UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

TEZĂ DE DOCTORAT

Spaţii Köthe de câmpuri de vectori

Rezumat

Coordonator Ştiinţific :

Prof. Univ. Dr. Ion Chiţescu

Doctorand :

Liliana Sireţchi

BUCUREŞTI - 2012

1. PRELIMINARII

Pe parcursul lucrării, K va fi corpul scalarilor ($K = \mathbb{R}$ = mulţimea numerelor reale sau $K = \mathbb{C}$ = multimea numerelor complexe). Vom scrie $\mathbb{R}_+ \stackrel{def}{=} [0, \infty)$ şi $\overline{\mathbb{R}}_+ \stackrel{def}{=} [0, \infty]$. Ca de obicei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ = mulţimea numerelor naturale şi $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Să presupunem că (S,Σ,μ) este un *spaţiu cu măsură*, adică S este o mulţime nevidă, Σ este o σ - algebră de submulţimi ale lui S, iar $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este o măsură completă nenulă. Vom scrie:

$$M_+(\mu) = \{u : S \to \overline{\mathbb{R}}_+ \mid u \text{ este } \mu \text{ - măsurabilă}\}.$$

Se numeşte *normă funcţională* o normă $\rho : M_+(\mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ cu proprietăţile următoare:

(i) $\rho(u) = 0$ dacă şi numai dacă $u(t) = 0$ μ - a.p.t ;

(ii) $u \leq v \Rightarrow \rho(u) \leq \rho(v)$;

(iii) $\rho(u + v) \leq \rho(u) + \rho(v)$;

(iv) $\rho(au) = a\rho(u)$.

cu convenţia $0 \cdot \infty = 0$.

Se ştie că $\rho(u) < \infty \Rightarrow u(t) < \infty$ μ - a.p.t. si $u(t) \leq v(t)$ μ - a.p.t. $\Rightarrow \rho(u) \leq \rho(v)$.

Spunem că ρ are *proprietatea Riesz - Fischer* (şi scriem $\rho\ R - F$) dacă :

$$\rho\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \rho(u_n)$$

pentru orice şir $(u_n)_n$ in $M_+(\mu)$.

Spunem că ρ are *proprietatea Fatou* (şi scriem $\rho\ F$) dacă :

$$\rho(\sup_n u_n) = \sup_n \rho(u_n)$$

pentru orice şir crescător $(u_n)_n$ din $M_+(\mu)$.

Se ştie că $\rho\ F \Rightarrow \rho\ R - F$ (implicaţia reciprocă nu este numaidecât adevărată).

Pentru orice $A \in \Sigma$, vom nota φ_A funcţia caracteristică a lui A.

Vom scrie

$$\rho(A) \stackrel{def}{=} \rho\left(\varphi_A\right)$$

$$M(\mu) = \{f : S \to K \mid f \text{ este } \mu - \text{măsurabilă}\}$$

$$\mathcal{L}_\rho(\mu) = \mathcal{L}_\rho = \{f \in M(\mu) \mid \rho|f| < \infty\}$$

(unde $\rho|f| \stackrel{def}{=} \rho(|f|)$).

Atunci $\mathcal{L}_\rho$ este un subspaţiu vectorial al lui $M(\mu)$, seminormat cu seminorma

$$f \mapsto \rho|f|.$$

Spaţiul nul este :

$$N(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_\rho \mid \rho|f| = 0\} = \{f \in M(\mu) \mid f(t) = 0 \ \ \mu - \text{ a.p.t.}\}$$

(de fapt $N(\mu) = \{f : S \to K \mid f(t) = 0 \ \ \mu \text{ - a.p.t.}\}$).

Spaţiul factor va fi

$$L_\rho(\mu) = L_\rho = \mathcal{L}_\rho(\mu)/_{N(\mu)}$$

(relaţia de echivalenţă fiind dată de

$$f \sim g \Leftrightarrow \rho|f-g| = 0 \Leftrightarrow f(t) = g(t) \ \mu - \text{ a.p.t. })$$

normat cu norma

$$\tilde{f} \mapsto ||\tilde{f}|| = \rho|f|$$

pentru fiecare $f \in \tilde{f}$.

Spaţiile L_ρ se numesc *spaţii Köthe*.

Se ştie că L_ρ este Banach dacă şi numai dacă $\rho \ R-F$.

Spaţiile L_ρ generalizează spaţiile Orlicz sau spaţiile Lebesgue L^p (pentru aceste spaţii, norma funţională $|| \ ||_p$ are proprietatea Fatou).

2. Fie acum un spaţiu topologic local compact separat T. Considerăm de asemenea o familie de spaţii Banach $\mathcal{E} = (E_t)_{t\in T}$. Norma în fiecare E_t se va nota $||z||$, pentru $z \in E_t$. O notaţie mai precisă ar fi fost $||z||_t$, dar considerăm că nu e cazul de confuzie.

Se numeşte *câmp de vectori* (relativ la $\mathcal{E}$) o funcţie $x : T \to \bigcup\limits_{t\in T} E_t$ astfel încât:

$$x(t) \in E_t$$

pentru orice $t \in T$. Spaţiul tuturor câmpurilor de vectori relative la $\mathcal{E}$ se va nota cu $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Evident, $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ înzestrat cu operaţiile uzuale (definite punctual) formează spaţiu vectorial.

$$(x,y)| \to x+y \text{ unde } (x+y)(t) \stackrel{def}{=} x(t)+y(t)$$

$$(\alpha,x)| \to \alpha x \text{ unde } (\alpha x)(t) \stackrel{def}{=} \alpha x(t)$$

pentru orice $x, y \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ şi orice $\alpha \in K$.

În ceea ce priveşte definiţia anterioară, facem observaţia că are loc relaţia:

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}) = \prod_{t\in T} E_t$$

Pentru fiecare $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, putem defini funcţia $|x| : T \to \mathbb{R}_+$, astfel

$$|x|(t) = ||x(t)||.$$

Se numeşte *familie fundamentală de câmpuri de vectori continue* orice subspaţiu vectorial $\mathcal{A}$ din $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, care satisface următoarele axiome :

$(A1)$ Pentru orice $x \in \mathcal{A}$, funcţia $|x|$ este continuă.

$(A2)$ Pentru orice $t \in T$, mulţimea

$$\{x(t) \mid x \in \mathcal{A}\}$$

este densă în E_t.

Caz particular: *Cazul de unicitate* $\mathcal{C}(E)$

3. Să considerăm acum o familie fundamentală de câmpuri de vectori continue $\mathcal{A}$. Vom spune că $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ *este continuu în* $t_0 \in T$ *relativ la* $\mathcal{A}$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $V \in \mathcal{V}(t_0)$ = mulţimea tuturor vecinătăţiilor lui t_0 şi există $y \in \mathcal{A}$ astfel încât

$$||x(t) - y(t)|| < \varepsilon$$

pentru orice $t \in V$.

Dacă $\varnothing \neq A \subset T$ vom spune că x este *continuu pe A* dacă x este continuu în orice $t \in A$. În cazul în care $A = T$ vom spune că x este *continuu* (relativ la $\mathcal{A}$).

Privitor la definiţia anterioară, facem observaţiile următoare :

- Orice $x \in \mathcal{A}$ este continuu relativ la $\mathcal{A}$ (luăm $y = x$ în definiţie).

- Câmpul de vectori x este continuu în t_0 (relativ la $\mathcal{A}$) dacă şi numai dacă pentru orice $y \in \mathcal{A}$ şi orice $\alpha \in K$, câmpul de vectori $x + \alpha y$ este continuu în t_0 (relativ la $\mathcal{A}$).

Într-adevăr, dacă x este continuu în t_0, luăm $\varepsilon > 0$ şi găsim $V \in \mathcal{V}(t_0)$ şi $z \in \mathcal{A}$, astfel încât $||x(t) - z(t)|| < \varepsilon$ $t \in V$, rezultând că $|(x + \alpha y)(t) - (z + \alpha y)(t)|| < \varepsilon$, deci $z + \alpha y \in \mathcal{A}$.

- Câmpul de vectori x este continuu în t_0 relativ la $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă $|x - y|$ este contiuu în t_0, pentru orice $y \in \mathcal{A}$.

Pri urmare, dacă x este continuu în t_0 relativ în $\mathcal{A}$, rezultă că $|x|$ este continuu în t_0.

Scriem

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) = \{x \in \mathcal{C}(\mathcal{E}) \mid x \text{ este continuu relativ la } \mathcal{A}\}$$

Atunci $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ şi $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ este o familie fundamentală de vectori continue.

4. De acum înainte vom lucra în contextul următor :

Cadru : Presupunem că T este un spaţiu topologic local compact separat, cu $\mathcal{B}$ =mulţimea borelienelor lui T. Fie $\mathcal{T}$ o σ - algebră de submulţimi ale lui T astfel încât $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ şi fie $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ o măsură nenulă completă, $\mu(A) < \infty$ pentru orice $A \in \mathcal{K}$ = mulţimea submulţimilor compacte ale lui T. De asemenea să presupunem că μ este regulată. Deci avem spaţiul cu măsură $(T,\mathcal{T},\mu)$. Să considerăm o familie $\mathcal{E} = (E_t)_{t \in T}$ de spaţii Banach , şi ca şi anterior, spaţiul de vectori $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ precum şi o familie fundamentală de vectori continue $\mathcal{A}$.

Un câmp de vectori $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ se numeşte *μ - măsurabil relativ la $\mathcal{A}$* (sau mai scurt *$(\mathcal{A},\mu)$ - măsurabil*) dacă pentru orice $A \in \mathcal{K}$ şi orice $\varepsilon > 0$, există $\mathcal{K} \ni A_\varepsilon \subset A$ astfel încât $\mu(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi x este continuu relativ la $\mathcal{A}$ pe A_ε.

Scriem

$$\mathcal{M}(\mathcal{A},\mu) = \{x \in \mathcal{C}(\mathcal{E}) \mid x \text{ este } (\mathcal{A},\mu) - \text{măsurabil}\}$$

prin urmare $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A},\mu)$.

Remarcăm faptul că $\mathcal{M}(\mathcal{A},\mu)$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ cu următoarele proprietăţi:

- Pentru orice $x, y \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ astfel încât $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A},\mu)$ şi $y = x$ μ - a.p.t., avem că $y \in \mathcal{M}(\mathcal{A},\mu)$.

- Pentru orice $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A},\mu)$ funcţia $|x|$ este μ - măsurabilă.

- Dacă $(x_n)_n$ este un şir în $\mathcal{M}(\mathcal{A},\mu)$ şi $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ astfel încât $x_n \underset{n}{\rightarrow} x$ μ - a.p.t., atunci $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A},\mu)$. Mai mult (conform teoremei Egorov), pentru orice $A \in \mathcal{K}$ şi orice $\varepsilon > 0$, există $\mathcal{K} \ni A_\varepsilon \subset A$ astfel încât $\mu(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi orice $(x_n)_n$ converge uniform la x pe A_ε.

- Un element $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ este în $\mathcal{M}(\mathcal{A},\mu)$ dacă şi numai dacă $\varphi_A x$ este în $\mathcal{M}(\mathcal{A},\mu)$ pentru orice $A \in \mathcal{K}$.

Caz particular : Presupunem că suntem în cazul de unicitate $\mathcal{C}(E)$, cu $\mathcal{A} = E$. Atunci, se poate demonstra (conform teoremei Lusin) că un câmp de vectori (adică o funcţie) $x : T \to E$ este (E,μ) - măsurabilă dacă şi numai dacă x este μ - măsurabilă. În acest caz vom scrie :

$$\mathcal{M}(E,\mu) \overset{def}{=} M_E(\mu).$$

2. SPAŢII KÖTHE DE CÂMPURI DE VECTORI

1. În acest capitol vom introduce obiectul de studiu al acestei lucrări şi anume spaţiile Köthe de câmpuri de vectori.

Vom lucra în condiţiile capitolului 1, paragraful 4 şi vom presupune suplimentar că ρ este o normă funcţională pe $(T,\mathcal{T},\mu)$.

Spaţiul *seminormat Köthe* $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A})$ este definit astfel :

$$\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A},\mu) \mid \rho|x| < \infty\}.$$

Definiţia de mai sus are sens deoarece aşa cum am văzut anterior, pentru orice $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A},\mu)$ vom avea $|x| \in M_+(\mu)$.

Evident, $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A})$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}(\mathcal{A},\mu)$, seminormat cu seminorma :

$$x \mapsto \rho|x|.$$

Spaţiul nul este :

$$N_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A},\mu) \mid \rho|x| = 0\} = \{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A},\mu) \mid x(t) = 0 \ \mu - \text{ a.p.t. }\}$$

Obţinem astfel spaţiul factor :

$$L_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}) = \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A})/_{N_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A})}$$

(relaţia de echivalenţa este dată de $x \sim y \Leftrightarrow x(t) = y(t)$ μ - a.p.t.)

normat cu norma :

$$\tilde{x} \mapsto ||\tilde{x}|| = \rho|x|$$

pentru orice $x \in \tilde{x}$.

Definiţia 1. Spaţiul vectorial $L_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A})$, normat cu norma definită mai sus, se numeşte *spaţiul Köthe de câmpuri de vectori*.

2. **Lema 2**.

Presupunem că ρ $R-F$ şi fie $(x_n)_n$ un şir în $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A})$ astfel încât $\sum_{n=0}^{\infty} \rho|x_n| < \infty$. *Atunci :*

a) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *convergentă μ - a.p.t., adică există $A \in \mathcal{T}$ cu $\mu(A) = 0$ astfel încât pentru orice $t \in T \setminus A$, seria* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$ *convergentă în E_t.*

b) Definim $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ astfel :

$$x(t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t), & \textit{dacă } t \in T\setminus A \\ \textit{arbitrar în } E_t, & \textit{dacă } t \in A. \end{cases}$$

Atunci $x \in \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ şi pentru orice număr natural n, avem :

$$\rho|x - \sum_{k=0}^{n} x_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho|x_k| \underset{n}{\rightarrow} 0.$$

Teorema 3 (Completitudinea spaţiilor Köthe de câmpuri de vectori)

Presupunem ρ $R - F$. Atunci $L_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ este spaţiu Banach.

3. Am definit prin urmare spaţiul $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ şi convergenţa şirurilor în acest spaţiu. În continuare vom introduce un alt tip de convergenţă (pe toate $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$), mai slabă decât convergenţa lui $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ pe acest spaţiu.

Observăm mai întâi că dacă A, $A_1 \in \mathcal{T}$ aftel încât $A_1 \subset A$ şi $\mu(A \setminus A_1) = 0$, rezultă că $\rho(A) = \rho(A_1)$. (deoarece $\varphi_A = \varphi_{A_1} + \varphi_{A \setminus A_1}$ deci $\rho(A) \leq \rho(A_1) + \rho(A \setminus A_1) = \rho(A)$). Folosim faptul că $\varphi_{A \cup B} \leq \varphi_A + \varphi_B$, obţinem $\rho(A \cup B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ pentru orice A, $B \in \mathcal{T}$.

Definiţia 4. Fie $(f_n)_n$ un şir în $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$.

1. Pentru $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$ vom spune că $(f_n)_n$ *converge la f în ρ - măsură* (şi vom scrie $f_n \overset{\rho}{\underset{n}{\rightarrow}} f$), dacă pentru orice $a > 0$, avem :

$$\lim_n \rho(|f_n - f| > a) = 0.$$

Vom scrie

$$\rho(|f_n - f| > a) \overset{def}{=} \rho(A_n^a)$$

unde

$$A_n^a = \{t \in T \mid ||f_n(t) - f(t)|| > a\} \in \mathcal{T}.$$

2. Vom spune că $(f_n)_n$ este *Cauchy în ρ - măsură* dacă, pentru orice $a > 0$, avem : pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \geq 1$ astfel încât pentru orice $m \geq n(\varepsilon)$ şi $n \geq m(\varepsilon)$ avem :

$$\rho(|f_m - f_n| > a) < \varepsilon.$$

Vom scrie

$$\rho(|f_m - f_n| > a) \overset{def}{=} \rho(A_{m,n}^a)$$

unde

$$A_{m,n}^a = \{t \in T| \; ||f_m(t) - f_n(t)|| > a\} \in \mathcal{T}.$$

Propoziţia 5.

Fie $(f_n)_n$ *convergent în* ρ *- măsură (adică există* $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$ *astfel încât* $f_n \underset{n}{\overset{\rho}{\longrightarrow}} f$*). Atunci* $(f_n)_n$ *este Cauchy în* ρ *- măsură.*

Propoziţia 6.

1. Fie $f_n \underset{n}{\overset{\rho}{\longrightarrow}} f$ *şi* $f = g$ μ *- a.p.t. Atunci* $f_n \underset{n}{\overset{\rho}{\longrightarrow}} g$.

2. Fie $f_n \underset{n}{\overset{\rho}{\longrightarrow}} f$ *şi* $f_n \underset{n}{\overset{\rho}{\longrightarrow}} g$*, Atunci* $f = g$ μ *- a.p.t..*

Teorema următoare demonstrează că convergenţa în $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ este mai tare decât convergenţa în ρ - măsură.

Teorema 7.

Dacă $f_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ *în* $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$*, atunci* $f_n \underset{n}{\overset{\rho}{\longrightarrow}} f$.

Corolar 8.

Fie $f_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ *şi* $f_n \underset{n}{\longrightarrow} g$ *în* $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$*. Atunci* $f = g$ μ *- a.p.t.*

4. În acest paragraf vom generaliza aproape uniform (asimptotic) convergenţa şi vom introduce relaţii între tipurile de convergenţă.

Definiţia 9. Fie $(f_n)_n$ un şir în $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$.

1. Pentru $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$ vom spune că $(f_n)_n$ *converge* ρ *- aproape uniform (*ρ *- asimptotic) la* f (şi vom scrie $f_n \underset{n}{\overset{\rho u}{\longrightarrow}} f$) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $A_\varepsilon \in \mathcal{T}$ astfel încât $\rho(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $(f_n)_n$ converge uniform la f pe $T \setminus A_\varepsilon$.

2. Vom spune că $(f_n)_n$ este *ρ - aproape uniform (ρ - asimptotic) Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $A_\varepsilon \in \mathcal{T}$ astfel încât $\rho(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $(f_n)_n$ este uniform Cauchy pe $T \setminus A_\varepsilon$ (i.e. pentru orice $\delta > 0$, există $n(\delta)$ cu proprietatea că pentru orice $m \geq n(\delta)$ şi $n \geq n(\delta)$ avem

$$||f_m(t) - f_n(t)|| < \delta$$

pentru orice $t \in T \setminus A_\varepsilon$).

Propoziţia 10.

Fie $f_n \underset{n}{\overset{\rho u}{\longrightarrow}} f$*. Atunci* $(f_n)_n$ *este aproape uniform Cauchy .*

Aproape uniform convergenţa este mai puternică decât convergenţa a.p.t. şi convergenţa în măsură, după cum arată şi teorema următoare :

Teorema 11.

Fie $(f_n)_n$ *un şir din* $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$ *şi* $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$.

1. Dacă $f_n \overset{\rho u}{\underset{n}{\to}} f$, *atunci* $f_n \underset{n}{\to} f$ μ *- a.p.t.*

2. Dacă $f_n \overset{\rho u}{\underset{n}{\to}} f$, *atunci* $f_n \overset{\rho}{\underset{n}{\to}} f$.

Propoziţia 12.

1. Dacă $f_n \overset{\rho u}{\underset{n}{\to}} f$ *şi* $f = g$ μ *- a.p.t., atunci* $f_n \overset{\rho u}{\underset{n}{\to}} g$.

2. Dacă $f_n \overset{\rho u}{\underset{n}{\to}} f$ *şi* $f_n \overset{\rho u}{\underset{n}{\to}} g$, *atunci* $f = g$ μ *- a.p.t..*

Următorul rezultat arată că $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$, este "complet" relativ la ρ - aproape uniform covergenţa.

Teorema 13.

Fie $(f_n)_n$ *un şir în* $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente :*

1. $(f_n)_n$ *este* ρ *- aproape uniform Cauchy.*

2. $(f_n)_n$ *este* ρ *- aproape uniform convergent.*

(adică există $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$ *astfel încât* $f_n \overset{\rho u}{\underset{n}{\to}} f$*).*

Corolar 14.

Fie $(f_n)_n$ *un şir în* $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$ *şi* $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$ *astfel încât* $(f_n)_n$ *este* ρ *- aproape uniform Cauchy şi* $f_n \underset{n}{\to} f$ μ *- a.p.t..*

Atunci $f_n \overset{\rho u}{\underset{n}{\to}} f$.

Teorema 15.

Presupunem ρ $R - F$. *Fie* $(f_n)_n$ *un şir Cauchy în* ρ *- măsură din* $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$. *Atunci există un subşir* $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ *şi o funcţie* $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$ *astfel încât* $f_{n_k} \overset{\rho u}{\underset{k}{\to}} f$.
(prin urmare $f_{n_k} \underset{k}{\to} f$ μ *- a.p.t şi* $f_{n_k} \overset{\rho}{\underset{k}{\to}} f$*.)*

Teorema 15 este foarte importantă. Vom prezenta în continuare câteva consecinţe ale sale. Insistăm asupra faptului că ρ $R - F$.

Prima consecinţă este Teorema 16, care ne arată că $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$, împreună cu convergenţa în ρ - măsură, este "complet" (analogia Teoremei Slutsky). Demonstraţia rezultă imediat din Teorema 15 şi Propoziţia 5.

Teorema 16.

Presupunem ρ $R - F$ şi fie $(f_n)_n$ un şir în $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente :

1. *Şirul $(f_n)_n$ este convergent în ρ - măsură (adică există $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$ astfel încât $f_n \underset{n}{\overset{\rho}{\rightarrow}} f$).*

2. *Şirul $(f_n)_n$ este Cauchy în ρ - măsură.*

A doua consecinţă a Teoremei 15 este Teorema 17, care leagă convergenţa în spaţiul seminormat Köthe $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ de alte tipuri de convergenţă .

Teorema 17.

Presupunem ρ $R-F$ şi fie $(f_n)_n$ un şir în $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ iar $f \in \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ cu proprietatea că $f_n \underset{n}{\rightarrow} f$ în $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$.

Atunci există un subşir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ astfel încât $f_{n_k} \underset{k}{\overset{\rho u}{\rightarrow}} f$ (prin urmare $f_{n_k} \underset{k}{\rightarrow} f$ μ - a.p.t. şi $f_{n_k} \underset{k}{\overset{\rho}{\rightarrow}} f$).

Transpunând (parţial) acest rezultat de la $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ la $L_\rho(\mathcal{A}, \mu)$ obţinem următorul rezultat similar cu o proprietate clasică.

Teorema 18.

Presupunem ρ $R-F$ şi fie $(\tilde{f}_n)_n$ un şir în $L_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ iar $\tilde{f} \in L_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ cu proprietatea că $\tilde{f}_n \underset{n}{\rightarrow} \tilde{f}$ în $L_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$.

Atunci există un subşir $(\widetilde{f_{n_k}})_k \subset (\tilde{f}_n)_n$ astfel încât $f_{n_k} \underset{k}{\rightarrow} f$ μ - a.p.t., pentru orice $f_{n_k} \in \tilde{f}_{n_k}$ şi $f \in \tilde{f}$.

3. OPERATORI LINIARI ŞI CONTINUI PE SPAŢII KÖTHE DE CÂMPURI DE VECTORI

3.1. REMARCĂ INTRODUCTIVĂ.

Începem cu o remarcă cu caracter general privind operatorii liniari şi continui.

Fie X un spaţiu seminormat cu seminorma p şi Y un spaţiu normat cu norma $|| \, ||$. Notăm, ca de obicei

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{V : X \to Y \mid V \text{ liniar şi continuu}\}.$$

Atunci $\mathcal{L}(X, Y)$ este spaţiu vectorial peste acelaşi corp $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ ca şi spaţiile X, Y (cu operaţiile definite punctual).

Se arată că operatorul liniar $V : X \to Y$ este continuu dacă şi numai dacă există $0 < M < \infty$ cu proprietatea că

$$||V(x)|| \leq Mp(x)$$

pentru orice $x \in X$. Echivalent, V este continuu dacă şi numai dacă este continuu în 0, adică pentru orice şir $(x_n)_n$ din X cu $x_n \underset{n}{\to} 0$, avem $V(x_n) \underset{n}{\to} 0$.

De fapt $\mathcal{L}(X, Y)$ devine spaţiu normat cu norma operatorială:

$$||V|| = \sup\{ \, ||V(x)|| \mid x \in X, \ p(x) \leq 1\}.$$

Dacă Y este Banach, atunci şi $\mathcal{L}(X, Y)$ este Banach.

Spaţiul X pune în evidenţă *spaţiul nul al seminormei p*, care este

$$Ker(p) = \{x \in X \mid p(x) = 0\}.$$

Subspaţiul vectorial $Ker(p)$ al lui X este nul (adică $Ker(p) = \{0\}$) dacă şi numai dacă p este normă.

Putem factoriza :

$$X/_{Ker(p)} = \widetilde{X}.$$

Vom nota elementele spaţiului vectorial $\widetilde{X}$ astfel : $\widetilde{x}$ (adică $\widetilde{x}$ este clasa de echivalenţă a lui x).

Se arată că $\widetilde{X}$ devine (în mod canonic) spaţiu normat cu norma

$$|||\widetilde{x}||| \overset{def}{=} p(x)$$

pentru orice $x \in \widetilde{x}$.

Spaţiul $\widetilde{X}$ este Banach dacă şi numai dacă X este spaţiu semimetric complet, adică pentru orice şir Cauchy $(x_n)_n$ din X, există (cel puţin un) $x \in X$ astfel încât $x_n \underset{n}{\to} x$.

Acum să considerăm $V \in \mathcal{L}(X, Y)$. Putem defini $\widetilde{V} : \widetilde{X} \to Y$, după cum urmează: pentru orice $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$

$$\widetilde{V}(\widetilde{x}) \stackrel{def}{=} V(x)$$

pentru orice $x \in \widetilde{x}$. Definiţia este coerentă : dacă $x \in \widetilde{x},\ y \in \widetilde{x}$, atunci $x - y \in Ker(p)$, deci

$$||V(x) - V(y)|| = ||V(x - y)|| \leq Mp(x - y) = 0.$$

Se constantă că $\widetilde{V} \in \mathcal{L}(\widetilde{X}, Y)$ şi anume

$$||\widetilde{V}|| = ||V||.$$

Invers, fie $H \in \mathcal{L}(\widetilde{X}, Y)$, deci există $0 < M < \infty$ astfel încât

$$||H(\widetilde{x})|| \leq M \ \ |||\widetilde{x}|||$$

pentru orice $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$.

Definind $V : X \to Y$, prin

$$V(x) \stackrel{def}{=} H(\widetilde{x})$$

se vede că $V \in \mathcal{L}(X, Y)$ şi anume

$$||V|| = ||H||.$$

Cele de mai sus se pot formaliza în

Teorema 21.

Cu notaţiile de mai sus, spaţiile $\mathcal{L}(X, Y)$ şi $\mathcal{L}(\widetilde{X}, Y)$ sunt spaţii normate izomorfe liniar şi izometeric, prin izomorfismul :

$$\Omega : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(\widetilde{X}, Y)$$

$$\Omega(V) = \widetilde{V}.$$

Vom aplica cele de mai sus pentru :

$$X = \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$$

$$Y = F = \text{un spaţiu Banach.}$$

Mai precis, vom considera cadrul care generează spaţiul Köthe de câmpuri de vectori $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ (v. cap 2). Deasemenea, vom considera un spaţiu Banach F. În cazul de unicitate $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ avem $\mathcal{A} \equiv E$ (v. cap. 2) şi $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A}) = \mathcal{L}_\rho(E, \mu)$. Aşa după cum am mai spus, $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ este seminormat cu seminorma

$$x \mapsto \rho|x| = p|x|.$$

Avem

$$Ker(p) = \{x \in \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}) \mid p(x) = \rho|x| = 0\} =$$
$$= \{x \in \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}) \mid x(t) = 0 \ \mu - a.p.t.\}$$
$$= \{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A},\mu) \mid x(t) = 0 \ \mu - a.p.t.\}.$$

Atunci :

$$\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A})/_{Ker(p)} = L_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A})$$

normat cu norma

$$\widetilde{x} \mapsto \rho|x| = p|x|$$

pentru orice $x \in \widetilde{x}$.

Conform celor discutate avem

Teorema 22.

Spaţiile $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}),F)$ *şi* $\mathcal{L}(L_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}),F)$ *sunt izomorfe liniar şi izometric prin izomorfismul*

$$\Omega : \mathcal{L}(\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}),F) \to \mathcal{L}(L_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}),F)$$
$$\Omega(V) = \widetilde{V}.$$

Având în vedere acest fapt, vom studia operatorii liniari şi continui :

$$V : \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}) \to F.$$

3.2. REPREZENTĂRI INTEGRALE

Introducem câteva notaţii folosite în cele ce urmează. Cadrul de lucru este cel din cap. 2, când am introdus spaţiile $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{A})$.

Notăm

$$\mathcal{C}(\rho) = \{A \in \mathcal{T} \mid \rho(A) < \infty\}.$$

Se vede că $\mathcal{C}(\rho)$ este $\rho -$ inel (semitrib), adică $\mathcal{C}(\rho)$ este inel (clan) cu proprietatea că intersecţia oricărui şir de mulţimi din $\mathcal{C}(\rho)$ este şi ea o mulţime din $\mathcal{C}(\rho)$.

Un *câmp simplu de vectori* este un câmp de forma

$$x = \sum_{i=n}^{n} \varphi_{A_i} x_i.$$

unde $A_i \in \mathcal{C}(\rho)$ sunt mutual disjuncte ($A_i \cap A_j = \varnothing$, dacă $i \neq j$) şi $x_i \in \mathcal{A}$.

Notăm cu $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{A})$ mulţimea câmpurilor simple. Evident $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{A})$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

În cazul de unicitate $\mathcal{C}(E)$ am identificat $\mathcal{A} \equiv E$, deci elementele din $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{A}) \stackrel{def}{=} \mathcal{E}_\rho(E)$ au forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i$$

cu $A_i \in \mathcal{C}(\rho)$ mutual disjuncte şi $x_i \in E$.

Şi mai particular, dacă $E = K$, notăm $\mathcal{E}_\rho(K) \stackrel{def}{=} \mathcal{E}_\rho$.

Se vede că, deoarece $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$, avem $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$.

De cele mai multe ori, în cele ce urmează, vom accepta

Presupunerea 1.

Avem $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{A})$.

Observaţie. Presupunerea 1 este automat verificată în cazul de uniciatate $\mathcal{C}(E)$.

De acum înainte, în cadrul acestui paragraf, vom accepta Presupunerea 1.

Teorema de reprezentare integrală va putea fi dată acceptând o ipoteză de lucru mai tare decât Presupunerea 1, anume

Presupunerea 2.

Spaţiul $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{A})$ *este dens în* $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$.

Observaţie importantă: Presupunerea 2 este verificată în următoarea situaţie

- suntem în *cazul de unicitate* $\mathcal{C}(E = K)$, adică lucrăm pe spaţiul $\mathcal{L}_\rho$;

- norma funcţională *ρ este de tip absolut continuu*, adică : pentru orice şir $(u_n)_n \subset M_+(\mu)$, cu $\rho(u_n) < \infty$ şi $(u_n)_n$ descrescător la 0, avem

$$\lim_n \rho(u_n) = \inf_n \rho(u_n) = 0 \text{ (v. [3])}.$$

De exemplu, dacă $1 \leq p < \infty$, normele funcţinale $|| \, ||_p$ sunt de tip absolut continuu, ceea ce nu este cazul în general pentru $|| \, ||_\infty$ (v. [3]).

Teorema 23 (Teorema de reprezentare integrală).

Acceptăm Presupunerea 2.

Atunci spaţiile Banach $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A}), F)$ *cu norma operatorială* $||V||$ *şi* $M_F(\mathcal{A}, \rho)$ *cu norma* $||m||$ *sunt liniar şi izometric izomorfe, prin izomorfismele :*

$$\begin{cases} a : \mathcal{L}(\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}),F) \to M_F(\mathcal{A},\rho) \\ a(V) = m, \textit{ unde} \\ m(A)(x) = V(\varphi_A x), \textit{ pentru orice } A \in \mathcal{C}(\rho), x \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b : M_F(\mathcal{A},\rho) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}),F) \\ b(m) = V, \textit{ unde} \\ V(f) = \lim_n \int f_n dm \textit{ , pentru orice } f \in \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}). \end{cases}$$

Aici, $(f_n)_n \subset \mathcal{E}_\rho(\mathcal{A})$ *este un şir cu proprietatea* $f_n \underset{n}{\to} f$ *în* $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A})$*.*

În plus, a şi b sunt izomorfisme inverse unul altuia.

3.3. OPERATORI CU PROPRIETĂŢI SPECIALE

În tot cursul acestui paragraf vom accepta Presupunerea 1.

Fie $V : \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}) \to F$ un operator liniar şi continuu. Aşadar

$$||V|| = \sup\{\ ||V(f)||\ |\ f \in \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E},\mathcal{A}),\ \rho|f| \le 1\} < \infty.$$

Introducem $||V||_1$ şi $|||V|||$.

$$||V||_1 = \sup\{\ ||V(f)||\ |\ f \in \mathcal{E}_\rho(\mathcal{A}),\ \rho|f| \le 1\}.$$

Aşadar :

$$||V||_1 = \sup\{\ ||\sum_{i=1}^n V(\varphi_{A_i} x_i)||\ |\ f = \sum_{i=1}^n \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{E}_\rho(\mathcal{A}),\ \rho|f| \le 1\}.$$

Evident

$$||V||_1 \le ||V|| < \infty.$$

Acum introducem

$$|||V||| = \sup\{\sum_{i=1}^n\ ||\ V(\varphi_{A_{ix_i}})||\ |\ f = \sum_{i=1}^n \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{E}_\rho(\mathcal{A}),\ \rho|f| \le 1\}.$$

Evident :

$$||V||_1 \le |||V|||.$$

Din definiţie rezultă că, pentru orice câmp $f = \sum_{i=1}^n \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{E}_\rho(\mathcal{A})$, avem :

$$||\sum_{i=1}^n V(\varphi_{A_i} x_i)|| \le ||V||_1\ \rho|f|$$

$$\sum_{i=1}^n ||\ V(\varphi_{A_i} x_i)\ || \le |||\ V\ |||\ \ \rho|f|.$$

Exemplu. Vom lucra în cazul de unicitate $\mathcal{C}(E)$.

Revenim la cazul general. Vom vedea că în cazul $F = K$ (deci V este o funcţională liniară continuă), avem $||| \ V \ ||| = || \ V \ ||_1 < \infty$.

<u>**Teorema 24.**</u>

Fie $V : \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \to K$ *o funcţională liniară şi continuă.*

Atunci $||| \ V \ ||| = || \ V \ ||_1 < \infty$.

Dacă acceptăm Presupunerea 2, rezultă că, pentru orice operator liniar şi continuu $V : \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \to F$, avem

$$||V||_1 = ||V||$$

cu o teoremă de densitate care a mai fost folosită.

<u>**Teorema 25**</u>.

Acceptăm Propunerea 2.

1. *Fie* $V : \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \to F$ *un operator liniar şi continuu. Atunci :*

$$||V|| \leq |||V|||.$$

2. *Fie* $V : \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \to K$ *o funcţională liniară şi continuă. Atunci :*

$$||V|| = |||V|||.$$

În continuare, vom introduce operatorii dominanţi.

Funcţionala liniară $H : \mathcal{L}_\rho \to K$ se numeşte <u>*pozitivă*</u> dacă $H(f) \geq 0$, pentru orice $0 \leq f \in \mathcal{L}_\rho$. Rezultă $H(f) \geq H(g)$, dacă $f \geq g$ μ- a.p.t. .

<u>**Teorema 26**</u>.

Se presupune ρ $R - F$. *Fie* $H : \mathcal{L}_\rho \to K$ *funcţională (liniară) pozitivă.*

Atunci H *este continuă.*

<u>**Definiţia 27**</u>. Un operator liniar $V : \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \to F$ se numeşte <u>*dominat*</u> dacă există o funcţională (liniară) pozitivă $H : \mathcal{L}_\rho \to K$ cu proprietatea că, pentru orice $f \in \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$, avem :

$$||V(f)|| \leq H(|f|).$$

(în acest caz spunem că <u>*V este dominat de H*</u> sau <u>*H domină V*</u>).

<u>**Teorema 28**</u>.

Se presupune ρ *R-F. Şi fie* $V : \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \to F$ *un operator liniar dominat. Atunci* V

este continuu.

În cele ce urmează ne propunem să studiem legătura între $|||V|||$ şi dominarea operatorului V. O implicaţie este dată de :

Teorema 29.

Fie $V : \mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \to F$ *un operator dominat. Atunci* $|||\ V\ ||| < \infty$.

Ne punem problema dacă implicaţia inversă este adevărată. Vom putea da un răspuns parţial (adică în condiţii mai restrictive) la această întrebare.

Rezultatul care urmează (reciproca parţială) va fi dat în cazul de unicitate $\mathcal{C}(E)$. Vom nota $|x|$ în loc de $||x||$ pentru $x \in E$ şi $|y|$ în loc de $||y||$ pentru $y \in F$.

Teorema 30.

Se lucrează în cazul de unicitate $\mathcal{C}(E)$.

Presupunem că ρ *este de tip absolut continuu şi acceptăm Presupunerea* 2.

Fie $V : \mathcal{L}_\rho(E, \mu) \to F$ *liniar şi continuu. Dacă* $|||V||| < \infty$, *rezultă că* V *este dominat.*

Folosind rezultatele precedente, avem

Teorema 31.

Se lucrează în cazul de unicitate $\mathcal{C}(E)$.

Presupunem că ρ *este de tip absolut continuu şi acceptăm Presupunerea* 2.

Fie $V : \mathcal{L}_\rho(E, \mu) \to F$ *liniar şi continuu.Atunci* V *este dominat dacă şi numai dacă* $|||V||| < \infty$.

Remarcă: Modul de lucru privind definirea măsurii ν se leagă de teoria măsurilor vectoriale. Anume, ν este *variaţia măsurii vectoriale m*.

Se constată legătura între teoria operatorilor V, cu $|||V||| < \infty$ şi teoria integralei vectoriale în raport cu măsurile cu variaţie finită.

3.4. OPERATORI GENERAŢI DE CÂMPURI DE OPERATORI

Acceptăm cadrul de lucru din cap 2, folosit la definirea spaţiilor $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ şi $\mathcal{L}_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A})$. Fie şi F un spaţiu Banach.

Pentru orice $t \in T$, notăm $\mathcal{L}(E_t, F) = G_t$ (dacă $F = K$, avem $G_t = E'_t$). Deasemenea, notăm $\mathcal{G}_F = (G_t)_{t\in T}$. Dacă $F = K$, vom nota astfel:
$\mathcal{G}_k = (E'_t)_{t\in T} \overset{def}{=} \mathcal{E}'$.

Prin urmare, putem considera *spaţiul de câmpuri de operatori* :

$$\mathcal{C}(\mathcal{G}_F) = \{U : T \to \bigcup_{t\in T} \mathcal{G}_t \mid U(t) \in G_t \text{ pentru orice } t \in T\}$$

(dacă $F = K$ avem spaţiul

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}') = \{U : T \to \bigcup_{t\in T} E'_t \mid U(t) \in E'_t \text{ pentru orice } t \in T\}).$$

Definiţia 32. Fie $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$.

Spunem că U este *slab μ- măsurabil* (respectiv *simplu μ- măsurabil*) dacă : pentru orice $x \in \mathcal{A}$ şi orice $y' \in F'$, funcţia $y'(Ux) : T \to K$, definită prin

$$y'(Ux)(t) = y'(U(t)(x(t)))$$

(respectiv pentru orice $x \in \mathcal{A}$, funcţia $Ux : T \to F$, definită prin

$$Ux(t) = U(t)(x(t))$$

este μ- măsurabilă.

Proprietatea se transferă de la $\mathcal{A}$ la întreg spaţiul $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$:

Teorema 33.

Fie $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$. Atunci U este slab μ- măsurabil (respectiv simplu μ- măsurabil) dacă şi numai dacă pentru orice $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$ şi orice $y' \in F'$ (respectiv pentru orice $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mu)$) funcţia $y'(Ux)$ (respectiv funcţia Ux) este μ- măsurabilă.

Evident că orice câmp U simplu μ- măsurabil este şi slab μ- măsurabil. Reciproca nu este adevărată în general. Un caz când reciproca este corectă este dat de:

Teorema 34.

Se presupune că F este spaţiu separabil (de tip numărabil). Atunci, un câmp de operatori $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_\mathcal{F})$ este simplu μ- măsurabil dacă şi numai dacă este slab μ- măsurabil.

În particular, luând $F = K$: a spune că $U \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ este simplu μ- măsurabil, înseamnă a spune că U este slab μ- măsurabil.

În continuare, vom genera cu ajutorul unui câmp de operatori $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$ un operator liniar şi continuu $H_U : L_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \to L_\rho(F, \mu)$.

Fie $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_F)$. Să presupunem că U este *simplu μ- măsurabil şi mărginit* (adică $\sup\limits_{t \in T} ||u(t)|| = M < \infty$).

Vom mai presupune că ρ $R-F$, ceea ce implică faptul că $L_\rho(F, \mu)$ este spaţiu Banach (dacă $F = K$, rezultă că L_ρ este spaţiu Banach).

Teorema 35.

În condiţiile de mai sus, avem operatorul liniar şi continuu

$H_U : L_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \to F_\rho(F, \mu)$, *definit prin* $H_U(\widetilde{x}) = \widetilde{Ux}$ *şi :*

$$||H_U|| \leq M = \sup_{t \in T} ||U(t)||.$$

În particular, dacă $F = K$, avem operatorul liniar şi continuu

$H_U : L_\rho(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \to L_\rho$, *definit prin* $H_U(\widetilde{x}) = \widetilde{Ux}$.

Definiţia 36. În condiţiile teoremei de mai sus, vom numi pe H_U *operatorul generat de câmpul de operatori U*.

Exemplu : Vom explica modul de construcţie descris mai sus, lucrând în cadrul de la Exemplul 20, capitolul 2.

4. ANEXĂ

LEGĂTURA CU TEORIA VARIETĂŢILOR DIFERENŢIABILE

Teoria prezentată până acum poate fi receptată în mod independent, aşa cum am procedat. Pe de altă parte, noţiunile şi unele din rezultatele prezentate pot fi încadrate în teoria varietăţilor diferenţiabile, finit sau infinit dimensionale. Vom prezenta această încadrare, care este foarte naturală (eventual obligatorie, din punctul de vedere al geometrilor) urmând, în linii mari, monografia $[3]_{\mathrm{A}}$. Se pot consulta şi tratatele $[1]_{\mathrm{A}}$, $[2]_{\mathrm{A}}$.

4.1. DEFINIŢIA VARIETĂŢILOR DIFERENŢIABILE. PROPRIETĂŢI FUNDAMENTALE. EXEMPLE.

Înainte de a prezenta definiţia fundamentală, vom introduce câteva noţiuni şi notaţii care vor fi folosite în mod curent.

Pentru o funcţie *injectivă* $f : A \to B$ (A, B, nevide), *inversa generalizată* este funcţia $f^{-1} : f(A) \to A$, definită prin $f^{-1}(b) = a$, unde a este unic determinat de condiţia $f(a) = b$. Se vede că f^{-1} este bijecţie.

Dacă X, Y, Z, $A \subset X$, $B \subset Y$ sunt mulţimi nevide şi $f : A \to Y$, $g : B \to Z$ sunt astfel încât $f(A) \subset B$, putem defini *compunerea generalizată* $g \circ f : A \to Z$, prin $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Definiţie. Fie $(M, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic ($M \neq \emptyset$) şi E un spaţiu
Banach ($E \neq \emptyset$).

1. Numim *E-atlas pe M* o familie $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ cu proprietatea că, pentru orice $i \in I$, avem:

a) $\emptyset \neq U_i \in \mathcal{T}$ (deci $U_i \in M$);

b) $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = M$ (deci $(U_i)_{i \in I}$ este o acoperire deschisă a lui M);

c) $\varphi_i : U_i \to E$ este injecţie continuă astfel încât $\varphi_i(U_i)$ este deschisă şi homeomorfism, unde $h_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ este definită prin

$$h_i(x) = \varphi_i(x)$$

(adică φ_i este homeomorfism pe imagine).

În plus, pentru orice i şi j din I, astfel încât $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, avem că

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

este difeomorfism de clasă $\mathscr{C}^\infty$.

Numim pe E *spaţiul parametrilor lui M* sau *modelul lui M*. În acest caz, fiecare φ_i se numeşte *hartă locală* sau *sistem de coordonate locale*, iar U_i se numeşte *domeniul hărţii φ_i*. Dacă $m \in U_i$, spunem că φ_i este *hartă în jurul lui m*.

Difeomorfismele $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ se numesc *schimbări de hărţi locale* sau *schimbări de coordonate locale*.

2. Un triplet $(M, E, \mathcal{A})$, unde $(M, \mathcal{T})$ este un spaţiu topologic, E este un spaţiu Banach şi $\mathcal{A}$ este un E-atlas pe M, se numeşte *varietate diferenţiabilă modelată pe E*. Mai scurt, spunem că M este *varietate diferenţiabilă*.

Dacă E are dimensiune finită, spunem că M este varietate diferenţiabilă *finit dimensională* (dimensiunea lui M este prin definiţie egală cu dimensiunea lui E).

Comentarii şi completări legate de definiţie

A. Dacă $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt două E-atlase pe M, spunem că $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt *echivalente* (şi vom scrie $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$), dacă $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ este E-atlas pe M. Pe mulţimea E-atlaselor, relaţia $\sim$ este o relaţie de echivalenţă.

În acest context, unii autori numesc *varietate diferenţiabilă modelată pe E* un triplet $(M, E, \widetilde{\mathcal{A}})$, unde M este un spaţiu topologic, E este un spaţiu Banach şi $\widetilde{\mathcal{A}}$ este o clasă de echivalenţă de E-atlase pe M. În mod practic se lucrează cu un atlas fixat din clasă.

B. Noi am cerut în definiţia varietăţii, *din start*, ca M să fie spaţiu topologic. Mai mult, unii autori cer ca spaţiul topologic M să fie separat (v. $[1]_{\mathrm{A}}$). În acest sens, remarcăm următoarele:

Se poate da o "definiţie mai generală a varietăţilor diferenţiabile". Anume, se consideră o mulţime nevidă M (netopologizată), şi un spaţiu Banach E. Numim *hartă pe M* o funcţie $h : U \to E$, unde $\emptyset \neq U \subset M$ şi h este injecţie cu proprietatea că $h(U)$ este deschisă. Două hărţi h_1 şi h_2 se numesc *compatibile* dacă $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, mulţimile

$h_1(U_1 \cap U_2)$ şi $h_2(U_1 \cap U_2)$ sunt deschise şi aplicaţiile

$$h_2 \circ h_1^{-1} : h_1(U_1 \cap U_2) \to h_2(U_1 \cap U_2),$$
$$h_1 \circ h_2^{-1} : h_2(U_1 \cap U_2) \to h_1(U_1 \cap U_2),$$

sunt difeomorfisme de clasă $\mathscr{C}^\infty$.

Numim *E-atlas pe M* o familie $(U_i, h_i)_{i \in I}$, unde $h_i : U_i \to E$ sunt hărţi două câte două compatibile, astfel încât

$$\bigcup_{i \in I} U_i = M.$$

Numim *varietate diferenţiabilă generalizată modelată pe E*, un triplet $(M, E, \mathcal{A})$ unde $M \neq \emptyset$, E este spaţiu Banach şi $\mathcal{A}$ este E-atlas pe M.

Această definiţie reproduce definiţia de mai sus, cu excepţia faptului că nu se cere ca M să fie spaţiu topologic. Obţinem însă topologizarea automată a lui M, după cum arată (v. $[2]_{\mathrm{A}}$) următoarea

Propozitie.

În condiţiile de mai sus (adică $(M, E, \mathcal{A})$ este o varietate diferenţială generalizată modelată pe E), se poate introduce pe M o topologie $\mathcal{T}_g$ cu proprietatea că mulţimile U_i sunt deschise (adică $U_i \in \mathcal{T}_g$ pentru orice $i \in I$) şi h_i sunt homeomorfisme pe imagine (mai precis, funcţiile $u_i : U_i \to h(U_i)$, definite prin $u_i(x) = h_i(x)$, sunt homeomorfisme).

În mod precis, avem

$\mathcal{T}_g = \{\emptyset\} \cup \{D \mid \emptyset \neq D \subset M, h_i(D \cap U_i)$ *deschisă în E pentru orice $i \in I$*$\}$.

Aşadar, cu topologia $\mathcal{T}_g$, $(M, E, \mathcal{A})$ devine varietate diferenţiabilă modelată pe E în sens clasic.

Teoremă.

Fie M o mulţime nevidă, E un spaţiu Banach şi $\mathcal{A} = (U_i, h_i)_{i \in I}$ un E-atlas pe M în sensul definiţiei noţiunii de varietate diferenţiabilă generalizată modelată pe E.

Se construieşte în acest mod topologia $\mathcal{T}_g$ şi $(M, E, \mathcal{A})$ devine varietate modelată pe E în sens clasic cu topologia $\mathcal{T}_g$.

De asemenea, se consideră o topologie $\mathcal{T}$ pe M.

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) *Avem* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_g$.

2) *Hărţile lui* $\mathcal{A}$ *sunt homeomorfisme pe imagine în topologia* $\mathcal{T}$ (*adică pentru orice* $i \in I$ *avem* $U_i \in \mathcal{T}$ *şi aplicaţia* $u_i : U_i \to h_i(U_i)$, $u_i(x) = h_i(x)$ *este homeomorfism dacă pe* M *avem topologia* $\mathcal{T}$.)

Aserţiunea 2) *spune că* $(M, E, \mathcal{A})$ *devine varietate diferenţiabilă modelată pe* E *în sens clasic cu topologia* $\mathcal{T}$.

4.2. APLICAŢII DIFERENŢIABILE. CURBE. VECTORI TANGENŢI. SPAŢIU TANGENT. APLICAŢIE TANGENTĂ

Pentru a introduce aplicaţiile diferenţiabile între varietăţi diferenţiabile, vom avea nevoie de o altă notaţie.

Să considerăm două varietăţi diferenţiabile $(M, E, \mathcal{A})$ şi $(M', E', \mathcal{A}')$ şi o aplicaţie $G : M \to M'$. Fie şi $m \in M$ şi să presupunem că G *este continuă în* m.

Considerăm o hartă $\varphi : U \to E$ a lui $(M, E, \mathcal{A})$ (scriem prin abuz $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$) astfel încât $m \in U$ (adică φ este hartă în jurul lui m) şi o hartă $\varphi' : U' \to E'$ a lui $(M', E', \mathcal{A}')$ (scriem prin abuz $(U', \varphi') \in \mathcal{A}'$) astfel încât $G(m) \in U'$ (adică φ' este hartă în jurul lui $G(m)$). Deoarece G este continuă în m, rezultă că $G^{-1}(U')$ este vecinătate deschisă a lui m, deci $U \cap G^{-1}(U')$ este vecinătate deschisă a lui m.

Atunci $\varphi(U \cap G^{-1}(U'))$ este mulţime deschisă. Deoarece avem
$\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$, rezultă că pentru orice $x \in \varphi(U \cap G^{-1}(U'))$ avem
$\varphi^{-1}(x) \in U \cap G^{-1}(U')$, deci $G(\varphi^{-1}(x)) \in U'$ şi putem calcula $\varphi'(G(\varphi^{-1}(x)))$. Prin urmare, putem defini funcţia

$$G(\varphi', \varphi) : \varphi(U \cap G^{-1}(U')) \to E'$$

dată prin

$$G(\varphi', \varphi)(x) = \varphi'(G(\varphi^{-1}(x)))$$

(se vede că $G(\varphi', \varphi)(\varphi(U \cap G^{-1}(U'))) \subset U'$).

Vom nota şi (mai natural)

$$\varphi' \circ G \circ \varphi^{-1} \overset{def.}{=} G(\varphi', \varphi).$$

Se vede că dacă avem şi varietatea diferenţiabilă $(M'', E'', \mathcal{A}'')$ şi funcţia $H : M' \to M''$ continuă în $G(m)$, putem calcula, folosind o hartă

$$\varphi'' : U'' \to E'' \quad \text{cu} \quad H(G(m)) \in U''$$

$$\varphi'' \circ H \circ (\varphi')^{-1} = H(\varphi'', \varphi') = \varphi'' \circ H \circ (\varphi')^{-1}.$$

Folosind compunerea generalizată şi vecinătăţi corespunzătoare, avem relaţiile formale

$$H(\varphi'', \varphi') \circ G(\varphi', \varphi) = (H \circ G)(\varphi'', \varphi)$$

sau

$$(\varphi'' \circ H \circ (\varphi')^{-1}) \circ (\varphi' \circ G \circ \varphi^{-1}) = \varphi'' \circ (H \circ G) \circ \varphi.$$

Definiţia următoare generalizează definiţia aplicaţiilor diferenţiabile între mulţimi deschise din spaţii Banach.

Definiţie. În condiţiile de mai sus, fie $G : M \to M'$ o aplicaţie *continuă*. Vom spune că G este *diferenţiabilă* dacă, pentru orice $m \in M$, există o hartă $h : U \to E$ cu $m \in U$ şi o hartă $\varphi' : U' \to E'$ cu $G(m) \in U'$ astfel încât $G(\varphi', \varphi) = \varphi' \circ G \circ \varphi$ este diferenţiabilă de clasă $\mathscr{C}^\infty$.

Dacă, în plus, G este bijectivă şi G^{-1} este diferenţiabilă, spunem că G este un *difeomorfism*.

Dacă există un difeomorfism $G : M \to M'$, spunem că M şi M' sunt *difeomorfe*.

Notaţie: $\mathrm{Hom}(M, M') = \{G : M \to M' \mid G \text{ este diferenţiabilă}\}$.

Prin urmare, dacă $G \in \mathrm{Hom}(M, M')$ şi $H \in \mathrm{Hom}(M', M'')$, rezultă că
$H \circ G \in \mathrm{Hom}(M, M'')$.

În cazul în care M este un interval deschis şi M' este o varietate oarecare, obţinem drept aplicaţii diferenţiabile *curbele*. În acest sens, definiţia pe care o vom prezenta diferă de definiţia folosită în mod curent (adică: a) O funcţie continuă $\gamma : [a, b] \to X$ unde X este un spaţiu topologic, se numeşte *drum*. b) O clasă de echivalenţă se numeşte *curbă*).

Definiţie. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis (nevid) şi $p : I \to M$. Vom spune că p este o *curbă* dacă p este aplicaţie diferenţiabilă (se consideră că I este submulţime deschisă a spaţului normat $\mathbb{R}$, cu norma dată de modul).

Convenţie:

În cele ce urmează, vom considera că $0 \in I$. Dacă $p : I \to M$ este o curbă şi $p(0) = m$, vom spune că p este o *curbă prin m*.

Fie acum $(M, E, \mathcal{A})$ o varietate diferenţială şi $m \in M$.

Notăm

$$\mathscr{D}(m) = \{f \mid \exists\, U \subset M \text{ deschisă, } m \in U \text{ astfel încât}$$

$$f : U \to \mathbb{R} \text{ şi } f \text{ este diferenţiabilă}\}.$$

Pe $\mathscr{D}(m)$ definim o relaţie de echivalenţă, după cum urmează. Fie $f : U \to \mathbb{R}$ şi $g : V \to \mathbb{R}$ elemente din $\mathscr{D}(m)$. Atunci, spunem că f şi g sunt *echivalente* (şi scriem $f \sim g$) dacă există $W \subset M$, W deschisă, astfel încât $m \in W \subset U \cap V$ şi $f|_W = g|_W$.

Notăm $G(m) = \mathscr{D}(m)|_\sim$. Elementele lui $G(m)$ se numesc *germeni* (*în jurul lui m*). Anume, dacă $f \in \mathscr{D}(m)$, notăm cu $\gamma(f)$ clasa de echivalenţă a lui f. Deci $\gamma(f) \in G(m)$ şi $\gamma(f)$ se numeşte *germenele lui f*.

Evident $G(m)$ este *algebră reală*, cu operaţii definite pe reprezentanţi:

$$\gamma(f) + \gamma(g) = \gamma(f + g);$$

$$\alpha\gamma(f) = \gamma(\alpha f);$$

$$\gamma(f)\gamma(g) = \gamma(f \cdot g).$$

Fie în continuare un interval deschis $I \subset \mathbb{R}$ cu $0 \in I$ şi $p : I \to M$ o curbă prin $m = p(0)$. Observăm că, dacă f şi g sunt în $\mathscr{D}(m)$, avem

$$(f \circ p)'(0) = (g \circ p)'(0)$$

şi putem defini coerent

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=0} (\gamma(f)) \overset{def}{=} (f \circ p)'(0)$$

pentru orice $f \in \gamma(f)$.

Definiţie. Cu notaţiile de mai sus, fie $p : I \to M$ o curbă prin m. *Vectorul tangent la p în m* este aplicaţia

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=0} : G(m) \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=0} (\gamma(f)) = (f \circ p)'(0)$$

pentru orice $f \in \gamma(f)$.

Definiţie şi notaţie. Fie $m \in M$. Notăm

$$TM_m = \left\{ \left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=0} \mid p \text{ curbă prin } m \right\}.$$

Numim pe TM_m *spaţiul tangent la M în m*.

Evident $TM_m \subset G(m)^*$= dualul algebric al lui $G(m)$.

Propozitie.

Pentru orice $m \in M$ avem că orice $v \in TM_m$ este o derivare pe $G(m)$, adică are proprietatea

$$v(\gamma(f), \gamma(g)) = f(m)v(\gamma(g)) + g(m)v(\gamma(f))$$

pentru orice $\gamma(f)$ şi $\gamma(g) \in G(m)$.

Remarcă: Reciproca afirmaţiei de mai sus (adică afirmaţia "orice derivare pe orice $G(m)$ este vector tangent" este falsă). Reciproca este valabilă dacă E este finit dimensional.

În continuare, vom construi *aplicaţia tangentă*.

Definiţie. În contextul de mai sus, *aplicaţia tangentă în m generată de harta φ* este aplicaţia

$$\varphi_*(m) : TM_m \to E$$

care acţionează prin

$$\varphi_*(m)\left(\left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=0} \right) = e(p). \quad (= (\varphi \circ p)'(0)).$$

De obicei, numim pe $\varphi_*(m)(v) = e(p)$ *coordonata lui v în harta φ*.

În acest moment putem enunţa precis următorul fapt: orice spaţiu TM_m este izomorf ca spaţiu normat cu E.

Teorema de identificare a spaţiului tangent cu spaţiul parametrilor

Fie $(M, E, \mathcal{A})$ o varietate diferenţiabilă modelată pe E. Fie $m \in M$. Atunci:

1. *Pentru orice hartă $\varphi : U \to E$ din $\mathcal{A}$, cu $m \in U$, aplicaţia tangentă $\varphi_*(m) : TM_m \to E$ este bijecţie liniară.*

Dacă $\psi : V \to E$ este altă hartă din $\mathcal{A}$ cu $m \in V$, avem relaţia

$$\varphi_*(m) = S \circ \psi_*(m)$$

unde $S = d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(m))$ este un izomorfism de spaţii normate de la E la E, adică este liniară, bijectivă, continuă, cu inversa (automat) continuă.

2. *În consecinţă, orice $\varphi_*(m)$ induce, prin transport de structuri, o structură de spaţiu Banach pe TM_m, care devine izomorf (ca spaţiu Banach) cu E. Izomorfismul de mai sus este dat de aplicaţia liniară bijectivă $\varphi_*(m) : TM_* \to E$ şi este caracterizat de relaţia $(**)$:*

$$v(\gamma(f)) = d(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(m))(\varphi_*(m)(v))$$

3. *Structura liniară a lui TM_m generată de izomorfismele $\varphi_*(m)$, coincide cu structura liniară dată de injecţia $TM_m \hookrightarrow G(m)^*$:*

$$(v + w)(\gamma(f)) = v(\gamma(f)) + w(\gamma(f)),$$
$$(\lambda v)(\gamma(f)) = \lambda \cdot v(\gamma(f)).$$

4.3. FIBRAT VECTORIAL. FIBRAT TRIVIAL. FIBRAT TANGENT.

Fiind dată o varietate, urmărim să construim o nouă structură de varietate cu ajutorul ei. Noţiunea de "fibrare" dă o astfel de construcţie.

Definiţie. Fie $(M, E, \mathcal{A})$ o varietate diferenţiabilă modelată pe E. Spunem că $(M, E, \mathcal{A})$ *generează o structură de fibrat vectorial pe mulţimea (nevidă) X* (sau că X este un *fibrat vectorial peste $(M, E, \mathcal{A})$*) dacă:

1. Avem o mulţime nevidă X şi o surjecţie $\pi : X \to M$ numită *proiecţia lui X pe M*, cu proprietatea că pentru orice $m \in M$, mulţimea $X_m \stackrel{def}{=} \pi^{-1}(m)$, numită *fibra lui m peste X* are structură de spaţiu Banach.

Am notat $\pi^{-1}(m) \stackrel{def}{=} \pi^{-1}(\{m\})$.

2. Avem, de asemenea, un spaţiu Banach F numit *fibra tipică a fasciculului*, o acoperire deschisă $\mathscr{U}$ a lui M, şi pentru orice $U \in \mathscr{U}$, o aplicaţie

$$t_U : \pi^{-1}(U) \to U \times F$$

astfel încât:

a) Pentru orice $U \in \mathscr{U}$, aplicaţia t_U comută cu proiecţia, adică diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "t_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times F \arrow[d, "pr_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

$pr_1((x, f)) = x$, este comutativă (i.e. $pr_1 \circ t_U = \pi$).

În această diagramă am notat (prin abuz) cu π aplicaţia $\pi_U : \pi^{-1}(U) \to U$, care acţionează prin $\pi_U(x) = \pi(x)$.

b) Pentru orice $m \in M$, identificăm $\{m\} \times F \equiv F$, prin identificarea
$(m, f) \equiv f$. Atunci, pentru orice $U \in \mathscr{U}$, cu $m \in U$, avem
$X_m = \pi^{-1}(m) \subset \pi^{-1}(U)$. Să notăm cu $(r_U)_m = t_U|_{X_m} : X_m \to U \times F$ (restricţia lui t_U la X_m).

Se cere ca $(r_U)_m(X_m) \subset \{m\} \times F \equiv F$ şi funcţia $(t_U)_m : X_m \to \{m\} \times F \equiv F$, obţinută din $(r_U)_m$ (adică $(t_U)_m(x) = (r_U)_m(x) = t_U(x)$, pentru orice $x \in X_m$) să fie izomorfism liniar.

c) Considerăm $End(F) = \mathscr{L}(E, F)$ echipat cu norma obişnuită operatorială (deci $End(F)$ este spaţiu Banach).

Atunci, pentru orice U, V din $\mathscr{U}$, astfel încât $U \cap V \neq \emptyset$, putem defini aplicaţia $t_{UV} : U \cap V \to End(F)$ prin

$$t_{UV}(m) = (t_U)_m \circ (t_V)_m^{-1}.$$

Se cere ca t_{UV} să fie de clasă $\mathscr{C}^\infty$.

<u>**Definiţie**</u>. Fie X un fibrat vectorial peste $(M, E, \mathcal{A})$, ca mai sus. Numim <u>*secţiune*</u> a acestui fibrat orice secţiune a surjecţiei π, adică orice aplicaţie $s : M \to X$, cu proprietatea $\pi \circ s = \mathbb{1}_M = id_M$.

<u>**Remarcă importantă**</u>. În cazul particular (fundamental) când $\mathscr{U} \equiv (U_i)_{i\in I}$ (unde atlasul $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ ca la început), vom considera pentru orice $i \in I$, câmpurile

$$\pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{t_{U_i}} U_i \times F \xrightarrow{\varphi_i \times \mathbb{1}_F} \varphi_i(U_i) \times F \subset E \times F$$

unde $(\varphi_i \times \mathbb{1}_F)(m, f) = (\varphi_i(m), f)$.

Atunci, se arată că $(\pi^{-1}(U_i), (\varphi_i \times \mathbb{1}_F) \circ t_{U_i})_{i\in I}$ formează un $E \times F$- <u>*atlas pe X*</u>, pentru o structură de varietate diferenţiabilă generalizată, modelată pe $E \times F$ pentru X.

• **FIBRATUL TRIVIAL**

Considerăm o varietate diferenţiabilă $(M, E, \mathcal{A})$ modelată pe E şi un spaţiu Banach F. În definiţia generală a fibratului vectorial, vom proceda în particular după cum urmează:

1. Luăm $X = M \times F$ şi $\pi : X \to M$ proiecţia definită prin $\pi((m, f)) = m$. Atunci, pentru orice $m \in M$, avem

$$X_m = \pi^{-1}(m) = \{m\} \times F = \{(m, f) \mid f \in F\} \equiv F$$

(identificare canonică prin $(m, f) \equiv f$).

2. Spaţiul Banach F (fibra tipică a fasciculului) a fost deja menţionat. Acoperirea deschisă este $\mathscr{U} = \{M\}$. Vom lua

$$t_M : \pi^{-1}(M) = M \times F \to M \times F$$
$$t_M = \mathbb{1}_{M\times F}.$$

Condiţiile a), b) şi c) se verifică imediat:

a) Evident $pr_1 \circ t_M = \pi = pr_1$.

b) Pentru orice $m \in M$, avem $(r_M)_m : X_m \to M \times F$, acţionând prin

$$(r_M)((m, f)) = t_M((m, f)) = (m, f) \in M \times F$$

adică $(t_M)_m : X_m = \{m\} \times F \equiv F \to \{m\} \times F \equiv F$ este de fapt identitatea $(t_M)_m = \mathbb{1}_{X_m}$, fiind evident izomorfism liniar.

c) Se arată că $t_{MM} : M \to End(F)$ acţionează astfel:

$$t_{MM}(m) = (t_M)_m \circ (t_M)_m^{-1} = \mathbb{1}_{X_m} \equiv \mathbb{1}_F$$

(cu identificarea $X_m \equiv F$), adică t_{MM} este aplicaţia constantă (evident de clasă $\mathscr{C}^\infty$).

Aşadar $(M, E, \mathcal{A})$ generează o structură de fibrat vectorial pe $X = M \times F$, cu ajutorul proiecţiei $\pi : X \to M$, $\pi((m, f)) = m$ şi al aplicaţiei

$$t_M = \mathbb{1}_{M\times F} : M \times F \to M \times F.$$

Fibratul vectorial X peste $(M, E, \mathcal{A})$ astfel introdus se numeşte _fibrat trivial peste $(M, E, \mathcal{A})$_.

• **FIBRATUL TANGENT**

Considerăm o varietate diferenţiabilă $(M, E, \mathcal{A})$ modelată pe E. În definiţia generală a fibratului procedăm în particular după cum urmează:

1. Luăm $X = \bigcup\limits_{m \in M} TM_m \overset{def}{=} T(M)$ şi $\pi : T(M) \to M$ definită prin $\pi(v) = m$, dacă $v \in TM_m$. Atenţie, reuniunea care îl dă pe $T(M)$ se consideră *disjunctă*, adică $TM_m \cap TM_n = \emptyset$, deci $m \neq n$. Atunci, pentru orice $m \in M$, avem $X_m = \pi^{-1}(m) = TM_m$ şi am văzut că pe TM_m avem o structură de spaţiu Banach, anume TM_m este izomorf ca spaţiu normat cu E.

2. Luăm $F \equiv E$ (deci fibra tipică a fasciculului este E). Acoperirea deschisă va fi $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$, provenită din atlasul $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$.

Pentru orice $U \in \mathscr{U}$, avem

$$\pi^{-1}(U) \overset{def}{=} T(U) = \bigcup_{m \in M} TM_m.$$

Fie $U \in \mathscr{U}$. Prin urmare, există $i \in I$ astfel încât $U = U_i$ şi avem $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$, unde $\varphi_i \overset{def}{=} \varphi : U \to E$ este harta corespunzătoare.

Definim $t_U : \pi^{-1}(U) = T(U) \to U \times E$ prin

$$t_U(v) = (m, \varphi_*(m)(v))$$

unde $m \in U$ şi $v \in TM_m$.

Se verifică proprietăţile a), b) şi c).

În acest mod am obţinut fibratul $X = T(M)$ peste $(M, E, \mathcal{A})$, cu ajutorul proiecţiei π şi a familiei de aplicaţii $(t_{U_i})_{i \in I}$ definite mai sus.

Fibratul vectorial $T(M)$ peste $(M, E, \mathcal{A})$ astfel introdus se numeşte _fibratul tangent al varietăţii $(M, E, \mathcal{A})$_.

Ca urmare, obţinem următoarea

Teoremă.

Pentru orice varietate diferenţiabilă $(M, E, \mathcal{A})$ modelată pe E, fibratul tangent $T(M)$ este varietate diferenţiabilă modelată pe $E \times E$.

Secţiunile fibratului tangent se numesc <u>*câmpuri vectoriale*</u>:

<u>**Definiţie**</u>: Fie $(M, E, \mathcal{A})$ varietate diferenţiabilă modelată pe E. O secţiune a lui $T(M)$ (adică o aplicaţie $s : M \to T(M)$ cu proprietatea $\pi \circ s = \mathbb{1}_M$) se numeşte <u>*câmp vectorial pe* M</u>.

4.4. ÎNCADRAREA ÎN TEORIA ANTERIOARĂ A CÂMPURILOR VECTORIALE

A. Să considerăm un spaţiu local compact separat M şi o familie
$\mathcal{E} = (E_m)_{m \in M}$ de spaţii Banach disjuncte două câte două. Fie şi

$$s : M \to \bigcup_{m \in M} E_m \overset{def}{=} X$$

un câmp vectorial, adică (v. definiţia de la începutul lucrării) s are proprietatea că $s(m) \in E_m$ pentru orice $m \in M$ (a se remarca schimbarea notaţiilor: T devine M, x devine s şi introducem notaţia X pentru $\bigcup\limits_{m \in M} E_m$; totul pentru a avea notaţii similare cu cele din acest capitol).

Să considerăm şi aplicaţia surjectivă $\pi : X \to M$, care acţionează astfel:

a) dacă $x \in X$, există $m \in M$ cu proprietatea că $x \in E_m$ şi acest m este unic determinat (spaţiile E_m sunt disjuncte).

b) definim $\pi(x) \overset{def}{=} m$.

Fie acum $m \in M$, arbitrar. Avem $s(m) \in E(m)$. Apoi, $\pi(s(m)) = m$. Aşadar $\pi \circ s = \mathbb{1}_M$. Adică s este o *secţiune a surjecţiei* π (cu o denumire generală).

<u>**Remarcă**</u>. Putem "disjuncta" spaţiile Banach E_m după cum urmează. Pentru orice $m \in M$, identificăm $E_m = \{m\} \times E_m$, anume
$E_m \ni x \equiv (m, x) \in \{x\} \times E_m$ pentru orice $x \in E_m$, cu norma $|||(m, x)||| = \|x\|$.

B. Să considerăm o varietate diferenţiabilă $(M, E, \mathcal{A})$ modelată pe E. Vom considera şi fibratul trivial $X = M \times F$ peste $(M, E, \mathcal{A})$, unde F este un spaţiu Banach oarecare.

Ştim că proiecţia $\pi : X \to M$ este dată prin $\pi((m, f)) = m$, dacă $m \in M$ şi $f \in F$. Vrem să definim o secţiune a lui X, deci o aplicaţie $s : M \to X$ cu proprietatea $\pi(s(m)) = m$, pentru orice $m \in M$. Vom avea, pentru orice $t \in M$: $s(t) = (n(t), f(t))$, unde $n(t) \in M$ şi $f(t) \in F$ sunt unic determinaţi de t. Atunci $\pi(s(t)) = n(t)$. Este necesar deci ca $s(t) = t$. Am arătat următorul fapt:

O aplicaţie $s : M \to X$ este secţiune pentru X dacă şi numai dacă are forma

$$s(m) = (m, f(m)), \quad f(m) \in F$$

pentru orice $m \in M$.

Acceptând că M este spaţiu local compact separat şi considerând familia de spaţii Banach $(F_m)_{m \in M}$, unde $F_m \stackrel{def}{=} \{m\} \times F$ (v. identificarea de mai sus), rezultă că *secţiunea s de mai sus este un câmp vectorial.* Anume, $s \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, unde $\mathcal{E} = (F_m)_{m \in M}$ deoarece $s(m) = (m, f(m)) \in F_m$, pentru orice $m \in M$.

Teoremă.

Fie H un spaţiu Hilbert real cu norma $\|\cdot\|$ şi fie $a > 0$. Atunci, mulţimea

$$M = \{x \in H | \, \|x\| = a\}$$

devine varietate diferenţiabilă (şi M este slab compactă).

Această discuţie pune în evidenţă următoarea *problemă de perspectivă*: elaborarea unei teorii a spaţiilor de câmpuri vectoriale (în sensul de la începutul lucrării), pentru care spaţiul T să nu fie neapărat local compact separat.

BIBLIOGRAFIE

[1] R. G. Bartle. *A General Bilinear Vector Integral*, Studia Math., 15 (1956), 337—352.

[2] R.G. Bartle, N. Dunford, J. Schwartz. *Weak Compactness and Vector Measures.* Canadian J. Math. 7 (1955), 289—305.

[3] I. Chiţescu. *Spaţii de funcţii.* Ed. Şt. Encicl. Bucureşti, 1983.

[4] I. Chiţescu, N. A. Secelean. *Elemente de teoria măsurii şi integralei.* Editura Fundaţiei "România de mâine", Bucureşti, 1999.

[5] I. Chiţescu, L Sireţchi. *Köthe Spaces of Vector Fields.* În curs de apariţie la Analele Ştiinţifice ale Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi.

[6] I. Chitescu, L Sireţchi. *Linear Operators on Kothe Spaces of Vector Fields.* În curs de apariţie la Analele Ştiinţifice ale Univ. "Ovidius", Constanta.

[7] R. Cristescu. *Analiză Funcţională, ed. III.* Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1979.

[8] J. Dieudonné. *Sur les espaces de Köthe.* J. Anlyse Math., 1 (1951), 81—115.

[9] N. Dinculeanu. *Spaţii Orlicz de câmpuri de vectori.* St. Cerc. Mat. 8 (1957), 343—412.

[10] N. Dinculeanu. *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs I.*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Fis. Mat. Nat. (8) 22 (1957), 135—139.

[11] N. Dinculeanu. *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs II. Fonctionnelles linéaires et continues.* Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Fis. Mat. Nat. (8) 22, (1957), 269—275.

[12] N. Dinculeanu. *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs III. Opérations linéaires.* Studia Math. 17 (1958), 285—293.

[13] N. Dinculeanu. *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs IV. Opérations linéaires.* Studia Math. 19 (1960), 321—331.

[14] N. Dinculeanu. *Vector Measures.* Veb. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966.

[15] N. Dinculeanu. *Integration on Locally Compact Spaces.* Noordhoff. International Publishing, Leyden, 1974.

[16] N. Dinculeanu, C. Foiaş. *Mesures Vectorielles et opérations linéaires sur* L^p_E. C. R. Acad. Sci. Paris, 248 (1959), 1759—1762.

[17] D. Ghosh, P. D. Srivastava. *On some vector valued sequence spaces using Orlicz function.* Glas. Mat. Ser. III, 34:2(1999), 819-826.

[18] R. Godement. *Théorie génerale des sommes continues d'espaces de Banach.* C. R. Acad. Sci. Paris, 288 (1949), 1321—1323.

[19] I. Halperin. *Funcion Spaces.* Canad. J. Math., 5 (1953), 273—288.

[20] G Köthe, O. Toeplitz. *Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen.* Journal de Crelle 171 (1934), 193—226.

[21] M. A. Krasnoselskii, Ia. B. Rutickii. *Convex Functions and Orlicz Spaces.* Groningen, Netherlands, 1961.

[22] M.A. Krasnoselskii, P.P. Zabreiko, E.I. Pustylnik, P.E. Sbolevskii. *Integral Operators in Spaces of Summable Functions.* Noordhoff. International Publishing, Leyden, 1976.

[23] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *On Orlicz sequence space.* Israel J. Math., 10(1971), 379-390.

[24] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I. Sequence spaces.* Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[25] K. Moriyasu, K. Sakai, N. Sumi. *Vector fields with topological stability.* Transactions of the American Mathematical Society Volume 353, Number 8, Pages 3391-3408.

[26] A. Kufner, O. John, S. Fucik. *Function Spaces.* Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1977.

[27] I. Labuda. *Spaces of Measurable Functions. Special issue dedicated to Wladislaw Orlicz on the occasion of his seventy-fifth birthday.* Comment. Math. Spec. Issue 2 (1979), 217—249.

[28] W. A. J. Luxemburg. *Banach Function Spaces.* Thesis. Delft Institute of Technology. Assen, Netherlands, 1955.

[29] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen. *Notes on Banach Function Spaces.* Indag. Math. Note I, A66 (1963), 135—147; Note II, A66 (1963), 148—153; Note III, A66 (1963), 239—250; Note IV, A66 (1963), 251—263; Note V, A66 (1963), 496—504; Note VI, A66 (1963), 655—668; Note VII, A66 (1963), 669—681; Note VIII, A67 (1964), 104—119; Note IX, A67 (1964), 360—376; Note X, A67 (1964), 493—506; Note XI, A67 (1964), 507—518; Note XII, A67 (1964) 519—529; Note XIII, A67 (1964), 530—543; Note XIV, A68 (1965), 229—248; Note XV, A68 (1965), 415—446, Note XVI, A68 (1965), 646—667.

[30] M. Nicolescu. *Funcţii reale şi elemente de topologie.* Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1968.

[31] W. Orlicz. *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B.* Bull. Int. de l'Acad. Sci. Pol. Sér. A (1932), 207—220.

[32] H. H. Schaeffer. *Topological Vector Spaces (third printing).* Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

[33] Gh. Sireţchi. *Spaţii concrete în analiza funcţională.* Ed. Univ. Buc., Bucureşti, 1982.

[34] Yilmaz Yilmaz, M. Kemal Ozdemir. *K¨othe-Toeplitz duals of some vector-valued Orlicz sequence spaces.* Soochow Journal of Mathematics Volume 31, No. 3, pp. 389-402, 2005.

[35] A. C. Zaanen. *On a Certain Class of Banach Spaces.* Annals of Math [2], 47 (1946), 654—666.

[36] A.C. Zaanen *Integration.* North Holland Publishing, Amsterdam, 1967.

$[1]_A$ Gh. Gheorghiev, V. Oproiu. *Varietăţi diferenţiabile finit şi infinit dimensionale.* Vol. I (1976), Vol. II (1979). Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti.

$[2]_A$ G. Marinescu. *Tratat de analiză funcţională.* Vol. I (1970), Vol. II (1972). Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti.

[3]$_A$ J.T. Schwartz. *Non-Linear Functional Analysis.* Gordon and Breach Science Pu blishers. New York, London, Paris, 1969.