calculul cu predicate $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ asociat calculului propoziţional $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi calculul cu predicate $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ asociat calculului propoziţional $\mathcal{TM}_\theta(k)$. Sintaxa celor două logici temporale este prezentată în a subsecţiunea 5.2.1 a capitolului. În subsecţiunea 5.2.2 se demonstrează că algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ (respectiv $\mathcal{TPM}_\theta(k)$) este o algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă poliadică slab-temporală (algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă poliadică temporală). Semantica celor două sisteme logice este studiată în subsecţiunea 5.2.3. Rezultatul principal al capitolului este teorema de completitudine pentru logica $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$. Modelul din demonstraţia acestei teoreme de completitudine este construit prin aplicarea teoremei de reprezentare a algebrelor Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice slab-temporale. În consecinţă, teorema de reprezentare a algebrelor Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice slab-temporale reprezintă contrapartea algebrică a teoremei de completitudine a logicii $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$. Demonstrarea unei teoreme de completitudine pentru logica $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ rămâne o problemă deschisă.

Capitolul 6 se ocupă de algebrele Łukasiewicz-Moisil cu negaţie slab-temporale (temporale). Rezultatul principal este o teoremă de reprezentare tip Moisil. În cazul algebrelor Łukasiewicz-Moisil cu negaţie temporale regulate rezultă o formă rafinată a acestei teoreme. Aceasta extinde o teoremă de reprezentare din cazul n-valent obţinută anterior de Diaconescu-Georgescu.

În **Capitolul 7** sunt studiate algebrele Łukasiewicz-Moisil cu negaţie poliadice slab-temporale (temporale). Este stabilită o teoremă de reprezentare. Sistemele logice ce corespund structurilor algebrice din ultimele două capitole nu sunt dezvoltate în teză.

Unele dintre rezultatele expuse în teză au fost publicate în următoarele lucrări:

- Capitolul 2 în [10],
- Capitolul 3.1 în [9],
- Capitolul 4 în [11],
- Capitolul 5 în [12].

Capitolul 1

Preliminarii

În acest capitol prezentăm rezultate cunoscute ale algebrelor Boole şi algebrelor Boole temporale şi a logicii clasice şi logicii temporale utile în descrierea noţiunilor din capitolele următoare.

1.1 Algebre Boole

1.1.1 Algebre Boole: definiţii de bază, exemple şi teorema de reprezentare

Presupunem cunoscute definiţiile şi exemplele fundamentale referitoare la algebre Boole. Vom enunţa doar rezultatul central din teoria algebrelor Boole, teorema de reprezentare a lui Stone:

Teoremă 1.1.1. *Pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$, există o mulţime nevidă X şi un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X) \simeq L_2^X$.*

1.1.2 Algebre Boole slab-temporale (temporale)

În această subsecţiune vom reaminti câteva definiţii şi rezultate ale algebrelor Boole slab-temporale şi temporale (see [5, 41]).

Definiţie 1.1.2. O *algebră Boole slab-temporală* este un triplet $(\mathcal{B}, G, H)$ astfel încât $\mathcal{B} = (B, \to, \neg, 1_B)$ este o algebră Boole şi G, $H : B \to B$ sunt două operaţii unare pe B care satisfac următoarele proprietăţi, pentru orice $x, y \in B$:

(1.1) $G(1_B) = 1_B$, $H(1_B) = 1_B$,

(1.2) $G(x \to y) = G(x) \to G(y)$, $H(x \to y) = H(x) \to H(y)$.

Definiţie 1.1.3. O *algebră Boole temporală* este o algebră Boole slab-temporală $(\mathcal{B}, G, H)$ care satisface în plus următoarea proprietate, pentru orice $x, y \in B$:

(1.3) $G(x) \vee y = 1_B$ ddacă $x \vee H(y) = 1_B$.

- **Cazul slab-temporal**
- **Exemplu de algebră Boole slab-temporală**

Definiţie 1.1.4. Un *cadru slab-temporal ("weak-frame")* este un triplet (X, R_1, R_2), unde X este o mulţime nevidă şi R_1, R_2 sunt două relaţii binare pe X.

Fie (X, R_1, R_2) un cadru slab-temporal. Pe algebra Boole L_2^X se definesc operaţiile G^*, $H^* : L_2^X \to L_2^X$, pentru orice $p \in L_2^X$ şi $x \in X$:

(1.4) $(G^*(p))(x) \overset{def}{=} \bigwedge\{p(y) | y \in X, xR_1y\}$,

(1.5) $(H^*(p))(x) \overset{def}{=} \bigwedge\{p(y) | y \in X, xR_2y\}$.

Propoziţie 1.1.5. *Pentru orice cadru slab-temporal (X, R_1, R_2), (L_2^X, G^*, H^*) este o algebră Boole slab-temporală.*

Teoremă 1.1.6. *[41](Teorema de reprezentare)*
Pentru orice algebră slab-temporală $(\mathcal{B}, G, H)$, există un cadru slab-temporal (X, R_1, R_2) şi un morfism injectiv $\alpha : (\mathcal{B}, G, H) \to (L_2^X, G^*, H^*)$, unde G^* şi H^* sunt definiti de relatiile (1.4) şi (1.5).

- **Cazul temporal**

Definiţie 1.1.7. Un *cadru temporal ("frame")* este o pereche (X, R) unde X este o mulţime nevidă şi R este o relaţie binară pe X.

Fie (X, R) un cadru temporal. Pe algebra Boole L_2^X se definesc G^*, $H^* : L_2^X \to L_2^X$, pentru orice $p \in L_2^X$ şi $x \in X$:

(1.6) $(G^*(p))(x) \overset{def}{=} \bigwedge\{p(y) | y \in X, xRy\}$,

(1.7) $(H^*(p))(x) \overset{def}{=} \bigwedge\{p(y) | y \in X, yRx \Leftrightarrow xR^{-1}y\}$.

Propoziţie 1.1.8. *Pentru orice cadru temporal (X, R), (L_2^X, G^*, H^*) este o algebră Boole temporală.*

Teoremă 1.1.9. *[41](Teorema de reprezentare)*
Pentru orice algebră Boole temporală $(\mathcal{B}, G, H)$, există un cadru temporal (X, R) şi un morfism injectiv $\alpha : (\mathcal{B}, G, H) \to (L_2^X, G^*, H^*)$, unde G^* şi H^* sunt definiti de relatiile (1.6) şi (1.7).

1.2 Algebre Boole poliadice

Logica algebrică a calculului cu predicate a apărut prin studiul a două tipuri de structuri algebrice: algebrele poliadice, introduse de P. R. Halmos [33] şi algebrele cilindrice, introduse de A. Tarski (vezi [35]). Un rezultat al lui Galler [20] arată că algebrele poliadice cu egalitate şi algebrele cilindrice sunt echivalente ca structuri algebrice.

1.2.1 Algebre Boole poliadice

Reamintim din [4] unei algebre Boole poliadice (vezi deasemenea [33], [14]).

Definiţie 1.2.1. O *algebră Boole poliadică* este un 5-uplu $(\mathcal{B}, U, S, \exists, \forall)$, unde $\mathcal{B}$ este o algebră Boole, U este o mulţime nevidă, S este o funcţie de la U^U la mulţimea endomorfismelor lui $\mathcal{B}$, $\exists$ şi $\forall$ sunt două funcţii de la $\mathcal{P}(U)$ la mulţimea cuantificatorilor existenţiali şi universali pe $\mathcal{B}$ care satisac următoarele axiome:

(P1) $S(Id_U) = Id_B$,

(P2) $S(\sigma \circ \tau) = S(\sigma) \circ S(\tau)$, for every $\sigma, \tau \in U^U$,

(P3) $\exists(\emptyset) = \forall(\emptyset) = Id_B$,

(P4) $\exists(J \cup J') = \exists(J) \circ \exists(J')$, $\forall(J \cup J') = \forall(J) \circ \forall(J')$, pentru orice $J, J' \subseteq U$,

(P5) $S(\sigma) \circ \exists(J) = S(\tau) \circ \exists(J)$, $S(\sigma) \circ \forall(J) = S(\tau) \circ \forall(J)$, pentu orice $J \subseteq U$ şi orice $\sigma, \tau \in U^U$ astfel încât $\sigma|_{U \setminus J} = \tau|_{U \setminus J}$,

(P6) $\exists(J) \circ S(\sigma) = S(\sigma) \circ \exists(\sigma^{-1}(J))$, $\forall(J) \circ S(\sigma) = S(\sigma) \circ \forall(\sigma^{-1}(J))$, pentru orice $J \subseteq U$ şi pentru orice $\sigma \in U^U$ astfel încât $\sigma|_{\sigma^{-1}(J)}$ este injectivă.

1.2.2 Algebre Boole poliadice slab-temporale (temporale)

Reamintim din [23] definiţiile algebrelor Boole poliadice slab-temporale şi temporale.

Definiţie 1.2.2. O *algebră Boole poliadică slab-temporală* este un 7-uplu

$$(\mathcal{B}, U, S, \exists, \forall, G, H)$$

care satisface:

(i) $(\mathcal{B}, U, S, \exists, \forall)$ este o algebră Boole poliadică,

(ii) $(\mathcal{B}, G, H)$ este o algebră Boole slab-temporală,

(iii) $S(\tau)(G(p)) = G(S(\tau)(p))$, pentru orice $\tau \in U^U$ şi $p \in B$,

(iv) $S(\tau)(H(p)) = H(S(\tau)(p))$, pentru orice $\tau \in U^U$ şi $p \in B$.

Definiţie 1.2.3. O *algebră Boole poliadică temporală* este o algebră Boole poliadică slab-temporală

$$(\mathcal{B}, U, S, \exists, \forall, G, H)$$

care satisface în plus condiţia (1.3) a Definiţiei 1.1.3.

1.3 Calculul propoziţional clasic şi calculul propoziţional slab-temporal (temporal)

În lucrare considerăm cunoscute noţiunile referitoare la calculul propoziţional clasic şi calculul propoziţional slab-temporal (temporal) (vezi [30]).

1.4 Calculul cu predicate clasic şi calculul cu predicate slab-temporal (temporal)

În lucrare considerăm cunoscute noţiunile referitoare la calculul cu predicate clasic şi calculul cu predicate slab-temporal (temporal)(vezi [30]).

Capitolul 2

Algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente slab-temporale (temporale)

În acest capitol, introducem algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente slab-temporale (notate LM_θ-algebre slab-temporale) şi algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente temporale (notate LM_θ-algebre temporale), structuri algebrice care se obţin din două surse: algebrele Boole slab-temporale (respectiv algebrele Boole temporale) şi algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente.

Vom da definiţiie de bază, proprietăţi şi exemple ale acestor noi tipuri de structuri şi vom prezenta relaţia categorială între algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente slab-temporale (temporale) şi algebrele Boole slab-temporale (temporale). Rezultatul central îl reprezintă teoremele de reprezentare pentru LM_θ-algebre slab-temporale şi LM_θ-algebre temporale.

Vom folosi aceste teoreme pentru a demonstra completitudinea sistemelor logice descrise în capitolul 4: logica Moisil θ-valentă slab-temporală $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi logica Moisil θ-valentă temporală $\mathcal{TM}_\theta(k)$.

Cele mai importante contribuţii ale acestui capitol se gasesc în:

- *Subsecţiunea 2.2.1, unde introducem noţiunea de LM_θ-algebră slab-temporală (Definiţia 2.2.1) şi LM_θ-algebră temporală (Definiţia 2.2.2) pentru care dăm exemple şi proprietăţi.*

- *Subsecţiunea 2.2.2, unde enunţăm şi demonstrăm teorema de reprezentare pentru LM_θ-algebre slab-temporale şi LM_θ-algebre temporale (Teorema 2.2.9 şi Teorema 2.2.10).*

  Rezultatele obţinute în acest capitol se găsesc în [10].

În secţiunea 2.1 reamintim definiţia algebrei Łukasiewicz-Moisil θ-valente şi enunţul teoremei de reprezentare a lui Moisil.

2.1 Algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente

Algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente au fost introduse de Gr. C. Moisil în 1968 [54]. În monografia [4] găsim cea mai mare parte a rezultatelor privind algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente obţinute până în 1990.

2.1.1 Definiţie şi teorema de reprezentare

Fie $(I, \leq)$ o mulţime total ordonată cu prim element notat 0 şi ultim element notat 1, având tipul de ordine θ.

Definiţie 2.1.1. O *algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă* (LM_θ-algebră) este o structură

$$\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, (\varphi_i)_{i\in I}, (\overline{\varphi}_i)_{i\in I}, 0_L, 1_L)$$

de tipul $(2, 2, (1)_{i\in I}, (1)_{i\in I}, 0, 0)$ astfel încât sunt satisfăcute următoarele proprietăţi pentru orice $i, j \in I$ şi $x, y \in L$:

(L1) $(L, \vee, \wedge, 0_L, 1_L)$ este o latice distributivă mărginită,

(L2) φ_i este morfism de latici distributive mărginite,

(L3) $\varphi_i x \wedge \overline{\varphi}_i x = 0_L$, $\varphi_i x \vee \overline{\varphi}_i x = 1_L$,

(L4) $\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_j$,

(L5) dacă $i \leq j$ then $\varphi_i \leq \varphi_j$,

(L6) dacă $\varphi_i x = \varphi_i y$, pentru orice $i \in I$ atunci $x = y$ (principiul determinării).

Operaţiile unare $(\varphi_i)_{i\in I}$ se numesc **endomorisme chrysippiene**. Ele introduc algebric ideea de nuanţă. Fiecărui endomorfism φ_i i se asociază o operaţie unară notată $\overline{\varphi}_i$ care are un rol similar cu cel al negaţiei.

Teoremă 2.1.2. *[54](Teorema de reprezentare a lui Moisil) Pentru orice LM_θ-algebră $\mathcal{L}$ există o mulţime nevidă X şi un morfism injectiv de LM_θ-algebre $\alpha : \mathcal{L} \to (L_2^I)^X$.*

Teorema de reprezentare a lui Moisil va constitui principala sursă în găsirea teoremei de reprezentare pentru LM_θ-algebrele slab-temporale (temporale).

2.2 Algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente slab-temporale (temporale)

2.2.1 Generalităţi asupra algebrelor Łukasiewicz-Moisil θ-valente slab-temporale (temporale)

În această subsecţiune introducem noţiunea de algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă slab-temporală şi temporală extinzând noţiunea de algebră Boole slab-temporală (temporală) şi noţiunea de algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă.

Definiţie 2.2.1. O *algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă slab-temporală* (LM_θ-algebră slab-temporală) este un triplet $(\mathcal{L}, G, H)$ astfel încât

$$\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, (\varphi_i)_{i\in I}, (\overline{\varphi}_i)_{i\in I}, 0_L, 1_L)$$

este o LM_θ-algebră şi $G,\ H : L \to L$ sunt două operaţii unare pe L care îndeplinesc următoarele condiţii, pentru orice $x, y \in L$:

(2.1) $G(1_L) = 1_L,\ H(1_L) = 1_L$,

(2.2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y),\ H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,

(2.3) $G \circ \varphi_i = \varphi_i \circ G,\ H \circ \varphi_i = \varphi_i \circ H$, pentru orice $i \in I$.

Definiţie 2.2.2. O *algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă temporală* (LM_θ-algebră temporală) este o LM_θ-algebră slab-temporală $(\mathcal{L}, G, H)$ care satisface in plus, pentru orice $x, y \in L$, următoarea proprietate:

(2.4) $G(x) \vee y = 1_L$ ddacă $x \vee H(y) = 1_L$.

Definiţie 2.2.3. Fie $(L, \vee, \wedge, (\varphi_i)_{i\in I}, (\overline{\varphi}_i)_{i\in I}, 0_L, 1_L, G, H)$ o LM_θ-algebră temporală (slabă). Pentru orice $i \in I$ şi $x \in L$, definim:

$$P_i(x) \overset{def}{=} \overline{\varphi}_i H(\overline{\varphi}_i x),$$

$$F_i(x) \overset{def}{=} \overline{\varphi}_i G(\overline{\varphi}_i x).$$

- **Cazul slab-temporal**

- **Exemplu de LM_θ-algebră slab-temporală**

Fie (X, R_1, R_2) un cadru slab-temporal şi $\mathcal{L}$ o LM_θ-algebră completă şi complet chrysippiană. Definim pe L^X operaţiile G^* şi H^* ca în relaţiile (1.4) şi (1.5).

Propoziţie 2.2.4. *Pentru orice cadru slab-temporal* (X, R_1, R_2), $(\mathcal{L}^X, G^*, H^*)$ *este o LM_θ-algebră slab-temporală.*

Fie $(\mathcal{L}, G, H)$ o LM_θ-algebră slab-temporală. Vom nota cu $C(L)$, mulţimea elementelor complementate ale lui $\mathcal{L}$ (elementele $x \in L$ cu proprietatea ca există $y \in L$ astfel încât $x \vee y = 1_L, x \wedge y = 0_L$).

Definim $C(G) : C(L) \to C(L)$ şi $C(H) : C(L) \to C(L)$, prin:
$C(G) \stackrel{def}{=} G|_{C(L)}$, $C(H) \stackrel{def}{=} H|_{C(L)}$.

Lemă 2.2.5. $C(L) = \{x \in L | \varphi_i(x) = x,$ *pentru orice* $i \in I\}$.

Lemă 2.2.6. *Dacă* $(\mathcal{L}, G, H)$ *o* LM_θ*-algebră slab-temporală atunci* $C(\mathcal{L}), C(G), C(H))$ *este o algebră Boole slab-temporală.*

Fie $(\mathcal{B}, G, H)$ o algebră Boole slab-temporală. Considerăm mulţimea:

$$In(B) = B^I = \{f | f : I \to B, i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)\}.$$

Este cunoscut faptul că $In(B)$ se poate organiza ca LM_θ-algebră, pe care o vom nota cu $In(\mathcal{B})$. Vom defini pe $In(B)$ operaţiile unare $In(G)$, $In(H)$ prin:

$$(In(G))(f) = G \circ f,\ (In(H))(f) = H \circ f, \text{ pentru orice } f \in In(B).$$

Lemă 2.2.7. *Dacă* $(\mathcal{B}, G, H)$ *este o algebră Boole slab-temporală, atunci* $(In(\mathcal{B}), In(G), In(H))$ *este o* LM_θ*-algebră slab-temporală.*

Notaţii:

- $WT\mathbb{B}$ - categoria algebrelor Boole temporale slabe.
- $WTLM_\theta$ - categoria LM_θ-algebrelor temporale slabe.

Definim functorii:

$$C : WTLM_\theta \to WT\mathbb{B}$$

este functorul definit prin:

- $C(L) = \{x \in L | \varphi_i x = x$, pentru orice $i \in I\}$.
  (centrul Boolean al lui $\mathcal{L}$).
- $C(f) = f_{C(L)}$ pentru $f \in LM_\theta(L, L')$.

$$In : WT\mathbb{B} \to WTLM_\theta$$

este functorul definit prin:

- $In(B) = B^I = \{f : I \to B | i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)\}$,
- $In(g) : In(B) \to In(B')$, $In(g)(u) = g \circ u$, pentru orice $g \in \mathbb{B}(B, B')$ şi $u \in In(B)$.

- **Cazul temporal**
- **Exemplu de LM_θ-algebră temporală**

Fie (X, R) un cadru temporal şi $\mathcal{L}$ o LM_θ-algebră completă şi complet chrysippiană. Operaţiile G^* şi H^* pe L^X se definesc ca în relaţiile (1.6) şi (1.7).

Propoziţie 2.2.8. *Pentru orice cadru temporal (X, R), $(\mathcal{L}^X, G^*, H^*)$ este o LM_θ-algebră temporală.*

Functorii C şi In se extind pentru:

- $T\mathbb{B}$ - categoria algebrelor Boole temporale.
- TLM_θ - categoria LM_θ-algebrelor temporale.

2.2.2 Teorema de reprezentare pentru LM_θ-algebre slab-temporale (temporale)

- **Cazul slab-temporal**

Teoremă 2.2.9. *(Teorema de reprezentare a LM_θ-algebrelor slab-temporale)*
Pentru orice LM_θ-algebră slab-temporală $(\mathcal{L}, G, H)$, există un cadru slab-temporal (X, R_1, R_2) şi un morfism injectiv

$$\alpha : (\mathcal{L}, G, H) \to (In(L_2)^X, G^*, H^*)$$

unde G^* şi H^* sunt definite ca în relatiile (1.4) şi (1.5).

- **Cazul temporal**

Teoremă 2.2.10. *(Teorema de reprezentare a LM_θ-algebrelor temporale)*
Pentru orice LM_θ-algebră temporală $(\mathcal{L}, G, H)$, există un cadru temporal (X, R) şi un morfism injectiv

$$\alpha : (\mathcal{L}, G, H) \to (In(L_2)^X, G^*, H^*)$$

unde G^* şi H^* sunt definite în relatiile (1.6) şi (1.7).

Demonstraţiile teoremelor de reprezentare se bazează pe teoremele de reprezentare ale algebrelor Boole slab-temporale şi temporale şi pe cei doi functori adjuncţi C şi In între categoria algebrelor Łukasiewicz-Moisil slab-temporale (temporale) şi categoria algebrelor Boole slab-temporale (temporale).

Capitolul 3

Algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice slab-temporale (temporale)

În acest capitol vom introduce noţiunile de algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă poliadică slab-temporală şi temporală, structuri algebrice obţinute adăugând la algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice, operatorii temporali G şi H care satisfac anumite axiome specifice. Rezultatul central îl constitue o teoremă de reprezentare pentru algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice slab-temporale. Demostraţia ei combină teorema de reprezentare a algebrelor Boole poliadice slab-temporale [23] cu o tehnică functorială. Demonstrarea unei teoreme de reprezentare în cazul temporal rămâne o problemă deschisă.

Cele mai importante contribuţii din acest capitol sunt:

- *Subsecţiunea 3.2.1, unde definim LM_θ-algebrele poliadice slab-temporale (Definiţia 3.2.1) şi LM_θ-algebrele poliadice temporale (Definiţia 3.2.2) pentru care prezentăm proprietăţi şi exemple.*
- *Subsecţiunea 3.2.2, în cadrul căreia demonstrăm teorema de reprezentare a LM_θ-algebrelor poliadice slab-temporale (Teorema 3.2.11).*

  Rezultatele prezentate în acest capitol se regăsesc în lucrarea [11].

3.1 Algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice

În această secţiune reamintim din [4] definiţia algebrelor Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice.

Definiţie 3.1.1. [4] O *LM_θ-algebră poliadică* este un 5-uplu $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall)$ unde:

- $\mathcal{L}$ este o LM_θ-algebră,
- U este o mulţime nevidă,
- $S : U^U \to End(\mathcal{L})$,
- $\exists, \forall : \mathcal{P}(U) \to L^L$,

astfel încât sunt satisfăcute axiomele (P1)-(P6) din Definiţia 1.2.1 şi în plus are loc următoarea proprietate:

(P7) Pentru orice $J \subseteq U$, $\exists(J)$ şi $\forall(J)$ sunt cuantificatori existenţial şi universal pe $\mathcal{L}$.

3.2 Algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice slab-temporale (temporale)

3.2.1 Definiţii, exemple şi proprietăţi

Definiţie 3.2.1. O *LM_θ-algebră poliadică slab-temporală* este un 7-uplu

$$(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall, G, H)$$

astfel încât

(3.1) $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall)$ este o LM_θ-algebră poliadică,

(3.2) $(\mathcal{L}, G, H)$ este o LM_θ-algebră slab-temporală,

(3.3) $S(\tau)(G(p)) = G(S(\tau)(p))$, pentru orice $\tau \in U^U$ şi $p \in L$,

(3.4) $S(\tau)(H(p)) = H(S(\tau)(p))$, pentru orice $\tau \in U^U$ şi $p \in L$.

Definiţie 3.2.2. O *LM_θ-algebră poliadică temporală* este o LM_θ-algebră poliadică slab-temporală $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall, G, H)$ astfel încât G şi H verifică în plus următoarea proprietate, pentru orice $x, y \in L$:

(3.5) $G(x) \vee y = 1_L$ iff $x \vee H(y) = 1_L$.

Definiţie 3.2.3. Fie $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall, G, H)$ o LM_θ-algebră poliadică slab-temporală (temporală).

- $J \subseteq U$ se numeşte **suportul** lui $p \in L$ dacă $\exists(U \setminus J)p = p$.
  Intersecţia suporturilor unui element $p \in L$ se va nota cu J_p.
- $\mathcal{L}$ este **local finită** dacă orice element are un suport finit.

- $|U|$ reprezintă **gradul** algebrei $\mathcal{L}$.

- **Cazul slab-temporal**

Vom folosi noţiunea de sistem slab-temporal ("weak-tense system") pentru a construi un exemplu de LM_θ-algebră poliadică slab-temporală.

Definiţie 3.2.4. [23] Un *sistem slab-temporal* este de forma

$$\mathcal{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R_1, R_2, 0)$$

unde:

(i) T este o mulţime nevidă,

(ii) R_1 şi R_2 sunt două relaţii binare pe T,

(iii) $0 \in T$,

(iv) pentru orice $t, s \in T$, X_t este o mulţime nevidă cu proprietatea: dacă tR_1s sau tR_2s, atunci $X_t \subseteq X_s$.

- **Exemplu de LM_θ-algebră poliadică slab-temporală**

Propoziţie 3.2.5. *Fie*

- $\mathcal{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R_1, R_2, 0)$ *un sistem temporal slab.*
- $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, (\varphi_i)_{i\in I}, (\overline{\varphi}_i)_{i\in I}, 0_L, 1_L)$ *o LM_θ-algebră completă şi complet chrysippiană.*
- U *o mulţime nevidă.*

Mulţimea

$$F^{U,\theta}_{\mathcal{T},\mathcal{L}} = \{(f_t)_{t\in T} | f_t : X_t^U \to L, \text{ pentru orice } t \in T\}$$

se organizează ca LM_θ-algebră poliadică slab-temporală cu operaţiile următoare, pentru orice $t \in T$ şi $x \in X_t^U$:

(3.6) $(f_t)_{t\in T} \wedge (g_t)_{t\in T} = (f_t \wedge g_t)_{t\in T}$, *unde* $(f_t \wedge g_t)(x) = f_t(x) \wedge g_t(x)$,

(3.7) $(f_t)_{t\in T} \vee (g_t)_{t\in T} = (f_t \vee g_t)_{t\in T}$, *unde* $(f_t \vee g_t)(x) = f_t(x) \vee g_t(x)$,

(3.8) $\varphi_i^{\mathcal{T}}((f_t)_{t\in T}) = (\varphi_i \circ f_t)_{t\in T}$, *unde* $(\varphi_i \circ f_t)(x) = \varphi_i(f_t(x))$, *pentru orice* $i \in I$,

(3.9) $\overline{\varphi}_i^{\mathcal{T}}((f_t)_{t\in T}) = (\overline{\varphi}_i \circ f_t)_{t\in T}$, *unde* $(\overline{\varphi}_i \circ f_t)(x) = \overline{\varphi}_i(f_t(x))$, *pentru orice* $i \in I$,

(3.10) $0^{\mathcal{T}} = (0_t)_{t\in T}$, *unde* $0_t : X_t^U \to L$, $0_t(x) = 0_L$,

(3.11) $1^{\mathcal{T}} = (1_t)_{t\in T}$, *unde* $1_t : X_t^U \to L$, $1_t(x) = 1_L$,

(3.12) $S(\tau)((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, *unde* $g_t : X_t^U \to L$, $g_t(x) = f_t(x \circ \tau)$,

(3.13) $\exists(J)((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, *unde* $g_t : X_t^U \to L$,
$g_t(x) = \bigvee\{f_t(y) | y \in X_t^U, y|_{U\setminus J} = x|_{U\setminus J}\}$,

(3.14) $\forall(J)((f_t)_{t\in T}) = (h_t)_{t\in T}$, *unde* $h_t : X_t^U \to L$,
$h_t(x) = \bigwedge\{f_t(y) | y \in X_t^U, y|_{U\setminus J} = x|_{U\setminus J}\}$,

(3.15) $G((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, *unde* $g_t : X_t^U \to L$,
$g_t(x) = \bigwedge\{f_s(i \circ x) | tR_1 s, s \in T\}$,

(3.16) $H((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, *unde* $g_t : X_t^U \to L$,
$g_t(x) = \bigwedge\{f_s(i \circ x) | tR_2 s, s \in T\}$, *unde* $i : X_t \to X_s$ *este funcţia incluziune.*

- **Cazul temporal**

Definiţie 3.2.6. [23] Un *sistem temporal ("tense system")* este de forma

$$\mathcal{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R, 0)$$

unde:

(i) T este o mulţime nevidă,

(ii) R este o relaţie binară pe T,

(iii) $0 \in T$,

(iv) pentru orice $t, s \in T$, X_t este o mulţime nevidă cu proprietatea: dacă tRs sau sRt, atunci $X_t = X_s$.

- **Exemplu de LM_θ-algebră poliadică temporală**

Propoziţie 3.2.7. *Fie*

- $\mathcal{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R, 0)$ *un sistem temporal.*
- $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, (\varphi_i)_{i\in I}, (\overline{\varphi}_i)_{i\in I}, 0_L, 1_L)$ *o* LM_θ*-algebră completă şi complet chrysippiană.*
- U *o mulţime nevidă.*

Mulţimea

$$F^{U,\theta}_{\mathcal{T},\mathcal{L}} = \{(f_t)_{t\in T} | f_t : X^U_t \to L, \text{ pentru orice } t \in T\}$$

se organizează ca LM_θ-algebră poliadică temporală cu operaţiile (3.6)-(3.14) anterioare şi in plus operaţiile:

(3.15)' $G((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, *unde* $g_t : X^U_t \to L$,
$g_t(x) = \bigwedge\{f_s(x) | tRs, s \in T\}$,

(3.16)' $H((f_t)_{t\in T}) = (g_t)_{t\in T}$, *unde* $g_t : X^U_t \to L$,
$g_t(x) = \bigwedge\{f_s(x) | sRt, s \in T\}$, *unde* $sRt \Leftrightarrow tR^{-1}s$.

Remarcă 3.2.8. *Functorii C şi In se extind între categoria algebrelor Boole poliadice slab-temporale (temporale) şi categoria LM_θ-algebrelor poliadice slab-temporale (temporale).*

Lemă 3.2.9. *Dacă $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall, G, H)$ este o LM_θ-algebră poliadică slab-temporală (temporală) atunci $(C(\mathcal{L}), U, S, \exists, \forall, C(G), C(H))$ este o algebră Boole poliadică slab-temporală (temporală).*

Lemă 3.2.10. *Dacă $(\mathcal{B}, U, S, \exists, \forall, G, H)$ este o algebră Boole poliadică slab-temporală (temporală) atunci LM_θ-algebră poliadică slab-temporală (temporală) atunci $(In(\mathcal{B}), U, S, \exists, \forall, In(G), In(H))$ este o LM_θ-algebră poliadică slab-temporală (temporală).*

Notaţii:
$F^{U,\theta}_{\mathcal{T},\mathcal{L}}$ se va nota cu $F^{U,\theta}_{\mathcal{T}}$ pentru $\mathcal{L} = In(L_2)$.

3.2.2 Teorema de reprezentare a LM_θ-algebrelor poliadice slab-temporale

Teoremă 3.2.11. *(Teorema de reprezentare) Fie $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall, G, H)$ o LM_θ-algebră poliadică slab-temporală, local finită şi de grad infinit şi Γ un filtru propriu al lui $\mathcal{L}$ cu $J_p = \emptyset$ pentru orice $p \in \Gamma$. Există un sistem slab-temporal $\mathcal{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R_1, R_2, 0)$ şi un morfism*

$$\Phi : L \to F^{U,\theta}_{\mathcal{T}}$$

astfel încât, pentru orice $p \in \Gamma$, are loc: $\Phi(p) = (f_t)_{t\in T} \Rightarrow f_0(x)(i) = 1$, pentru orice $x \in X^U_t$ şi $i \in I$.

Remarcă 3.2.12. *În demonstraţia teoremei de reprezentare a LM_θ-algebrelor poliadice slab-temporale folosim teorema de reprezentare a algebrelor Boole poliadice slab-temporale.*

În cazul LM_θ-algebrelor poliadice temporale, demonstraţia unei teoreme de reprezentare rămâne o problemă deschisă.

Formulăm următoarea conjectură:

Conjectură

Fie $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall, G, H)$ o LM_θ-algebră poliadică temporală, local finită şi de grad infinit şi Γ un filtru propriu al lui $\mathcal{L}$ cu $J_p = \emptyset$ pentru orice $p \in \Gamma$. Există un sistem temporal $\mathcal{T} = (T, (X_t)_{t \in T}, R, 0)$ şi un morfism

$$\Phi : L \to F_{\mathcal{T}}^{U,\theta}$$

astfel încât, pentru orice $p \in \Gamma$, are loc: $\Phi(p) = (f_t)_{t \in T} \Rightarrow f_0(x)(i) = 1$, pentru orice $x \in X_t^U$ şi $i \in I$.

Capitolul 4

Calculul propoziţional Moisil θ-valent $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$

În Capitolul 4 dezvoltăm două calcule propoziţionale: logica Moisil θ-valentă slab-temporală şi logica Moisil θ-valentă temporală. Este construită întâi sintaxa acestor două sisteme logice. În termeni generali, limbajul acestora este obţinut din limbajul logicii Moisil θ-valente prin adăugarea a doi operatori logici G şi H.

În cazul logicii Moisil θ-valente slab-temporale interpretările se bazează pe cadre temporale cu două relaţii de accesibilitate iar în cazul logicii Moisil temporale pe cadre temporale cu o singur relaţie de accesibilitate. Rezultatele centrale ale capitolului sunt două teoreme de completitudine pentru cele două calcule propoziţionale studiate. Demonstraţiile acestor teoreme de completitudine sunt de tip algebric: se trece la algebra Lindenbaum-Tarski, apoi se aplică teoremele de reprezentare din capitolul 2 şi utiliznd reprezentrile obţinute se construiesc interpretrile Kripke necesare.

Cele mai importante contribuţii ale acestui capitol sunt:

- *Subsecţiunea 4.2.1, unde dăm axiomatizarea calculelor propoziţionale $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$ şi demonstrăm unele proprietăţi sintactice.*

- *Subsecţiunea 4.2.2, unde demonstrăm că algebrele Lindenbaum-Tarski ale logicilor $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$ sunt LM_θ-algebră slab-temporală (Propoziţia 4.2.8) şi LM_θ-algebră temporală (Propoziţia 4.2.9) studiate în capitolul 2.*

- *Subsecţiunea 4.2.3, unde demonstrez teoremele de completitudine pentru logicile $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$ (Teorema 4.2.12 şi Teorema 4.2.14).*

  Rezultatele din acest capitol se găsesc în [9].

4.1 Calculul propoziţional Moisil θ-valent $\mathcal{M}_\theta(k)$

Ideile logicii Moisil θ-valente sunt prezente algebric în teoria algebrelor Łukasiewicz-Moisil θ-valente. Motivaţii filozofice ale acestei logici au fost prezentate de Moisil în cartea sa [56].

O axiomatizare a acestei logici a fost dată de V. Boicescu în 1971. Filipoiu a rafinat în 1981 această logică propoziţională şi a construit şi calculul cu predicate corespunzător.

4.2 Calculul propoziţional Moisil θ-valent slab-temporal (temporal) $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$

4.2.1 Sintaxa calculului propozitional $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$

Fie $(I, \leq)$ este o mulţime total ordonată cu prim element 0 şi ultim element 1, având tipul de ordine θ şi $k \in I$ fixat.

Limbajul comun al calculelor propoziţionale $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$ constă din:

- variabile propoziţionale: $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ (mulţimea V a variabilelor propoziţionale este considerată infinită),
- conectorii logici $\vee$, $\wedge$, φ_i, $\overline{\varphi}_i$,
- paranteze: $(,), \{,\}$.
- operatorii temporali G şi H.

Pentru orice $i \in I$, definim:

(1) $\alpha \to_i \beta \overset{def}{=} \overline{\varphi}_i\alpha \vee \varphi_i\beta$, $\alpha \leftrightarrow_i \beta \overset{def}{=} (\alpha \to_i \beta) \wedge (\beta \to_i \alpha)$,

(2) $F_i\alpha \overset{def}{=} \overline{\varphi}_i G \overline{\varphi}_i \alpha$, $P_i\alpha \overset{def}{=} \overline{\varphi}_i H \overline{\varphi}_i \alpha$.

Definiţie 4.2.1. Mulţimea $E(k)$ a enunţurilor lui $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$ se defineşte prin inducţie.

Definiţie 4.2.2. *k-axiomele* lui $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$ sunt enunţuri de următoarea formă, pentru orice $i, j \in I$:

(MA1) $p \to_k (q \to_k p)$,

(MA2) $(p \to_k (q \to_k r)) \to_k ((p \to_k q) \to_k (p \to_k r))$,

(MA3) $(p \wedge q) \to_k p$,

(MA4) $(p \wedge q) \to_k q$,

(MA5) $(p \to_k q) \to_k ((p \to_k r) \to_k (p \to_k (q \wedge r)))$,

(MA6) $p \to_k (p \vee q)$,

(MA7) $q \to_k (p \vee q)$,

(MA8) $(p \to_k q) \to_k ((r \to_k q) \to_k ((p \vee r) \to_k q))$,

(MA9) $\varphi_j(p \wedge q) \leftrightarrow_k \varphi_j p \wedge \varphi_j q$,

(MA10) $\overline{\varphi}_j(p \vee q) \leftrightarrow_k \overline{\varphi}_j p \wedge \overline{\varphi}_j q$,

(MA11) $\varphi_j p \leftrightarrow_k \varphi_i \varphi_j p$,

(MA12) $\varphi_j p \leftrightarrow_k \overline{\varphi}_i \overline{\varphi}_j p$,

(MA13) $\overline{\varphi}_j p \leftrightarrow_k \varphi_i \overline{\varphi}_j p$,

(MA14) $\overline{\varphi}_j p \leftrightarrow_k \overline{\varphi}_i \varphi_j p$,

(MA15) $\varphi_i p \to_k \varphi_j p$, pentru orice $i, j \in I$ cu $i \leq j$,

(MA16) $G(\alpha \to_k \beta) \to_k (G\alpha \to_k G\beta)$, $H(\alpha \to_k \beta) \to_k (H\alpha \to_k H\beta)$,

(MA17) $G\varphi_i\alpha \leftrightarrow_k \varphi_i G(\alpha)$, $H\varphi_i\alpha \leftrightarrow_k \varphi_i H(\alpha)$,

(MA18) $\varphi_i\alpha \to_k GP_i\alpha$, $\varphi_i\alpha \to_k HF_i\alpha$.

Regulile de deducţie:

$$\frac{\alpha, \alpha \to_k \beta}{\beta} \text{ (k-m.p.) } , \frac{\alpha}{G\alpha}, \frac{\alpha}{H\alpha}(TG).$$

(1) Calculul propoziţional Moisil θ-valent $\mathcal{M}_\theta(k)$ conţine k-axiomele (MA1)-(MA15) şi (k-m.p).

(2) Calculul propoziţional $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ conţine k- axiomele (MA1)-(MA17) şi toate regulile de deducţie.

(3) Calculul propoziţional $\mathcal{TM}_\theta(k)$ este o extensie a sistemului logic $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ cu k-axioma (MA18).

- **Cazul slab-temporal**

Definiţie 4.2.3. *k-teoremele formale* ale lui $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ se definesc prin inducţie pornind de la k-axiome şi aplicând regulile de deducţie.

Definiţie 4.2.4. (*Deducţia din ipoteze*)

Fie $\Gamma \subseteq E(k)$ şi $\alpha \in E(k)$. $\Gamma \vdash_{\mathcal{WTM}_\theta(k)} \alpha \overset{def}{\Leftrightarrow}$ există $n \in \mathbb{N}$ şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ astfel încât $\vdash_{\mathcal{WTM}_\theta(k)} \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \to_k \alpha$.

Notaţii:

- $\vdash_{\mathcal{WTM}_\theta(k)} \alpha$: α este o k-teoremă formală a lui $\mathcal{WTM}_\theta(k)$,

- $\Gamma \vdash_{\mathcal{WTM}_\theta(k)} \alpha$: α este o k-teoremă formală a lui $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ în ipotezele Γ.

Teoremă 4.2.5. *(Teorema deducţiei) Fie $\Gamma \subseteq E(k)$ şi $\alpha, \beta \in E(k)$. Atunci*

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathcal{WTM}_\theta(k)} \beta \text{ ddacă } \Gamma \vdash_{\mathcal{WTM}_\theta(k)} \alpha \to_k \beta.$$

• Cazul temporal

Remarcă 4.2.6. Conceptele de *k-teoremă formală şi k-deducţie* în logica $\mathcal{TM}_\theta(k)$ sunt definite similar noţiunilor corespunzătoare din logica $\mathcal{WTM}_\theta(k)$. Vom nota cu $\vdash_{\mathcal{TM}_\theta(k)} \alpha$, faptul că α este o k-teoremă formală a lui $\mathcal{TM}_\theta(k)$ şi cu $\Gamma \vdash_{\mathcal{TM}_\theta(k)} \alpha$, faptul că α este o k-teoremă formală a lui $\mathcal{TM}_\theta(k)$ în ipotezele Γ.

4.2.2 Algebra Lindenbaum-Tarski a logicii $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$

Reamintim ca $E(k)$ este mulţimea enunţurilor sistemelor logice $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$. Pentru orice două enunţuri α şi β, definim relaţia

$$\alpha \sim_k \beta \text{ ddacă } \vdash_{\mathcal{WTM}_\theta(k)} \varphi_i\alpha \leftrightarrow_k \varphi_i\beta, \text{ pentru orice } i \in I.$$

Lemă 4.2.7. *$\sim_k$ este o relaţie de echivalenţă pe $E(k)$.*

• Cazul slab-temporal

Propoziţie 4.2.8. *$E(k)/_{\sim_k}$, algebra Lindenbaum-Tarski a logicii $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ este o LM_θ-algebră slab-temporală cu operaţiile:*

(w1) $[\alpha]_k \vee [\beta]_k \overset{def}{=} [\alpha \vee \beta]_k$, $[\alpha]_k \wedge [\beta]_k \overset{def}{=} [\alpha \wedge \beta]_k$,

(w2) $\varphi_i[\alpha]_k \overset{def}{=} [\varphi_i\alpha]_k$, $\overline{\varphi}_i[\alpha]_k \overset{def}{=} [\overline{\varphi}_i\alpha]_k$,

(w3) $0_k \overset{def}{=} [\overline{\varphi}_k\alpha]_k$, $1_k \overset{def}{=} [\varphi_k\alpha]_k$, *unde* $\vdash_{\mathcal{WTM}_\theta(k)} \alpha$,

(w4) $G([\alpha]_k) \overset{def}{=} [G\alpha]_k$, $H([\alpha]_k) \overset{def}{=} [H\alpha]_k$.

• Cazul temporal

Algebra Lindenbaum-Tarski a logicii $\mathcal{TM}_\theta(k)$ se construieşte în mod similar cu cea a logicii $\mathcal{WTM}_\theta(k)$.

Propoziţie 4.2.9. *$E(k)/_{\sim_k}$, algebra Lindenbaum-Tarski a logicii $\mathcal{TM}_\theta(k)$ este o LM_θ-algebră temporală.*

4.2.3 Semantica Kripke şi completitudinea logicilor $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$

• **Cazul slab-temporal**

Definiţie 4.2.10. (Interpretare în $\mathcal{WTM}_\theta(k)$)
Fie (X, R_1, R_2) un cadru slab-temporal. O *interpretare* a logicii $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ este o funcţie

$$I_w : E(k) \times X \to L_2^I$$

care verifică următoarele egalităţi:

(I1) $I_w(\alpha \wedge \beta, x) = I(\alpha, x) \wedge I_w(\beta, x)$, $I_w(\alpha \vee \beta, x) = I(\alpha, x) \vee I_w(\beta, x)$,

(I2) $I_w(\varphi_i \alpha, x) = \varphi_i I_w(\alpha, x)$, $I_w(\overline{\varphi}_i \alpha, x) = \overline{\varphi}_i I_w(\alpha, x)$, pentru orice $i \in I$,

(I3) $I_w(Gp, x) = \bigwedge\{I_w(p, y) | xR_1y\}$, $I_w(Hp, x) = \bigwedge\{I_w(p, y) | xR_2y\}$.

Definiţie 4.2.11. (k-tautologie în $\mathcal{WTM}_\theta(k)$)
$\models_{\mathcal{WTM}_\theta(k)} \alpha$ ddacă pentru orice cadru slab-temporal (X, R_1, R_2),
pentru orice interpretare $I_w : E(k) \times X \to L_2^I$ şi pentru orice $x \in X$,
avem $I_w(\alpha, x)(k) = 1$.

Teoremă 4.2.12. *(Teorema de completitudine) Pentru orice enunţ α al lui $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ are loc:*

$$\vdash_{\mathcal{WTM}_\theta(k)} \alpha \text{ ddacă } \models_{\mathcal{WTM}_\theta(k)} \alpha.$$

• **Cazul temporal**

Definiţie 4.2.13. (Interpretare în $\mathcal{TM}_\theta(k)$)
Fie (X, R) un cadru temporal. O *interpretare* a logicii $\mathcal{TM}_\theta(k)$ este o funcţie

$$I_t : E(k) \times X \to L_2^I$$

care verifică egalităţile (I1), (I2) anterioare şi in plus:

(I3') $I_t(Gp, x) = \bigwedge\{I_t(p, y) | xRy\}$, $I_t(Hp, x) = \bigwedge\{I_t(p, y) | yRx \Leftrightarrow xR^{-1}y\}$.

Teoremă 4.2.14. *(Teorema de completitudine) Pentru orice enunţ α al lui $\mathcal{TM}_\theta(k)$ are loc:*

$$\vdash_{\mathcal{TM}_\theta(k)} \alpha \text{ ddacă } \models_{\mathcal{TM}_\theta(k)} \alpha.$$

Capitolul 5

Calculul cu predicate Moisil θ-valent $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TPM}_\theta(k)$

Capitolul 5 studiază calculul cu predicate corespunzător logicii Moisil θ-valente slab-temporale (temporale). Şi aici sunt studiate separat cele două tipuri de sisteme ("slab-temporal" şi "temporal"). Întâi este construită sintaxa acestor calcule ale predicatelor, apoi este demonstrat faptul că algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente poliadice slab-temporale (temporale) reprezintă "logica algebrică" asociată acestor sisteme. Sunt apoi studiate semantici de tip Kripke ale acestor logici şi este demonstrată o teoremă de completitudine pentru primul dintre cele două sisteme. Demonstraţia teoremei de completitudine foloseşte reprezentarea algebrelor Łukasiewicz- Moisil θ-valente poliadice slab-temporale.

Cele mai importante contribuţii ale acestui capitol sunt:

- *Subsecţiunea 5.2.1, unde dăm axiomatizarea calculelor cu predicate* $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ *şi* $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ *şi demonstrăm unele proprietăţi sintactice.*
- *Subsecţiunea 5.2.2, unde demonstrăm că algebrele Lindenbaum-Tarski ale logicilor* $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ *şi* $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ *sunt* LM_θ*-algebră poliadică slab-temporală (Propoziţia 5.2.8) şi* LM_θ*-algebră poliadică temporală (Propoziţia 5.2.9) studiate în capitolul 3.*
- *Subsecţiunea 5.2.3, unde demonstrez teorema de completitudine pentru logica* $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ *(Teorema 5.2.14).*

5.1 Calculul cu predicate Moisil θ-valent $\mathcal{PM}_\theta(k)$

Calculul cu predicate Moisil θ-valent a fost introdus de A. Filipoiu în 1981 [16]. Axiomatizarea calculului cu predicate Moisil θ-valent pe care m-am bazat în construcţia sistemelor logice din acest capitol se găseşte în [4].

5.2 Calculul cu predicate Moisil θ-valent $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TPM}_\theta(k)$

5.2.1 Sintaxa calculelor cu predicate $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TPM}_\theta(k)$

Fie $(I, \leq)$ este o mulţime total ordonată cu prim element 0 şi ultim element 1, având tipul de ordine θ şi $k \in I$ fixat.

Limbajul comun al calculelor cu predicate $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ constă din:

- variabile propoziţionale: $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ (mulţimea V a variabilelor propoziţionale este considerată infinită),
- o mulţime Q de simboluri de predicate (fiecărui simbol de predicate r i se asociază un număr natural $n > 0$ numit ordinul sau aritatea lui r)
- conectorii logici $\vee$, $\wedge$, φ_i, $\overline{\varphi}_i$,
- cuantificatorii $\forall$ şi $\exists$,
- paranteze: $(,), \{,\}$,
- operatorii temporali G şi H.

Definiţie 5.2.1. Mulţimea $Form(k)$ a formulelor lui $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ se defineşte prin inducţie.

Definiţie 5.2.2. *k-axiomele* lui $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ sunt

(PA0) k-axiomele logicii $\mathcal{M}_\theta(k)$ ((M1)-(M15)),

(PA1) $\forall x(\alpha \to_k \beta) \to_k (\alpha \to_k \forall x\beta)$, $x \notin FV(\alpha)$,

(PA2) $\exists x(\alpha \to_k \beta) \to_k (\alpha \to_k \forall x\beta)$, $x \notin FV(\alpha)$,

(PA3) $\forall x\alpha \to_k \alpha(x/y)$, $y \notin BV(\forall x\alpha)$,

(PA4) $\alpha(x/y) \to_k \exists x\alpha$, $y \notin BV(\exists x\alpha)$,

(PA5) $\varphi_i(\exists x\alpha) \leftrightarrow_k \exists x\varphi_i\alpha$, (PA6) $\varphi_i(\forall x\alpha) \leftrightarrow_k \forall x\varphi_i\alpha$,

(PA7) $\overline{\varphi}_i(\exists x\alpha) \leftrightarrow_k \forall x\overline{\varphi}_i\alpha$,

(PA8) $\overline{\varphi}_i(\forall x\alpha) \leftrightarrow_k \exists x\overline{\varphi}_i\alpha$.

(PA9) $G(\alpha \to_k \beta) \to_k (G\alpha \to_k G\beta)$, $H(\alpha \to_k \beta) \to_k (H\alpha \to_k H\beta)$,

(PA10) $G\varphi_i\alpha \leftrightarrow_k \varphi_i G\alpha$, $H\varphi_i\alpha \leftrightarrow_k \varphi_i H\alpha$, pentru orice $i \in I$,

(PA11) $\varphi_i\alpha \to_k GP_i\alpha$, $\varphi_i\alpha \to_k HF_i\alpha$, pentru orice $i \in I$.

Regulile de deducţie:

$$\frac{\alpha, \alpha \to_k \beta}{\beta} \text{ (k-m.p.)}, \frac{\alpha}{\forall x\alpha} \text{ (G)}, \frac{\alpha}{G\alpha}, \frac{\alpha}{H\alpha} \text{ (generalizare temporală)}.$$

(1) Calculul cu predicate Moisil θ-valent $\mathcal{PM}_\theta(k)$ conţine k-axiomele (PA0)-(PA8) şi regulile de deducţie (k-m.p) şi (G).

(2) Calculul cu predicate $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ conţine k-axiomele (PA0)-(PA10) şi toate regulile de deducţie.

(3) Calculul cu predicate $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ este o extensie a lui $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ cu k-axioma (PA11).

• **Cazul slab-temporal**

Definiţie 5.2.3. *k-teoremele formale* ale lui $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ se definesc prin inducţie pornind de la k-axiome şi aplicând regulile de deducţie.

Definiţie 5.2.4. (Deducţia din ipoteze) Fie $\Gamma \subseteq Form(k)$ şi $\gamma \in Form(k)$.

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{WTPM}_\theta(k)} \gamma$$

ddacă există $\gamma_1, ...\gamma_n \in \Gamma$ astfel încât $\vdash_{\mathcal{WTPM}_\theta(k)} \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i \to_k \gamma$.

Notaţii:

- $\vdash_{\mathcal{WTPM}_\theta(k)} \alpha$: α este o k-teoremă formală a lui $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$,

- $\Gamma \vdash_{\mathcal{WTPM}_\theta(k)} \alpha$: α este o k-teoremă formală a lui $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ în ipotezele Γ.

Teoremă 5.2.5. *(Teorema deducţiei) Fie* $\Gamma \subseteq Form(k)$ *şi* $\alpha, \beta \in Form(k)$. *Atunci*

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathcal{WPTM}_\theta(k)} \beta \textit{ ddacă } \Gamma \vdash_{\mathcal{WPTM}_\theta(k)} \alpha \to_k \beta.$$

• **Cazul temporal**

Remarcă 5.2.6. Conceptele de *k-teoremă formală şi k-deducţie* în logica $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ sunt definite similar noţiunilor corespunzătoare din logica $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$. Vom nota cu $\vdash_{\mathcal{TPM}_\theta(k)} \alpha$, faptul că α este o k-teoremă formală a lui $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ şi cu $\Gamma \vdash_{\mathcal{TPM}_\theta(k)} \alpha$, faptul că α este o k-teoremă formală a lui $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ în ipotezele Γ.

5.2.2 Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TPM}_\theta(k)$

Pe mulţimea $Form(k)$ a formulelor lui $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ definim următoarea relaţie:

$$\alpha \sim_k \beta \text{ ddacă } \vdash_{\mathcal{WTPM}_\theta(k)} \varphi_i\alpha \leftrightarrow_k \varphi_i\beta, \text{ pentru orice } i \in I.$$

Lemă 5.2.7. *$\sim_k$ este o relaţie de echivalenţă pe $Form(k)$.*

• **Cazul slab-temporal**

Propoziţie 5.2.8. *Algebra Lindenbaum-Tarski a logicii $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$) este o LM_θ-algebră poliadică slab-temporală cu operaţiile (w1)-(w4) şi în plus:*

- $\exists(J)([\alpha]_k) \stackrel{def}{=} [\exists j_1 \dots \exists j_m\alpha]_k$,
- $\forall(J)([\alpha]_k) \stackrel{def}{=} [\forall j_1 \dots \forall j_m\alpha]_k$, *unde* $\{j_1, \dots, j_m\} = FV(\alpha) \cap J$,
- $S(\sigma)([\alpha]_k) \stackrel{def}{=} [\alpha(i_1/\sigma(i_1), i_2/\sigma(i_2), \dots, i_n/\sigma(i_n))]_k$, *unde* $\{i_1, \dots, i_n\} = FV(\alpha)$.

• **Cazul temporal**

Algebra Lindenbaum-Tarski a logicii $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ se construieşte în mod similar cu cea a logicii $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$.

Propoziţie 5.2.9. *Algebra Lindenbaum-Tarski a logicii $\mathcal{TPM}_\theta(k)$) este o LM_θ-algebră poliadică temporală.*

5.2.3 Semantica Kripke a logicilor $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TPM}_\theta(k)$

• **Cazul slab-temporal**

Definiţie 5.2.10. O *structură slab-temporală* pentru $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ este

$$\mathcal{A} =< (X, R_1, R_2), (\mathcal{A}_x)_{x\in X} >$$

unde:

- (X, R_1, R_2) este un cadru slab-temporal,
- pentru orice $x \in X$, $\mathcal{A}_x = (A_x, (r^{\mathcal{A}_x}))$ este o structură pentru calculul cu predicate $\mathcal{PM}_\theta(k)$ astfel încât:
  dacă xR_1y sau xR_2y atunci $A_x \subseteq A_y$, pentru orice $x, y \in X$.

Definiţie 5.2.11. (Interpretare) Fie $\mathcal{A} =< (X, R_1, R_2), (\mathcal{A}_x)_{x\in X} >$ o structură slab-temporală. O *interpretare* a lui $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ în $\mathcal{A}$ este $s = (s_x)_{x\in X}$, unde pentru orice $x \in X$, $s_x : V \to A_x$.

Propoziţie 5.2.12. *Fie $\mathcal{A} =< (X, R_1, R_2), (\mathcal{A}_x)_{x\in X} >$ o structură temporală slabă pentru $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ şi $s = (s_x)_{x\in X}$. Există o unică funcţie $\tilde{s} : Form(k) \times X \to L_2^I$ astfel încât pentru orice $\alpha, \beta \in Form(k)$, $x \in X$ şi $i \in I$, au loc:*

(i) $\tilde{s}(r(x_1, ..., x_n), x) = r^{\mathcal{A}_x}(s_x(x_1), ..., s_x(x_n))$,

(ii) $\tilde{s}(\alpha \to_k \beta, x) = \tilde{s}(\alpha, x) \to_k \tilde{s}(\beta, x)$,

(iii) $\tilde{s}(\alpha \wedge \beta, x) = \tilde{s}(\alpha, x) \wedge \tilde{s}(\beta, x)$, $\tilde{s}(\alpha \vee \beta, x) = \tilde{s}(\alpha, x) \vee \tilde{s}(\beta, x)$,

(iv) $\tilde{s}(\varphi_i\alpha, x) = \varphi_i\tilde{s}(\alpha, x)$, $\tilde{s}(\overline{\varphi}_i\alpha, x) = \overline{\varphi}_i\tilde{s}(\alpha, x)$,

(v) $\tilde{s}(\forall y\alpha, x) = \bigwedge\limits_{t\in A_x} \tilde{s}(\alpha(y/t), x)$, $\tilde{s}(\exists y\alpha, x) = \bigvee\limits_{t\in A_x} \tilde{s}(\alpha(y/t), x)$,

(vi) $\tilde{s}(Gp, x) = \bigwedge\limits_{xR_1y} \tilde{s}(p, y)$, $\tilde{s}(Hp, x) = \bigwedge\limits_{xR_2y} \tilde{s}(p, y)$.

• **Notaţie**

Fie $\mathcal{A}$ o structură pentru $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$, $\varphi(v_1, ..., v_n)$ o formulă, $x \in X$ şi $a_1, ...a_n \in A_x$. Vom nota:

$$\|\varphi(a_1, .., a_n)\|_x^{\mathcal{A}} = \tilde{s}(\varphi(v_1, ...v_n), x)$$

unde $\tilde{s}$ se obţine din interpretarea $s = (s_x)_{x\in X}$, $s_x : V \to A_x$ cu $s_x(v_i) = a_i$, pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

Definiţie 5.2.13.

$$\models_{\mathcal{WTPM}_\theta(k)} \alpha \ (\alpha \text{ este k-tautologie })$$

ddacă pentru orice structură $\mathcal{A} =< (X, R_1, R_2), (\mathcal{A}_x)_{x\in X} >$, pentru orice $x \in X$ şi $a_1, \ldots, a_n \in A_x$ şi pentru orice interpretare $s = (s_x)_{x\in X}$, $s_x : V \to A_x$ avem

$$\|\varphi(a_1, .., a_n)\|_x^{\mathcal{A}}(k) = 1$$

.

Teoremă 5.2.14. *(Teorema de completitudinea a lui $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$) Pentru orice formulă φ a lui $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ are loc:*

$$\vdash_{\mathcal{WTPM}_\theta(k)} \varphi \textit{ ddacă } \models_{\mathcal{WTPM}_\theta(k)} \varphi.$$

• **Cazul temporal**

Definiţie 5.2.15. O *structură temporală* pentru $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ este

$$\mathcal{A} =< (X, R), (\mathcal{A}_x)_{x\in X} >$$

unde:

- (X, R) este un cadru,
- pentru orice $x \in X$, $\mathcal{A}_x = (A_x, (r^{\mathcal{A}_x}))$ este o structură pentru calculul cu predicate $\mathcal{PM}_\theta(k)$ astfel încât:
  dacă xRy sau yRx atunci $A_x = A_y$, pentru orice $x, y \in X$.

Definiţie 5.2.16. (Interpretare) Noţiunea de interpretare a logicii $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ se defineşte în mod similar cu cea a logicii $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$, cu excepţia relaţiei (vi) care se înlocuieşte cu:

(vi') $\tilde{s}(Gp, x) = \bigwedge\limits_{xRy} \tilde{s}(p, y)$, $\tilde{s}(Hp, x) = \bigwedge\limits_{yRx} \tilde{s}(p, y)$.

Teoremă 5.2.17. *(Teorema de corectitudine a lui $\mathcal{TPM}_\theta(k)$) Pentru orice formulă φ a lui $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ are loc:*

$$\vdash_{\mathcal{WTPM}_\theta(k)} \varphi \textit{ implică } \models_{\mathcal{WTPM}_\theta(k)} \varphi.$$

Capitolul 6

Algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente cu negaţie slab-temporale (temporale)

În acest capitol introducem noţiunile de algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă cu negaţie slab-temporală (notată LMN_θ-algebră slab-temporală) şi algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă cu negaţie temporală (notată LMN_θ-algebră temporală), structuri algebrice obţinute din algebrele Boole slab-temporale (algebrele Boole temporale) şi algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente cu negaţie.

Cele mai importante contribuţii ale acestui capitol sunt:

- *Subsecţiunea 6.2.1, în care introducem noţiunea de LMN_θ-algebră slab-temporală (Definiţia 6.2.1) şi LMN_θ-algebră temporală (Definiţia 6.2.2) pentru care prezentăm exemple şi proprietăţi.*
- *Subsecţiunea 6.2.2, în care formulăm şi demostrăm teoreme de reprezentare pentru LMN_θ-algebrele slab-temporale(Teorema 6.2.7) şi LMN_θ-algebrele temporale (Teorema 6.2.8).*
- *Subsecţiunea 6.2.3, unde, pentru LMN_θ-algebrele slab-temporale (temporale) regulate dăm o formă rafinată a Teoremei 6.2.7 şi a Teoremei 6.2.8. Aceste teoreme extind teorema de reprezentare a algebrelor Łukasiewicz-Moisil n-valente introduse în [15].*

6.1 Algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente cu negaţie

Algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente cu negaţie au fost introduse în 1984 de A. Iorgulescu în [36] pentru a generaliza noţiunea de algebră Łukasiewicz-

Moisil n-valentă. Pentru un caz particular de algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente cu negaţie, algebre regulate, A. Iorgulescu obţine teoreme de reprezentare mai tari.

6.1.1 Definiţie şi teorema de reprezentare

Fie $(I, \leq)$ o mulţime total ordonată cu 0 şi 1, cu tipul de ordine θ şi $\alpha : I \to I$ o involuţie antitonă.

Definiţie 6.1.1. O *algebră Łukasiewicz-Moisil θ-valentă cu negaţie* (LMN_θ-algebră) este o algebră

$$\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, -, (\varphi_i)_{i \in I}, 1_L)$$

de tipul $(2, 2, 1, (1)_{i \in I}, 0)$ astfel încât, pentru orice $x, y \in L$ şi $i \in I$:

(i) $(L, \vee, \wedge, -, 1_L)$ este algebră de Morgan,

(ii) $\varphi_i(x \vee y) = \varphi_i(x) \vee \varphi_i(y)$,

(iii) $\varphi_i x \vee -\varphi_i x = 1_L$,

(iv) $\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_j$,

(v) $\varphi_i(-x) = -\varphi_{\alpha(i)}(x)$,

(vi) Dacă $i \leq j$ atunci $\varphi_i \leq \varphi_j$,

(vii) Pentru orice $x, y \in L$, dacă $\varphi_i x = \varphi_i y$ pentru orice $i \in I$ atunci $x = y$ (principiul de determinare al lui Moisil).

Teoremă 6.1.2. *(Teorema de reprezentare) Pentru orice LMN_θ-algebră $\mathcal{L}$ există o mulţime nevidă X şi un morfism injectiv de LMN_θ-algebre $\varphi : \mathcal{L} \to (In(L_2))^X$.*

6.1.2 Algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente cu negaţie regulate

Algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente cu negaţie regulate sunt un caz particular de algebre Łukasiewicz-Moisil θ-valente cu negaţie, când muţimea I este o mulţime regulată.

Definiţie 6.1.3. O mulţime I este *regulată* dacă satisface următoarele proprietăţi:

- I este total ordonată, mărginită,
- Există o involuţie antitonă $\alpha : I \to I$,

- Pentru orice $i \in I$, $i \neq 0$, există un predecesor notat $i^- \in I$ ($i^- < i$ şi nu există $j \in I$ cu $i^- < j < i$).

Corolar 6.1.4. *Pentru orice LMN_θ-algebră regulată $\mathcal{L}$ există o mulţime nevidă X şi un morfism injectiv $\varphi : \mathcal{L} \to \bar{\mathcal{L}}_{1+\theta}^X$.*

Remarcă 6.1.5. Corolarul 6.1.4 este o generalizare a teoremei de reprezentare pentru LM_n-algebre, deoarece, pentru I finită avem $\bar{L}_{1+\theta} = \bar{L}_n = L_n$.

6.2 LMN_θ-algebre slab-temporale (temporale)

6.2.1 Definiţii şi proprietăţi

Definiţie 6.2.1. O *LMN_θ-algebră slab-temporală* este un triplet $(\mathcal{L}, G, H)$ astfel încât

$$\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, -, (\varphi_i)_{i \in I}, 1_L)$$

este o LMN_θ-algebră şi G, $H : L \to L$ sunt două operaţii unare pe L care satisfac condiţiile (2.1)-(2.3) din Definiţia 2.2.1.

Definiţie 6.2.2. O *LMN_θ-algebră temporală* este o LMN_θ-algebră slab-temporală $(\mathcal{L}, G, H)$ astfel încât G şi H verifică în plus proprietatea (2.4) din Definiţia 2.2.2.

Definiţie 6.2.3. Fie $(\mathcal{L}, G, H)$ o LMN_θ-algebră slab-temporală (temporală). Definim operaţiile $F, P : L \to L$ prin $F(x) \overset{def}{=} -G(-x)$ şi $P(x) \overset{def}{=} -H(-x)$, pentru orice $x \in L$.

- **Cazul slab-temporal**

Remarcă 6.2.4. Fie $(\mathcal{L}, G, H)$ o LMN_θ-algebră slab-temporală. Este cunoscut faptul că $C(\mathcal{L})$ este algebra Boole a elementelor lui L.

Dacă $x \in C(L)$ rezultă $\varphi_i G(x) = G(\varphi_i x) = G(x)$, deci $G(x) \in C(L)$. Într-un mod similar se arată că $H(x) \in C(L)$.

Considerăm operaţiile $C(G) : C(L) \to C(L)$ şi $C(H) : C(L) \to C(L)$, definite prin: $C(G) \overset{def}{=} G|_{C(L)}$, $C(H) \overset{def}{=} H|_{C(L)}$.

Obţinem că $(C(\mathcal{L}), C(G), C(H))$ este algebră Boole slab-temporală.

Lemă 6.2.5. *Dacă $(\mathcal{L}, G, H)$ este o LMN_θ-algebră slab-temporală atunci $(C(\mathcal{L}), C(G), C(H))$ este o algebră Boole slab-temporală.*

Remarcă 6.2.6. *Construcţia functorilor C şi In din cazul algebrelor fără negaţie este adaptată algebrelor cu negaţie.*

• **Exemplu de LMN_θ-algebră slab-temporală**

Fie (X, R_1, R_2) un cadru slab-temporal şi $\mathcal{L}$ o LMN_θ-algebră completă şi complet chrysippiană. Mulţimea L^X se organizează ca LMN_θ-algebră slab-temporală cu operaţiile definite similar cazului LM_θ-algebrelor slab-temporale.

• **Cazul temporal**

• **Exemplu de LMN_θ-algebră temporală**

Fie (X, R) un cadru temporal şi $\mathcal{L}$ o LMN_θ-algebră completă şi complet chrysippiană. Mulţimea L^X se organizează ca LMN_θ-algebră temporală cu operaţiile definite similar cazului LM_θ-algebrelor temporale.

6.2.2 Teoremele de reprezentare pentru LMN_θ-algebre slab-temporale (temporale)

• **Cazul slab-temporal**

Teoremă 6.2.7. *(Teorema de reprezentare)*
Pentru orice LMN_θ-algebră temporală slabă $(\mathcal{L}, G, H)$, există un cadru slab-temporal (X, R_1, R_2) şi un morfism injectiv

$$\alpha : (\mathcal{L}, G, H) \to (In(L_2)^X, G^*, H^*)$$

unde G^* şi H^* sunt definite în relaţiile (1.4) şi (1.5).

• **Cazul temporal**

Teoremă 6.2.8. *(Teorema de reprezentare)*
Pentru orice LMN_θ-algebră temporală $(\mathcal{L}, G, H)$, există un cadru temporal (X, R) şi un morfism injectiv

$$\alpha : (\mathcal{L}, G, H) \to (In(L_2)^X, G^*, H^*)$$

unde G^* şi H^* sunt definite în relaţiile (1.6) şi (1.7).

6.2.3 LMN_θ-algebre slab-temporale (temporale) regulate

Definiţie 6.2.9. Dacă I este o mulţime regulată (Definiţia 6.1.3), o LMN_θ-algebră slab-temporală (temporală) se numeşte LMN_θ-algebră slab-temporală (temporală) regulată.

• **Cazul slab temporal**

Corolar 6.2.10. *Pentru orice LMN_θ-algebră $(\mathcal{L}, G, H)$ slab-temporală regulată, există un cadru slab-temporal (X, R_1, R_2) şi un morfism*
$\gamma : (\mathcal{L}, G, H) \to (\bar{\mathcal{L}}^X_{1+\theta} \simeq (In(L_2))^X, G^*, H^*)$ *unde G^* şi H^* sunt definite ca în relaţiile (1.4 şi (1.5).*

• **Cazul temporal**

Corolar 6.2.11. *Pentru orice LMN_θ-algebră $(\mathcal{L}, G, H)$ temporală regulată, există un cadru temporal (X, R) şi un morfism*
$\gamma : (\mathcal{L}, G, H) \to (\bar{\mathcal{L}}^X_{1+\theta} \simeq (In(L_2))^X, G^*, H^*)$ *unde G^* şi H^* sunt definite ca în relaţiile (1.6 şi (1.7).*

Remarcă 6.2.12. Corolarul 6.2.11 este o generalizare a teoremei de reprezentare a LM_n-algebrelor temporale ([15]), deoarece pentru I finită avem $\bar{L}_{1+\theta} = \bar{L}_n = L_n$.

Capitolul 7

LMN_θ-algebre poliadice slab-temporale (temporale)

În acest capitol sunt studiate algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente cu negaţie poliadice slab-temporale (temporale). Este stabilită o teoremă de reprezentare pentru cazul slab-temporal.

Cele mai importante contribuţii ale acestui capitol sunt:

- *Subsecţiunea 7.2.1, în care introducem noţiunea de LMN_θ-algebră poliadică slab-temporală (Definiţia 7.2.1) şi LMN_θ-algebră poliadică temporală (Definiţia 7.2.2) pentru care dăm proprietăţi şi exemple.*
- *Subsecţiunea 7.2.2, unde enunţăm şi demonstrăm teorema de reprezentare a LMN_θ-algebrelor poliadice slab-temporale (Teorema 7.2.8).*
- *Subsecţiunea 7.2.3, unde, în cazul algebrelor regulate dăm o formă rafinată a teoremei de reprezentare a LMN_θ-algebrelor poliadice slab-temporale (Corolarul 7.2.14).*

7.1 Algebre LMN_θ-poliadice

Definiţie 7.1.1. O *LMN_θ-algebră poliadică* este un 5-uplu $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall)$ unde $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, -, (\varphi_i)_{i\in I}, 1_L)$ este o LMN_θ-algebră, U este o mulţime nevidă, S este o funcţie de la U^U la mulţimea endomorfismelor lui $\mathcal{L}$ şi $\exists$, $\forall$ sunt două funcţii de la $\mathcal{P}(U)$ la L^L, care satisfac axiomele (P1)-(P6) ale Definiţiei 1.2.1 şi axioma (P7) a Definiţiei 3.1.1.

7.2 LMN_θ-algebre poliadice slab-temporale (temporale)

7.2.1 Definiţii şi proprietăţi algebrice

Definiţie 7.2.1. O *LMN_θ-algebră poliadică slab-temporală* este un 7-uplu

$$(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall, G, H)$$

astfel încât

(7.1) $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall)$ este o LMN_θ-algebră poliadică,

(7.2) $(\mathcal{L}, G, H)$ este o LMN_θ-algebră poliadică slab-temporală,

(7.3) $S(\tau)(G(p)) = G(S(\tau)(p))$, pentru orice $\tau \in U^U$ şi $p \in L$,

(7.4) $S(\tau)(H(p)) = H(S(\tau)(p))$, pentru orice $\tau \in U^U$ şi $p \in L$.

Definiţie 7.2.2. O *LMN_θ-algebră poliadică temporală* este o LMN_θ-algebră poliadică slab-temporală $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall, G, H)$ astfel încât G şi H verifică următoarea proprietate adiţională: pentru orice $x, y \in L$,

(7.5) $G(x) \vee y = 1_L$ ddacă $x \vee H(y) = 1_L$.

• **Cazul slab-temporal**

Definiţie 7.2.3. Fie $\mathcal{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R_1, R_2, 0)$ un sistem slab-temporal şi $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, -, (\varphi_i)_{i\in I}, 1_L)$ o LMN_θ-algebră completă şi complet chrysippiană şi U o mulţime nevidă.

Notăm:

$$F^{U,\theta}_{\mathcal{T},\mathcal{L}} = \{(f_t)_{t\in T} | f_t : X^U_t \to L, \text{ pentru orice } t \in T\}.$$

Pe $F^{U,\theta}_{\mathcal{T},\mathcal{L}}$ considerăm operaţiile $\wedge$, $\vee$, $\varphi^{\mathcal{T}}_i$, $1^{\mathcal{T}}$, $S(\tau)$, $\exists(J)$, $\forall(J)$, G şi H ca în Propoziţia 3.2.5 şi în plus operaţia $-^{\mathcal{T}}$, definită prin: $-^{\mathcal{T}}((f_t)_{t\in T}) \overset{def}{=} (- \circ f_t)_{t\in T}$, unde $(- \circ f_t)(x) = -(f_t(x))$, pentru orice $i \in I$, $t \in T$ şi $x \in X^U_t$.

Lemă 7.2.4. *$(\mathcal{F}^{U,\theta}_{\mathcal{T},\mathcal{L}}, U, S, \exists, \forall, G, H)$ este o LMN_θ-algebră poliadică slab-temporală.*

Fie $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall, G, H)$ o LMN_θ-algebră poliadică slab-temporală. Am notat prin $C(L)$ mulţimea elementelor complementate a lui $\mathcal{L}$.

Lemă 7.2.5. *Dacă $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall, G, H)$ este o LMN_θ-algebră poliadică slab-temporală atunci $(C(\mathcal{L}), U, S, \exists, \forall, C(G), C(H))$ este o algebră Boole poliadică slab-temporală.*

- **Cazul temporal**

Construim un exemplu analogic pentru LMN_θ-algebră poliadică. Folosim noţiunea de sistem temporal.

Fie $\mathcal{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R, 0)$ un sistem temporal, $(L, \vee, \wedge, -, (\varphi_i)_{i\in I}, 1_L)$

Pe mulţimea $F^{U,\theta}_{\mathcal{T},\mathcal{L}} = \{(f_t)_{t\in T} | f_t : X^U_t \to L$, for all $t \in T\}$ definim operaţiile $\vee$, $\wedge$, $-^{\mathcal{T}}$, $\varphi^{\mathcal{T}}_i$, $1^{\mathcal{T}}$, $S(\tau)$, $\exists(J)$, $\forall(J)$, G şi H ca în Propoziţia 3.2.7 şi operaţia $-^{\mathcal{T}}$ în acelaşi fel ca în Definiţia 7.2.3.

Propoziţie 7.2.6. *$(\mathcal{F}^{U,\theta}_{\mathcal{T},\mathcal{L}}, U, S, \exists, \forall, G, H)$ este o LMN_θ-algebră poliadică temporală.*

Observaţie 7.2.7. *Construcţia functorilor adjunţi C şi In, se va extinde şi între categoriile algebrelor Boole poliadice slab-temporale (temporale) şi categoria LMN_θ-algebrelor poliadice slab-temporale (temporale).*

7.2.2 Teorema de reprezentare în cazul slab-temporal

Această subsecţiune conţine principalul rezultat al acestui capitol: teorema de reprezentare pentru LMN_θ-algebre poliadice slab-temporale.

Teoremă 7.2.8. *(Teorema de reprezentare). Fie $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall, G, H)$ o LMN_θ-algebră poliadică slab-temporală local finită şi de grad infinit şi Γ un filtru propriu al lui $\mathcal{L}$ cu $J_p = \emptyset$ pentru orice $p \in \Gamma$. Atunci există un sistem slab-temporal $\mathcal{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R_1, R_2, 0)$ şi un morfism de LMN_θ-algebre poliadice slab-temporale $\Phi : L \to F^{U,\theta}_{\mathcal{T}}$ astfel încât, pentru orice $p \in \Gamma$, are loc: $\Phi(p) = (f_t)_{t\in T} \Rightarrow (f_0(x))(i) = 1$, pentru orice $x \in X^U_t$ şi $i \in I$.*

Remarcă 7.2.9. *Ideea demonstraţiei teoremei 7.2.8 este de a folosi functorii adjuncţi C şi In pentru a transfera reprezentarea unei algebre Boole poliadice slab-temporale în reprezentarea unei LMN_θ-algebre poliadice slab-temporale.*

Problemă deschisă 7.2.10. *Demonstraţia teoremei de reprezentare pentru LMN_θ-algebre poliadice temporale rămâne o problemă deschisă.*

7.2.3 Cazul regulat

Definiţie 7.2.11. Dacă mulţimea I este regulată (Definiţia 6.1.3), LMN_θ-algebrele poliadice slab-temporale se numesc LMN_θ-algebre poliadice slab-temporale regulate.

Propoziţie 7.2.12. *Dacă I este o mulţime regulată, atunci LMN_θ-algebrele poliadice slab-temporale regulate $\mathcal{F}^{U,\theta}_{\mathcal{T}}$ şi $\mathcal{F}^{U,\theta}_{\mathcal{T},\bar{\mathcal{L}}_{1+\theta}}$ sunt izomorfe.*

Remarcă 7.2.13. Dacă I este o mulţime regulată, atunci, utilizând Propoziţia 7.2.12, teorema de reprezentare a LMN_θ-algebrelor poliadice slab-temporale regulate are următoarea formă:

Corolar 7.2.14. *Fie* $(\mathcal{L}, U, S, \exists, \forall, G, H)$ *o* LMN_θ*-algebră poliadică slab-temporală regulată local finită de grad şi de grad infinit şi* Γ *un filtru propriu al lui* $\mathcal{L}$ *cu* $J_p = \emptyset$ *pentru orice* $p \in \Gamma$*. Atunci există un sistem slab-temporal* $\mathcal{T} = (T, (X_t)_{t\in T}, R_1, R_2, 0)$ *şi un morfism de* LMN_θ*-algebre poliadice slab-temporale regulate* $\Phi : L \to F^{U,\theta}_{\mathcal{T},\bar{\mathcal{L}}_{1+\theta}}$ *astfel încât, pentru orice* $p \in \Gamma$*, are loc:* $\Phi(p) = (f_t)_{t\in T} \Rightarrow f_0(x) = 1$*, pentru orice* $x \in X^U_t$*.*

Capitolul 8

Concluzii şi cercetări viitoare

Teza de faţă a studiat calculul propoziţional şi calculul cu predicate a două sisteme de logică temporală având drept bază logica Moisil θ-valentă:

- calculul propoziţional $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ (Capitolul 3),
- calculul propoziţional $\mathcal{TM}_\theta(k)$ (Capitolul 3),
- calculul cu predicate $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ (Capitolul 5),
- calculul cu predicate $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ (Capitolul 5).

La nivelul sintaxei, diferenţa dintre $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TM}_\theta(k)$ pe de o parte şi $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ pe de altă parte constă într-o axiomă ce realizează legătura dintre operatorii temporali G şi H (vezi axioma (MA18)). O diferenţă mai pronunţată apare în cazul semanticilor de tip Kripke asociate acestor sisteme.

Semanticile Kripke ale sistemelelor $\mathcal{WTM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ folosesc o noţiune de cadru temporal cu două relaţii de accesibilitate R_1 şi R_2, iar semanticile Kripke ale $\mathcal{TM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TPM}_\theta(k)$ folosesc o singură relaţie de accesibilitate R (caz în care R_2=R_1^{-1}).

Sistemele logice din lucrare sunt studiate din perspectiva unei relaţii tripartite dintre sintaxa, semantica şi algebrele asociate lor. Pentru fiecare sistem logic este construită sintaxa (limbajul plus structura logică), apoi este dezvoltată o semantică de tip Kripke. Sunt introduse următoarele tipuri de algebre pentru cele patru sisteme logice:

Sistem logic	Algebre
calculul propoziţional $\mathcal{WTM}_\theta(k)$	LM_θ-algebre slab-temporale
calculul propoziţional $\mathcal{TM}_\theta(k)$	LM_θ-algebre temporale
calculul cu predicate $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$	LM_θ-algebre poliadice slab-temporale
calculul cu predicate $\mathcal{TPM}_\theta(k)$	LM_θ-algebre poliadice temporale

Aceste structuri sunt studiate din punct de vedere algebric, iar pentru LM_θ-algebrele slab-temporale, LM_θ-algebrele temporale, LM_θ-algebrele poliadice slab-temporale, LMN_θ-algebrele poliadice slab-temporale sunt obţinute teoreme de reprezentare. Folosind aceste teoreme de reprezentare sunt demonstrate apoi teoreme de completitudine pentru logicile $\mathcal{WTM}_\theta(k)$, $\mathcal{TM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ (Teorema 4.2.12, Teorema 4.2.14 şi Teorema 5.2.14).

De asemenea, în Capitolul 6 studiem algebrele Łukasiewicz-Moisil θ-valente cu negaţie slab-temporale (temporale). Pentru aceste structuri algebrice, demostrăm teoreme de reprezentare. Pentru un caz particular, algebrele regulate dăm o altă formă a teoremelor de reprezentare care generalizează cazul n-valent.

În Capitolul 7 introducem LMN_θ-algebrele poliadice slab-temporale (temporale). Ca structuri algebrice, ele se obţin înzestrând LMN_θ-algebrele poliadice cu doi operatori temporali G şi H. Rezultatul principal al capitolului este o teoremă de reprezentare pentru LM_θ-algebrele poliadice slab-temporale (Teorema 7.2.8).

O limitare a tezei de faţă o reprezintă lipsa unei teoreme de reprezentare pentru LM_θ-algebrele poliadice temporale, LMN_θ-algebrele poliadice temporale şi a unei teoreme de completitudine pentru logica $\mathcal{TPM}_\theta(k)$. De aceea primele două probleme deschise vor fi:

Problema deschisă 1: Demonstraţia unei teoreme de reprezentare pentru LM_θ-algebrele poliadice temporale.

Problema deschisă 2: Demonstraţia unei teoreme de reprezentare pentru LMN_θ-algebrele poliadice temporale.

Problema deschisă 3: Demonstraţia unei teoreme de completitdine pentru logica $\mathcal{TPM}_\theta(k)$.

Rezolvarea Problemei deschise 1 ar putea conduce la rezolvarea Problemei 3.

Demonstraţiile teoremelor de completitudine din lucrare sunt de tip algebric, bazându-se pe teoremele de reprezentare ale algebrelor corespunzătoare. Atunci următoarele probleme deschise ar fi:

Problema deschisă 4: Găsiţi demonstraţii ale teoremei de completitudine directe, fără a folosi teorema de reprezentare (de exemplu, demonstraţia de tip Henkin).

Problema deschisă 5: Găsiţi demonstraţii metamatematice ale teoremei de reprezentare pentru LM_θ-algebre slab-temporale, LM_θ-algebre temporale şi LM_θ-algebre poliadice slab-temporale (bazate pe teoremele de completitudine pentru logicile $\mathcal{WTM}_\theta(k)$, $\mathcal{TM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$).

Cu rezolvarea ultimelor două probleme deschise s-ar lumina complet relaţia dintre completitudine şi reprezentare în cazul logicilor studiate în lucrare.

Următoarele două probleme pot genera direcţii de dezvoltare vaste:

Problema deschisă 6: Dezvoltaţi teoria modelelor pentru calculul cu predicate $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TPM}_\theta(k)$.

Problema deschisă 7: Dezvoltaţi logica algebrică corespunzătoare calculului cu predicate $\mathcal{WTPM}_\theta(k)$ şi $\mathcal{TPM}_\theta(k)$.

Problema deschisă 8: Dezvoltaţi logica Moisil θ-valentă cu negaţie slab-temporală (temporală) (calculul propoziţional şi calculul cu predicate).

Ca exemplificare, în cadrul Problemei 6, ar putea fi încercată demonstraţia unei teoreme de interpolare de tip Craig, iar în cadrul Problemei 7, demonstraţia unei proprietăţi de amalgamare.

Bibliografie

[1] V. Boicescu, *Sur les systèmes déductifs dans la logique θ-valente*, Publ. Dép. Math. Lyon, 8, 1971, 123-133.

[2] V. Boicescu, *Sur une logique polyvalente*, Rev. Roumaine Sci. Soc., sér. Philos. et Logique, 17, 1973b, 393-405.

[3] V. Boicescu, *Contributions to the study of Łukasiewicz-Moisil algebras* (Romanian), Ph.D. Thesis, University of Bucharest, 1984.

[4] V. Boicescu, A. Filipoiu, G. Georgescu and S. Rudeanu, *Łukasiewicz-Moisil algebras*, North-Holland, 1991.

[5] J. P. Burgess, *Basic tense logic*, In: D.M. Gabbay and F. Guenthner (Eds), Handbook of philosophical logic, Vol.II, D. Reidel Publ. Comp., 1984, 89-133.

[6] I. Chajda, *Algebraic axiomatization of tense intuitionistic logic*, Central European Journal of Mathematics, Vol. 9, No. 5, 2011, 1185-1191.

[7] C. Chiriţă, *Three-valued Temporal Logic*, Annals of the University of Bucharest, LIV, 2005, 75-90.

[8] C. Chiriţă, *A completeness theorem for three-valued temporal predicate logic*, Annals of the University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., Vol. 35, 2008, 41-53.

[9] C. Chiriţă, *Tense θ-valued Moisil propositional logic*, International Journal of Computers, Communications & Control, Vol. 5, No. 5, 2010, 642-653.

[10] C. Chiriţă, *Tense θ-valued Łukasiewicz-Moisil algebras*, Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, Vol. 17, No. 1, 2011, 1-24.

[11] C. Chiriţă, *Polyadic tense θ-valued Łukasiewicz-Moisil algebras*, Soft Computing, Vol. 16, No. 6, 2012, 979-987.

[12] C. Chiriţă, *Tense θ-valued Moisil predicate logic*, in preparation

[13] R. Cignoli, I. M .L. D'Ottaviano and D. Mundici, *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*, Kluwer, 2000.

[14] A. Daigneault, *Théorie des modèles en logique mathématique*, Univ. de Montreal.

[15] D. Diaconescu, G. Georgescu, *Tense operators on MV-algebras and Łukasiewicz-Moisil algebras*, Fundamenta Informaticae XX, 2007, 1-30.

[16] A. Filipoiu, *θ-valued Łukasiewicz-Moisil algebras and logics*, Ph.D.Thesis, Univ.of Bucharest, 1981.

[17] M. Fitting, *Many-valued modal logics*, Fundamenta Informaticae, 15, 1991, 235-254.

[18] M. Fitting, *Many-valued modal logics*, Fundamenta Informaticae, 17, 1992, 55-73.

[19] D. M. Gabbay, Model theory for tense logic and decidability results for non-classical logics, Ann. Math. Logic, 8, 1975, 185-295.

[20] B. A. Galler, *Cylindric and polyadic algebras*, Proc. AMS, 8, 1957, 176-183.

[21] G. Georgescu, *Representations des algebres de Łukasiewicz θ-valentes polyadiques*, C.R.Acad.Sci.Paris, A-B, 274, 1972, A944-A946.

[22] G. Georgescu, *θ-valued Łukasiewicz algebras*, Ph.D. Thesis, Math. Institute, Bucharest, mai 1972.

[23] G. Georgescu, *A representation theorem for tense polyadic algebras*, Mathematica, Tome 21 (44), No 2, 1979, pp. 131-138.

[24] G. Georgescu, *Matematica teoremelor de completitudine, I,*, Revista de Filosofie, LV, 1-2, 2008, 71-84.

[25] G. Georgescu, *Algebra logicii-logica algebrică*, Revista de logică, 2, 2009.

[26] G. Georgescu, C. Vraciu, *On the characterization of centered Łukasiewicz algebras*, J. Algebra, 486-495, 1970.

[27] G. Georgescu, A. Iorgulescu, I. Leuştean, *Monadic and closure MV-algebras*, Multiple-Valued Logic, 3, 235-257, 1998.

[28] G. Georgescu, A. Iorgulescu, S. Rudeanu, *Grigore C.Moisil (1906-1973) and his School in Algebraic Logic*, Int. Journal of Computers, Communications & Control,Vol.I, No.1, 81-99, 2006.

[29] G. Georgescu, A. Iorgulescu, S. Rudeanu, *Some Romanian researches in algebra of logic*, In: Grigore C.Moisil and his followers, Editura Academiei Romane, 86-120, 2007.

[30] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti, 2010.

[31] R. Goldblatt, *Logics of Time and Computation*, CSLI Lecture Notes No.7, 1992.

[32] P. Hajek, *Mathematics of fuzzy logic*, Kluwer, 1998.

[33] P.R. Halmos, *Algebraic logic*, Chelsea Pub. Comp., 1962.

[34] L. Henkin, *The completeness of the first-order functional calculus*, J.Symb.Logic, 14, 1949, 159-166.

[35] L. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski, *Cylindric algebras*, I, II, North-Holland, 1971, 1985.

[36] A. Iorgulescu, $1+\theta$ *-valued Łukasiewicz-Moisil algebras with negation* (Romanian). Ph.D.Thesis, Univ. of Bucharest, 1984.

[37] T. Kowalski, *Varieties of tense algebras*, Rep.Math.Logic, 32, 53-95, 1998.

[38] S. Kripke, *A completeness theorem in modal logic*, J.Symb.Logic, 24, 1959, 1-14.

[39] S. Kripke, *Semantical analysis of modal logic I. Normal propositional calculi*, Zeit. fur Math. Logik and Grundlagen der Mathematik, 9, 1963, 67-96.

[40] F. Kroger, *Tense logic of programs*, Springer-Verlag, 1987.

[41] E. J. Lemmon, *Algebraic semantics for modal logic. I.II.*, J.Symbolic Logic, 31, 45-46, 191-218, 1966.

[42] L. Leuştean, *Canonical Models and Filtrations in Three-valued Propositional Modal Logic*, *Multi. Val. Logic.*, 8 (5-6), 577-590, 2002.

[43] I. Leuştean, *A determination principle for algebras of n-valued Łukasiewicz logic*, Journal of Algebra, 320, 2008, 3694-3719.

[44] I. Leuştean, *Principiul determinării în algebre Łukasiewicz-Moisil n-valente*, Revista de logică, 1, 2011.

[45] J. Łukasiewicz, *On three-valued logic*, Ruch Filozoficzny (Polish), 5, 160-171, 1920.

[46] J. Łukasiewicz, A. Tarski, *Untersuchungen ber den Aussagenkalkl*, C.R. Sances Soc. Sci. Lettres Varso-vie, Cl. III, 23, 1930, 30-50.

[47] Gr. C. Moisil, *Recherches sur les logiques non-chrysippiennes*, Ann. Sci. Univ. Jassy, 26, 431-466, 1940.

[48] Gr. C. Moisil, *Notes sur les logiques non-chrysippiennes*, Ann. Sci. Univ. Jassy, 27, 86-98, 1941.

[49] Gr. C. Moisil, *Sur les anneaux de caractéristique 2 ou 3 et leurs applications*, Bul. Politechn. Bucharest, 12, 1941, 66-90.

[50] Gr. C. Moisil, *Contributions l' étude des logiques non-chrysippiennes. I. Un nouveau système d'axiomes pour les algébres Łukasiewicziennes tétravalentes*, C.R. Acad. Sci. Roumanie, 5, 1941, 289-293.

[51] Gr. C. Moisil, *Contributions à l' étude des logiques non-chrysippiennes. II. Anneaux engendrés par les algébres Łukasiewicziennes centrés*, C.R. Acad. Sci. Roumanie, 6, 1942, 9-14.

[52] Gr. C. Moisil, *Contributions à l' étude des logiques non-chrysippiennes. II. Anneaux engendrés par les algébres Łukasiewicziennes tétravalentes axées*, C.R. Acad. Sci. Roumanie, 7, 1942, 14-18.

[53] Gr. C. Moisil, *Logique modale*, Disquis. Math. Phys, 2, 1942.

[54] Gr. C. Moisil, *Łukasiewiczian algebras* , Computing Center, Univ. Bucharest, 311-324, 1968, (preprint) = [1972].

[55] Gr. C. Moisil, *Essais sur les logiques non-chrysippiennes*, Ed. Academiei, Bucharest, 1972.

[56] Gr. C. Moisil, Lecţii despre logica raţionamentului nuanţat, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucharest, 1975.

[57] Gh. S. Nadiu, *Cercetări asupra logicilor necryssipiene/Research about Necryssipiene Logics*, 1972 (PhD Thesis, supervisor Grigore C. Moisil).

[58] P. Ostermann, *Many-valued propositional calculi*, Zeit. fur Math. Logik and Grundlagen der Mathematik, 34, 1998, 345-354.

[59] A. Popescu, *Tones of truth*, Revista de logică, 2, 2011.

[60] E. Post, *Introduction to a general theory of elementary propositions*, Amer. J. Math., 43, 1921, 163-185.

[61] A. N. Prior, *Time and Modality*, Clarendon Press, Oxford, 1957.

[62] H. Rasiowa, *An algebraic approach to non-classical logics*, North-Holland Publ., Amsterdam, Polish Scientific Publ., Warszawa, 1974.

[63] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, Inform. And Control, 8, 1965, 338-353.