Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematica şi Informatică
Şcoala Doctorală de Matematică

Logici multivalente cu conjuncţii necomutative
(Many-valued logics with non-commutative conjunction)

Rezumat al Tezei de Doctorat

Coordonator ştiinţific
Prof. Dr. George Georgescu

Student
Denisa Diaconescu

2009-2012

Cuprins

Capitolul 1

Introducere

Aceasta teza de doctorat este o contributie la studiul logicii multivalente necomutative, o directie de cercetare de mare interes in tendintele actuale ale logicii multivalente.

1.1 Logici multivalente

Logicile multivalente sunt logici neclasice. Principala diferenta intre logicile clasice si cele multivalente este ca logicile multivalente omit *principiul bivalentei*, admitand astfel un numar mare de *valori de adevar*.

Exista multe linii istorice care pot fi urmarite pentru a ajunge la diversele arii de cercetare in teoria logicilor multivalente de azi. Desi preistoria logicii multivalente poate fi trasata in timp pana la Aristotel, putem considera ca logica multivalenta, ca si latura separata a logicii, a fost creata de J. Łukasiewicz si E.L. Post la inceputul anilor 1920.

In teoria logicii multivalente, un rol foarte important il joaca *t-normele*, introduse in 1960 de Schweizer si Sklar [33]. In 1998, Hájek a introdus, in binecunoscuta lui monografie [18], o logica multivalenta generala si anume *Logica BL*, in scopul de a formaliza logicile multivalente induse de *t-normele continue*. Logica BL a lui Hájek s-a dovedit a fi un fragment comun in trei importante logici multivalente: *logica Łukasiewicz infinit-valenta*, *logica Gödel* si *logica produs* [22]. Structurile algebrice corespunzatoare logicii BL se numesc *BL-algebre*.

Pe de alta parte, Esteva si Godo [13] au observat ca minima conditie pentru ca o t-norma sa aiba un residuum, si deci sa determine o logica, este continuitatea la stanga. In consecinta, au introdus o logica mai slaba, *logica MTL*, si au propus conjectura ca logica MTL este *logica t-normelor continue la stanga*. Aceasta conjectura a fost demonstrata de catre Jenei si Montagna [27]. Algebrele logicii MTL se numesc *MTL-algebre* si au fost introduse de Esteva si Godo [13].

1.2 Logici multivalente necomutative

In general, o logica necomutativa este o logica echipata cu o conjunctia necomutativa $\&$, adica formula $\varphi\&\psi$ nu este echivalenta cu formula $\psi\&\varphi$. Motivatii pentru a studia logica necomutativa apar in diverse domenii, in afara, dar si in cadrul matematicii.

Pseudo-BL-algebrele slabe au fost introduse de Flondor, Georgescu si Iorgulescu [15]. Pseudo-BL-algebrele slabe comutative sunt exact MTL-algebre, de aceea vom folosi terminologia *pseudo-MTL-algebre* (*psMTL-algebre*, pe scurt), pentru pseudo-BL-algebre slabe. Desi MTL-algebrele au *proprietatea de reprezentare subdirecta*, psMTL-algebrele nu o au; *$psMTL$-algebrele reprezentabile* au fost caracterizate de Kühr [29].

Dupa ce au fost introduse psMTL-algebrele, Hájek [20, 21] a investigat logica corespunzatoare acestor structuri algebrice, si anume *logica $psMTL$*. Logica cu predicate $psMTL\forall$ a fost introdusa de Hájek si Ševčík [23].

Generalizarea necomutativa a t-normelor a fost investigata de catre Flondor, Georgescu si Iorgulescu [15] si se numesc *pseudo-t-norme*. Cum a fost demonstrat in [15], fiecare pseudo-t-norma continua e comutativa, dar exista pseudo-t-norme continue la stanga care nu sunt comutative. Jenei si Montagna [28] au demonstrat ca $\mathrm{psMTL}^{\mathrm{r}}$ este *logica pseudo-t-normelor continue la stanga*.

Aceasta este lumea matematica in care se incadreaza teza de fata.

$\star$

In prezenta teza de doctorat luam in considerare logica multivalenta necomutativa psMTL introdusa de Hájek si o investigam mai in adancime, propunand noi idei, unelte si metode de a imbogati si dezvolta acest sistem logic. Este o teza in cadrul logicii matematice, studiind cele doua dimensiuni ale unui sistem logic, sintaxa si semantica. Algebra apare, de asemenea, ca o a treia dimensiune, in stransa legatura cu celelalte doua. Dat fiind ca domeniul logicii multivalente necomutative este destul de recent, trebuie luate in considerare multe aspecte.

1.3 Structura tezei

In continuare vom prezenta pe scurt capitolele acestei teze si contributia originala a autorului. Cateva dintre rezultatele originale pot fi gasite in mai multe articole [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

Desi teza nu se concentreaza pe algebra logicii, notiuni de algebra sunt necesare. Capitolul 2 este dedicat definitiilor si proprietatilor de baza ale psMTL-algebrelor. Ca si contributie originala principala la acest subiect, dezvoltam o *completare MacNeille pentru $psMTL$-lanturi*, demonstrand ca orice psMTL-lant poate fi scufundat intr-un psMTL-lant.

In Capitolul 3 investigam in profunzime sistemul logic psMTL, intreaga teza fiind concentrata in jurul acestei logici necomutative. Introducem, ca o contributie originala, notiunea de *teorie compatibila*, ca o reflectie logica a sistemelor deductive compatibile, iar rezultatul principal este o *teorema de deductie* pentru teorii compatibile, care are forma standard a teoremei de deductie pentru logica multivalenta. Restul Capitolului 3 trateaza semantica logicii psMTL si se concentreaza pe teoremele de completitudine. Ca si contributie originala, demonstram *teorema de completitudine standard tare finita* pentru logica $\mathrm{psMTL}^{\mathrm{r}}$.

Capitolul 4 este dedicat calculului cu predicate al logicii psMTL logic, introdus de Hájek si Ševčík [23]. Dezvoltarea unei teorii a modelelor pentru logici multivalente este o problema intens studiata, chiar si in cazul comutativ. Nu s-au facut incercari pentru obtinerea unor rezultate de teoria modelelor in contextul logicilor multivalente necomutative. Ca si un prim pas inspre o astfel de cercetare, demonstram, ca si contributie originala, *teorema de omitere a tipurilor* in cadrul logicii $\mathrm{psMTL}\forall$.

Capitolul 5 se ocupa de investigarea unor extensii ale logicii psMTL. Introducem analoagele necomutative ale logicii produs, logicii SMTL si logicii IMTL. Mentionam ca dezvoltarea logicii produs necomutative este o problema deschisa ridicata de Hájek [21].

Capitolul 6 este contributia principala a tezei si contine numai rezultate originale. In Capitolul 6 introducem o semantica diferita pentru logica psMTL, si anume semantica de tip Kripke, atat pentru calculul propozitional cat si pentru cel cu predicate. Rezultatul principal este *teorema standard de completitudine pentru logica cu predicate $psMTL\forall$*, un rezultat important in teoria logicii necomutative. Demonstram, de asemenea, cum semanticile de tip Kripke pot fi obtinute pentru cateva extensii ale logicii psMTL.

In Capitolul 7 transferam notiunile din Capitolul 6 in concepte algebrice, acestea fiind, de asemenea, contributii originale. Pe langa valoarea de adevar a unei formule, introducem si notiunea de *valoare forcing* a unei formule.

Capitolul 8 contine cateva concluzii finale si idei de cercetare viitoare.

Capitolul 2

psMTL-algebre

Pseudo-MTL-algebrele (*psMTL-algebre*, pe scurt) au fost introduse in [15] de catre Flondor, Georgescu si Iorgulescu sub numele de *pseudo-BL-algebre slabe*. Acest Capitol este destinat teoriei psMTL-algebrelor, amintind unele dintre proprietatile acestora.

Cele mai importante contributii originale din acest Capitol sunt:

· *Subsectiunea 2.4.4, in care introducem notiunea de psMTL-algebra stricta (aceasta contributie apare in [5]);*

· *Sectiunea 2.5, in care extindem completarea MacNeille [32] pentru psMTL-lanturi (Teorema 2.5.1);*

· *Sectiunea 2.6, in care introducem notiunea de algebra psProdus cu stare (aceasta contributie apare in [7]).*

2.1 Algebre mai generale

2.1.1 Lumea lui $\odot, 1$

Definitie 2.1.1 [25] Un *monoid partial-ordonat integral* (*poim*, pe scurt) este o structura $\mathcal{A} = (A, \leq, \odot, 1)$ astfel incat $(A, \leq, 1)$ este o multime cu o ordine partiala si cu un cel mai mare element 1, $(A, \odot, 1)$ este un monoid si $\odot$ nu este descrescatoare in ambele argumente.

Definitie 2.1.2 [25] Un *monoid partial-ordonat integral reziduat* (*porim* sau *poim reziduat*, pe scurt) este un poim $(A, \leq, \odot, 1)$ astfel incat urmatoarele conditii sunt satisfacute:

(pR) pentru orice $x, y, z \in A$, exista $y \to z \overset{not}{=} \max\{x \mid x \odot y \leq z\}$ si
$x \rightsquigarrow z \overset{not}{=} \max\{y \mid x \odot y \leq z\}$.

2.1.2 Latici reziduate

Definitie 2.1.3 [26] O *algebra partial-ordonata integrala reziduata* este o structura de forma $\mathcal{A} = (A, \leq, \odot, \to, \rightsquigarrow, 1)$ astfel incat:

(1) $(A, \leq, 1)$ este o multime partial-ordonata, cu un cel mai mare element 1,

(2) $(A, \odot, 1)$ este un monoid,

(3) $\to$ si $\rightsquigarrow$ sunt operatii binare ce satisfac conditia de mai jos:

(pPR) pentru orice $x, y, z \in A$, $x \leq y \to z$ ddaca $y \leq x \rightsquigarrow z$ ddaca $x \odot y \leq z$.

Definitie 2.1.4 [25] O *algebra partial-ordonata integrala reziduata marginita* este o structura $\mathcal{A} = (A, \leq, \odot, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$, unde $(A, \leq, \odot, \to, \rightsquigarrow, 1)$ este o algebra partial-ordonata integrala reziduata si $(A, \leq, 0)$ este o multime partial-ordonata cu un cel mai mic element 0.

Definitie 2.1.5 [16] O *latice reziduata integrala marginita* (*latice reziduata*, pe scurt) este o algebra partial-ordonata integrala reziduata marginita $\mathcal{A} = (A, \leq, \odot, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ in care multimea partial-ordonata $(A, \leq)$ este o latice.

- **Latici reziduate divizibile**

Definitie 2.1.6 [16] O *latice reziduata divizibila* $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \odot, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ este o latice reziduata ce satisface urmatoarea conditie, pentru orice $x, y \in A$:

(pdiv) $x \wedge y = (x \to y) \odot x = x \odot (x \rightsquigarrow y)$.

2.1.3 Lumea lui $\to, \rightsquigarrow, 1$

Definitie 2.1.7 [26] O *pseudo-BCK-algebra* (*psBCK-algebra*, pe scurt) este o structura $\mathcal{A} = (A, \leq, \to, \rightsquigarrow, 1)$ astfel incat urmatoarele conditii sunt satisfacute, pentru orice $x, y, z \in A$:

(1) $y \to z \leq (z \to x) \rightsquigarrow (y \to x)$ si $y \rightsquigarrow z \leq (z \rightsquigarrow x) \to (y \rightsquigarrow x)$,

(2) $y \leq (y \to x) \rightsquigarrow x$ si $y \leq (y \rightsquigarrow x) \to x$,

(3) $x \leq x$,

(4) $x \leq 1$,

(5) daca $x \leq y$ si $y \leq x$, atunci $x = y$,

(6) $x \leq y$ ddaca $x \to y = 1$ ddaca $x \rightsquigarrow y = 1$.

Definitie 2.1.8 [26] O *psBCK-algebra cu conditia (pP)* (*psBCK(pP)-algebra*, pe scurt) este o psBCK-algebra $\mathcal{A} = (A, \leq, \to, \rightsquigarrow, 1)$ ce satisface urmatoarea conditie:

(pP) pentru orice $x, y \in A$, exista
$$x \odot y \overset{not}{=} \min\{z \mid x \leq y \to z\} = \min\{z \mid y \leq x \rightsquigarrow z\}.$$

2.1.4 Latici psBCK(pPR) marginite

Definitie 2.1.9 [26] O *psBCK(pPR)-algebra* este o structura $\mathcal{A} = (A, \leq, \to, \rightsquigarrow, \odot, 1)$ astfel incat urmatoarele conditii sunt satisfacute:

(1) $(A, \leq, 1)$ este o multime partial-ordonata, cu un cel mai mare element 1;

(2) $(A, \to, \rightsquigarrow, 1)$ satisface conditiile, pentru orice $x, y, z \in A$:

(R1) $1 \to x = x = 1 \rightsquigarrow x$,

(R2) $(y \to z) \rightsquigarrow [(z \to x) \rightsquigarrow (y \to x)] = 1$ si
$(y \rightsquigarrow z) \to [(z \rightsquigarrow x) \to (y \rightsquigarrow x)] = 1$;

(3) $x \to y = 1$ ddaca $x \rightsquigarrow y = 1$ ddaca $x \leq y$, pentru orice $x, y \in A$;

(4) $\odot$ este o operatie binara ce verifica conditia (pPR).

Definitie 2.1.10 [26] O *psBCK(pPR)-algebra marginita* este o structura de forma $\mathcal{A} = (A, \leq, \to, \rightsquigarrow, \odot, 0, 1)$ astfel incat $(A, \leq, \to, \rightsquigarrow, \odot, 1)$ este o psBCK(pPR)-algebra si $(A, \leq, 0)$ este o multime partial-ordonata, cu un cel mai mic element 0.

Definitie 2.1.11 [26] O *latice psBCK(pPR) marginita* este o psBCK(pPR)-algebra marginita $\mathcal{A} = (A, \leq, \to, \rightsquigarrow, \odot, 0, 1)$, in care multimea partial-ordonata $(A, \leq)$ este o latice.

Teorema 2.1.1 *[26] Laticile psBCK(pPR) marginite sunt echivalente categorial cu laticile reziduate.*

2.2 Definitii si proprietati de baza

Definitie 2.2.1 [15] O *psMTL-algebra* este o structura de forma

$$\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \odot, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$$

ce satisface urmatoarele conditii, pentru orice $x, y, z \in A$:

(RL1) $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice marginita;

(RL2) $(A, \odot, 1)$ este un monoid;

(pPR) $x \odot y \leq z$ ddaca $x \leq y \rightarrow z$ ddaca $y \leq x \rightsquigarrow z$;

(pprel) $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = (x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x) = 1$.

Spunem ca o psMTL-algebra este un *lant* daca ordinea laticeala este liniara, si ca este *completa* daca laticea de baza este completa.

- **Definitii echivalente pentru psMTL-algebre**

Urmatoarele sunt definitii echivalente pentru o psMTL-algebra:

(1) o latice reziduata $(A, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ ce satisface conditia (pprel);

(2) o latice psBCK(pPR) marginita $(A, \vee, \wedge, \rightarrow, \rightsquigarrow, \odot, 0, 1)$ ce satisface conditia (pprel).

- **psMTL-algebre standard**

Definitie 2.2.2 [15] O *pseudo-t-norma* este o operatie binara $\odot$ pe intervalul real $[0, 1]$ care este asociativa, nu este descrescatoare in ambele argumente si satisface $x \odot 1 = 1 \odot x = x$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

Orice pseudo-t-norma continua este comutativa, dar exista pseudo-t-norme continue la stanga care nu sunt comutative.

Daca $\odot$ este o pseudo-t-norma continua la stanga, atunci $([0, 1], \leq, \odot, 1)$ este un porim. In concluzie, pentru orice pseudo-t-norma continua la stanga $\odot$, structura

$$([0, 1], \max, \min, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$$

este un psMTL-lant, numit o *psMTL-algebra standard*.

- **psMTL-algebre reprezentabile**

Varietatea psMTL-algebrelor nu are proprietatea de reprezentare subdirecta.

Definitie 2.2.3 [29] O *psMTL-algebra reprezentabila* (*$psMTL^r$-algebra*, pe scurt) este o psMTL-algebra in care identitatile lui Kühr's sunt adevarate:

(R1) $(y \rightarrow x) \vee (z \rightsquigarrow ((x \rightarrow y) \odot z)) = 1$,

(R2) $(y \rightsquigarrow x) \vee (z \rightarrow (z \odot (x \rightsquigarrow y))) = 1$.

2.3 Filtre si sisteme deductive

In aceasta sectiune, fie $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ o psMTL-algebra.

Definitie 2.3.1 [2] O submultime nevida F a lui A este un *filtru* al lui $\mathcal{A}$ daca urmatoarele conditii sunt satisfacute:

(F1) daca $x, y \in F$, atunci $x \odot y \in F$,

(F2) daca $x \in F$, $y \in A$ si $x \leq y$, atunci $y \in F$.

Definitie 2.3.2 [26] O submultime nevida S a lui A este un *sistem deductiv* al lui $\mathcal{A}$ daca urmatoarele conditii sunt satisfacute:

(DS1) $1 \in S$,

(DS2) daca $x \in S$ si $x \rightarrow y \in S$, atunci $y \in S$, sau

(DS2') daca $x \in S$ si $x \rightsquigarrow y \in S$, atunci $y \in S$.

Propozitie 2.3.1 *[26] Pentru orice submultime F a lui A, urmatoarele sunt echivalente:*

(1) F este un filtru;

(2) F este un sistem deductiv.

- **Filtre normale si sisteme deductive compatibile**

Definitie 2.3.3 [2] Un filtru H al lui $\mathcal{A}$ se numeste *normal* daca, pentru orice $x \in A$, avem:

$$\text{(N) } x \odot H = H \odot x.$$

Definitie 2.3.4 [30] Un sistem deductiv T a lui $\mathcal{A}$ se numeste *compatibil* daca, pentru orice $x, y \in A$, avem:

$$\text{(C) } x \rightarrow y \in T \text{ iff } x \rightsquigarrow y \in T.$$

Lema 2.3.1 *[2] Fie T un sistem deductiv compatibil al lui $\mathcal{A}$. Atunci:*

(1) Pentru orice $x \in A$ si $t \in T$, exista $t' \in T$ astfel incat $x \odot t \geq t' \odot x$;

(2) Pentru orice $x \in A$ si $t \in T$, exista $t' \in T$ astfel incat $t \odot x \geq x \odot t'$.

- **Sisteme deductive si congruente**

Pentru orice sistem deductiv S al lui $\mathcal{A}$, definim doua relatii binare $\equiv_{L(S)}$ si $\equiv_{R(S)}$ pe A prin:

$$x \equiv_{L(S)} y \text{ ddaca } (x \to y) \wedge (y \to x) \in S,$$
$$x \equiv_{R(S)} y \text{ ddaca } (x \rightsquigarrow y) \wedge (y \rightsquigarrow x) \in S.$$

Propozitie 2.3.2 *[11] Pentru un sistem deductiv S al lui $\mathcal{A}$, relatiile $\equiv_{L(S)}$ si $\equiv_{R(S)}$ sunt relatii de echivalenta pe $\mathcal{A}$.*

Pentru orice sistem deductiv compatibil T al lui $\mathcal{A}$, definim relatia binara $\equiv_T$ pe A prin:

$$x \equiv_T y \text{ ddaca } x \to y, y \to x \in T \text{ ddaca } x \rightsquigarrow y, y \rightsquigarrow x \in T.$$

Propozitie 2.3.3 *[11] Pentru un sistem deductiv compatibil T al lui $\mathcal{A}$, relatia $\equiv_T$ este o congruenta pe $\mathcal{A}$.*

2.4 Unele clase particulare de psMTL-algebre

In aceasta sectiune ne concentram atentia asupra unor clase de psMTL-algebre necesare in capitolele viitoare.

2.4.1 MTL-algebre

O psMTL-algebra $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \odot, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ se numeste *comutativa* cand operatia $\odot$ este comutativa sau, echivalent, $\to = \rightsquigarrow$. In concluzie, o psMTL-algebra comutativa este exact o MTL-algebra, notiune introdusa de Esteva si Godo [13].

2.4.2 psBL-algebre

Definitie 2.4.1 [17] O *psBL-algebra* $\mathcal{A}$ este o psMTL-algebra ce satisface urmatoarea conditie, pentru orice $x, y \in A$:

$$\text{(pdiv) } x \wedge y = (x \to y) \odot x = x \odot (x \rightsquigarrow y).$$

2.4.3 psMV-algebre

Definitie 2.4.2 *[15]* O *psMV-algebra* este o structura de forma $\mathcal{A} = (A, \odot, ^-, ^\sim, 0, 1)$ astfel incat urmatoarele conditii sunt satisfacute, pentru orice $x, y, z \in A$:

(1) $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$;

(2) $x \odot 1 = 1 \odot x = x$,

(3) $x \odot 0 = 0 \odot x = 0$,

(4) $0^- = 1$ si $0^\sim = 1$,

(5) $(x^- \odot y^-)^\sim = (x^\sim \odot y^\sim)^-$,

(6) $x \odot (x^\sim \oplus y) = y \odot (y^\sim \oplus x) = (x \oplus y^-) \odot y = (y \oplus x^-) \odot x$,

(7) $x \oplus (x^- \odot y) = (x \odot y^\sim) \oplus y$,

(8) $(x^-)^\sim = x$,

unde $y \oplus x \stackrel{def}{=} (x^- \odot y^-)^\sim = (x^\sim \odot y^\sim)^-$.

Propozitie 2.4.1 *[10] O psMV-algebra $\mathcal{A}$ este o psBL-algebra ce verifica urmatoarea conditie, pentru orice $x \in A$:*

$$\text{(pDN) } (x^-)^\sim = (x^\sim)^- = x.$$

- **psWajsberg-algebre**

Definitie 2.4.3 [1] O *psWajsberg-algebra* este o structura $\mathcal{W} = (W, \to, \rightsquigarrow, ^-, ^\sim, 1)$ astfel incat urmatoarele conditii sunt satisfacute, pentru orice $x, y, z \in W$:

(1) $1 \to x = x$ si $1 \rightsquigarrow x = x$,

(2) $(x \to y) \to ((y \to z) \rightsquigarrow (x \to z)) = 1$ si $(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow ((y \rightsquigarrow z) \to (x \rightsquigarrow z)) = 1$,

(3) $(x \to y) \rightsquigarrow y = (y \to x) \rightsquigarrow x = (x \rightsquigarrow y) \to y = (y \rightsquigarrow x) \to x$,

(4) $(x^- \rightsquigarrow y^-) \to (y \to x) = 1$ si $(x^\sim \to y^\sim) \to (y \rightsquigarrow x) = 1$,

(5) $1^- = 1^\sim$,

(6) $(x \to y^-)^\sim = (y \rightsquigarrow x^\sim)^-$.

Propozitie 2.4.2 *[1] psWajsberg-algebrele sunt echivalente categorial cu psMV-algebrele.*

2.4.4 Algebre psProdus

Definitie 2.4.4 [11] O *algebra psProdus* $\mathcal{A}$ este o psBL-algebra ce satisface urmatoarele conditii, pentru orice $x, y, z \in A$:

(P1) $x \wedge x^- = 0$ si $x \wedge x^\sim = 0$,

(P2) $z^= \odot ((x \odot z) \to (y \odot z)) \leq x \to y$ si $z^\approx \odot ((z \odot x) \rightsquigarrow (z \odot y)) \leq x \rightsquigarrow y$.

2.4.5 Algebre Gödel

Definitie 2.4.5 [11] O *algebra pseudo-Gödel* $\mathcal{A}$ este o psBL-algebra care satisface urmatoarea conditie, pentru orice $x \in A$:

$$\text{(G) } x \odot x = x.$$

Propozitie 2.4.3 *[11] Daca $\mathcal{A}$ este o algebra pseudo-Gödel, atunci $\mathcal{A}$ este o algebra Gödel.*

2.4.6 psSMTL-algebre

Aceasta subsectiune este o contributie originala si rezultatele sale se gasesc in [5].

Definitie 2.4.6 O psMTL-algebra $\mathcal{A}$ se numeste *stricta* (sau *psSMTL-algebra*, pe scurt) daca satisface urmatoarele conditii, pentru orice $x, y \in A$:

$$\text{(S) } (x \odot y)^{-} = x^{-} \vee y^{-} \text{ si } (x \odot y)^{\sim} = x^{\sim} \vee y^{\sim}.$$

Propozitie 2.4.4 *Fie $\mathcal{A}$ un psMTL-lant. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $\mathcal{A}$ este o psSMTL-algebra.

(2) $\mathcal{A}$ satisface conditia urmatoare, pentru orice $x, y \in A$,

$$x \odot y = 0 \textit{ ddaca } x = 0 \textit{ sau } y = 0.$$

(3) Negatiile lui $\mathcal{A}$ sunt negatii Gödel, i.e.

$$x^{-} = x^{\sim} = \begin{cases} 1, & \textit{daca } x = 0 \\ 0, & \textit{altfel} \end{cases}.$$

2.4.7 psIMTL-algebre

Definitie 2.4.7 [25] O *psIMTL-algebra* $\mathcal{A}$ este o psMTL-algebra ce satisface urmatoarea conditie, pentru orice $x \in A$:

$$\text{(pDN) } (x^{-})^{\sim} = (x^{\sim})^{-} = x.$$

2.4.8 Legaturi intre algebrele studiate

In Figura 2.1 prezentam legaturile dintre structurile algebrice studiate in aceasta Sectiune.

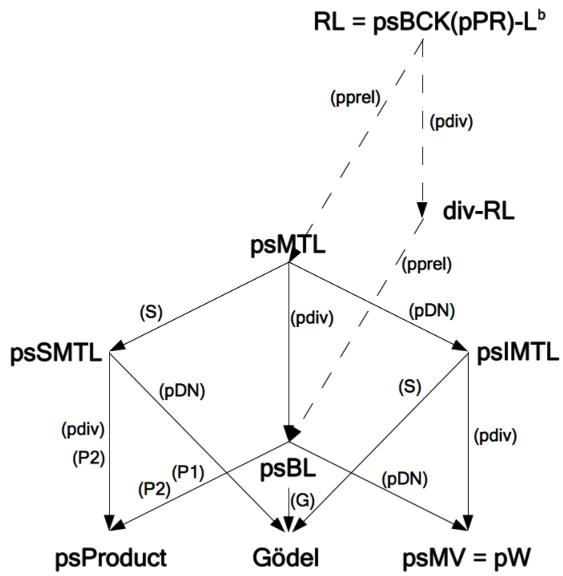

Figura 2.1: Legaturi intre algebrele studiate.

2.5 Completarea MacNeille

Aceasta Sectiune este o contributie originala la teoria psMTL-algebrelor. Scopul este de a dezvolta completarea MacNeille pentru psMTL-lanturi:

Teorema 2.5.1 *Orice $psMTL$-lant se poate scufunda intr-un $psMTL$-lant complet.*

Corolar 2.5.1 *Orice $psMTL^r$-lant se poate scufunda intr-un $psMTL^r$-lant complet.*

2.6 Stari

In aceasta Sectiune introducem, ca o contributie originala, notiunea de algebra psProdus cu stare. Aceasta contributie poate fi gasita in [7].

Definitie 2.6.1 [12] Fie $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ o latice reziduata divizibila. Un *operator stare* pe $\mathcal{A}$ este o functie $\sigma : A \rightarrow A$ astfel incat urmatoarele conditii sunt satisfacute, pentru orice $x, y \in A$:

(1) $\sigma(0) = 0$,

(2) $\sigma(x \rightarrow y) = \sigma(x) \rightarrow \sigma(x \wedge y)$ si $\sigma(x \rightsquigarrow y) = \sigma(x) \rightsquigarrow \sigma(x \wedge y)$,

(3) $\sigma(x \odot y) = \sigma(x) \odot \sigma(x \rightsquigarrow x \odot y) = \sigma(y \rightarrow x \odot y) \odot \sigma(y)$,

(4) $\sigma(\sigma(x) \odot \sigma(y)) = \sigma(x) \odot \sigma(y)$,

(5) $\sigma(\sigma(x) \to \sigma(y)) = \sigma(x) \to \sigma(y)$ and $\sigma(\sigma(x) \rightsquigarrow \sigma(y)) = \sigma(x) \rightsquigarrow \sigma(y)$,

(6) $\sigma(\sigma(x) \vee \sigma(y)) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$.

Definitie 2.6.2 O structura $(\mathcal{A}, \sigma)$ se numeste *algebra pseudo-produs cu stare interna* (sau *algebra psProdus cu stare*, pe scurt) daca $\mathcal{A}$ este o algebra psProdus si $\sigma : A \to A$ este un operator stare pe $\mathcal{A}$.

Capitolul 3

Logica psMTL logic - calculul propozitional

In acest Capitol investigam in detaliu sistemele logice *psMTL* si $psMTL^r$ introduse de Hájek [21]. Jenei si Montagna [28] au aratat ca logica $\mathrm{psMTL^r}$ este logica pseudo-t-normelor continue la stanga si, in consecinta, putem afirma ca logica $\mathrm{psMTL^r}$ este 'adevarata logica multivalenta necomutativa'.

Cele mai importante contributii originale din acest Capitol sunt:

· *Subsectiunea 3.1.1, care introduce o lista de teoreme formale peste logica psMTL (aceste rezultate se gasesc in [5]);*

· *Subsectiunea 3.1.2, in care introducem notiunea de teorie compatibila; rezultatul principal este o teorema de deductie pentru teorii compatibile (Teorema 3.1.1; aceste rezultate se gasesc in [5]);*

· *Propozitia 3.2.3, care defineste algebra Lindenbaum-Tarski asociata unei teorii compatibile in contextul deductiei slabe;*

· *Subsectiunea 3.2.4, in care demonstram teorema de completitudine standard tare finita pentru logica* $\mathrm{psMTL^r}$ *(Teorema 3.2.4; acest rezultat se gaseste in [3]).*

3.1 Sintaxa

- **Limbajul**

Limbajul logicii psMTL constanta intr-o multime numarabila de variabile propozitionale (notata Var), conectorii primitivi $\vee, \wedge, \&, \rightarrow, \rightsquigarrow$ si constanta $\overline{0}$.

- **Formulele**

Formulele sunt definite prin inductie, in modul uzual, si notam prin $\mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}}$ multimea tuturor formulelor peste logica psMTL. Pentru orice formula φ a logicii psMTL, definim formula $\varphi^\bullet$ care inverseaza argumentele conjunctiei necomutative $\&$ si, in consecinta, interschimba cele doua implicatii $\to$ si $\rightsquigarrow$.

- **Axiomele si regulile de deductie**

Axiomele logicii psMTL sunt:

I. orice formula care are una din formele de mai jos este o axioma:

$(A1)\quad (\psi \to \chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

$(A2)\quad (\varphi\&\psi) \to \varphi$

$(A3)\quad (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$

$(A4)\quad (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$

$(A5)\quad ((\varphi \to \psi)\&\varphi) \to (\varphi \wedge \psi)$

$(A6a)\quad (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi\&\psi) \to \chi)$

$(A6b)\quad ((\varphi\&\psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$

$(A7)\quad ((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$

$(A8a)\quad (\varphi \vee \psi) \to (((\varphi \rightsquigarrow \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \rightsquigarrow \varphi) \to \varphi))$

$(A8b)\quad (((\varphi \rightsquigarrow \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \rightsquigarrow \varphi) \to \varphi)) \to (\varphi \vee \psi)$

$(A9)\quad \overline{0} \to \varphi$

II. daca φ este o axioma de forma $(A1)$, $(A2)$, $(A5)$, $(A6a)$, $(A6b)$, $(A7)$, $(A8a)$ sau $(A8b)$, atunci $\varphi^\bullet$ este o axioma.

Regulile de deductie ale logicii psMTL sunt:

(MP1) $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$ (MP2) $\dfrac{\varphi,\ \varphi \rightsquigarrow \psi}{\psi}$ (Impl1) $\dfrac{\varphi \to \psi}{\varphi \rightsquigarrow \psi}$ (Impl2) $\dfrac{\varphi \rightsquigarrow \psi}{\varphi \to \psi}$

- **Logica** $\mathrm{psMTL}^{\mathrm{r}}$

Hájek [21] a transpus la nivel logic faptul ca varietatea psMTL-algebrelor nu are proprietatea de reprezentare subdirecta prin introducerea logicii $\mathrm{psMTL}^{\mathrm{r}}$, ca o extensie a logicii psMTL prin axiomele:

$(A10)\quad (\varphi \to \psi) \vee (\chi \rightsquigarrow ((\psi \to \varphi)\&\chi))$

$(A10^\bullet)\quad (\varphi \rightsquigarrow \psi) \vee (\chi \to (\chi\&(\psi \rightsquigarrow \varphi)))$

3.1.1 Teorii si deductie

Numim o *teorie* peste logica psMTL orice multime de formule.

Definitie 3.1.1 [21] Fie T o teorie peste logica psMTL. O formula φ se numeste T-*teorema* peste logica psMTL daca exista un numar natural $n \geq 1$ si o secventa de formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ astfel incat, pentru orice $i \in [n]$, una din conditiile de mai jos este satisfacuta:

(1) φ_i este o axioma sau $\varphi_i \in T$,

(2) exista $j, k < i$ astfel incat φ_j este $\varphi_k \to \varphi_i$,

(3) exista $j, k < i$ astfel incat φ_j este $\varphi_k \rightsquigarrow \varphi_i$,

(4) exista $k < i$ si $\psi, \chi \in \mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}}$ astfel incat φ_k este $\psi \to \chi$ si φ_i este $\psi \rightsquigarrow \chi$,

(5) exista $k < i$ si $\psi, \chi \in \mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}}$ astfel incat φ_k este $\psi \rightsquigarrow \chi$ si φ_i este $\psi \to \chi$,

unde $[n]$ este o notatie pentru $\{1, \ldots, n\}$.

Notam multimea T-teoremelor peste logica psMTL logic prin $\mathrm{Theor}_{\mathrm{psMTL}}(T)$.

- **Teoreme peste logica** psMTL

Aceasta subsectiune este o contributie originala si unele din rezultatele de mai jos de gasesc in [5]. Scopul acestei subsectiuni este de a introduce o lista de teoreme peste logica psMTL.

3.1.2 Teorii compatibile si deductie slaba

Hájek a introdus si o notiune mai restrictiva de deductie peste logica psMTL, numita *deductie slaba*.

Definitie 3.1.2 [21] Fie T o teorie peste logica psMTL. O formula φ se numeste $\circ$-T-*teorema* peste logica psMTL daca exista un numar natural $n \geq 1$ si o secventa de formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ astfel incat, pentru orice $i \in [n]$, una din conditiile de mai jos este satisfacuta:

(1) $\varphi_i \in \mathrm{Theor}_{\mathrm{psMTL}} \cup T$,

(2) exista $j, k < i$ astfel incat φ_j este $\varphi_k \to \varphi_i$,

(3) exista $j, k < i$ astfel incat φ_j este $\varphi_k \rightsquigarrow \varphi_i$.

Notam multimea $\circ$-T-teoremelor peste logica psMTL prin $\mathrm{Theor}^{\circ}_{\mathrm{psMTL}}(T)$.

Urmatoarele rezultate ale acestei subsectiuni sunt contributii originale si pot fi gasite in [5].

Definitie 3.1.3 O teorie T se numeste *compatibila* daca pentru orice formule φ, ψ avem

$$T \vdash^{\circ} \varphi \rightarrow \psi \text{ ddaca } T \vdash^{\circ} \varphi \rightsquigarrow \psi.$$

- **Proprietati ale teoriilor compatibile**

Notatii. Daca $n \geq 1$ este un numar natural si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ sunt formule, atunci formula $\varphi_1 \rightarrow (\ldots(\varphi_n \rightarrow \psi)\ldots)$ este notata cu $\varphi_1 \ldots \varphi_n \rightarrow \psi$ si cu $\varphi \stackrel{+}{\rightarrow} \psi$, daca $\varphi_1 = \ldots = \varphi_n = \varphi$. Folosim o notatie similara pentru $\rightsquigarrow$.

Lema 3.1.1 *Daca T este o teorie, atunci avem urmatoarele:*

(a) daca $T \vdash^{\circ} \varphi_1 \ldots \varphi_n \rightarrow \varphi$ si $T \vdash^{\circ} \varphi \rightarrow \psi$, atunci $T \vdash^{\circ} \varphi_1 \ldots \varphi_n \rightarrow \psi$;

(b) daca $T \vdash^{\circ} \varphi_1 \ldots \varphi_n \rightsquigarrow \varphi$ si $T \vdash^{\circ} \varphi \rightsquigarrow \psi$, atunci $T \vdash^{\circ} \varphi_1 \ldots \varphi_n \rightsquigarrow \psi$.

Propozitie 3.1.1 *Daca T este o teorie compatibila, atunci avem urmatoarele:*

(a) daca $T \vdash^{\circ} \varphi_1 \ldots \varphi_n \rightarrow (\varphi \rightsquigarrow \psi)$, atunci $T \vdash^{\circ} \varphi \rightarrow (\varphi_1 \ldots \varphi_n \rightarrow \psi)$;

(b) daca $T \vdash^{\circ} \varphi_1 \ldots \varphi_n \rightsquigarrow (\varphi \rightarrow \psi)$, atunci $T \vdash^{\circ} \varphi \rightsquigarrow (\varphi_1 \ldots \varphi_n \rightsquigarrow \psi)$;

(c) $T \vdash^{\circ} \varphi_1 \ldots \varphi_n \rightarrow \varphi$ ddaca $T \vdash^{\circ} \varphi_n \ldots \varphi_1 \rightsquigarrow \varphi$.

Propozitie 3.1.2 *Daca T este o teorie compatibila si $T \vdash^{\circ} \varphi_1 \ldots \varphi_n \rightarrow \varphi$, atunci avem:*

(a) daca $T \vdash^{\circ} \gamma_1 \ldots \gamma_k \rightarrow (\varphi \rightsquigarrow \psi)$, atunci $T \vdash^{\circ} \varphi_1 \ldots \varphi_n \gamma_1 \ldots \gamma_k \rightarrow \psi$;

(b) daca $T \vdash^{\circ} \gamma_1 \ldots \gamma_k \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$, atunci $T \vdash^{\circ} \gamma_1 \ldots \gamma_k \varphi_1 \ldots \varphi_n \rightarrow \psi$.

- **Teorema deductiei pentru teorii compatibile**

Rezultatul principal al acestei subsectiuni este o teorema a deductiei pentru teorii compatibile.

Teorema 3.1.1 (Teorema deductiei pentru teorii compatibile)

Fie T o teorie compatibila si φ, ψ formule arbitrare peste logica psMTL. Atunci urmatoarele sunt echivalente:

(a) $T \cup \{\varphi\} \vdash^{\circ} \psi$;

(b) $T \vdash^{\circ} \varphi \stackrel{+}{\rightarrow} \psi$;

(c) $T \vdash^{\circ} \varphi \stackrel{+}{\rightsquigarrow} \psi$.

3.2 Semantica

Semantica algebrica a logicii psMTL este data de varietatea psMTL-algebrelor.

Fie $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ o psMTL-algebra.

- **Evaluari**

Definitie 3.2.1

(i) O $\mathcal{A}$*-evaluare a variabilelor propozitionale* este o functie $e_A : \mathrm{Var} \rightarrow A$, ce asociaza fiecarei variabile propozitionale p un element $e_A(p)$ din A.

(ii) Orice $\mathcal{A}$-evaluare a variabilelor propozitionale e_A poate fi extinsa in mod unic la o $\mathcal{A}$*-evaluare a formulelor*, notata tot prin e_A, folosind operatiile lui A ca functii de adevar.

Fie T o teorie. Daca e_A este o $\mathcal{A}$-evaluare astfel incat $e_A(\psi) = 1$, pentru orice $\psi \in T$, atunci numim e_A un $\mathcal{A}$*-model* al lui T.

- **Valoarea de adevar**

Definitie 3.2.2 *Valoarea de adevar* a unei formule φ peste logica psMTL intr-o psMTL-algebra completa, notata cu $\|\varphi\|_{\mathcal{A}}$, este definita prin:

$$\|\varphi\|_{\mathcal{A}} = \bigwedge\{e_A(\varphi) \mid e_A \text{ este o } \mathcal{A}\text{-evaluare}\}.$$

Spunem ca o formula φ peste logica psMTL este *valida* intr-o psMTL-algebra completa daca $\|\varphi\|_{\mathcal{A}} = 1$.

- **Tautologii**

Fie $\mathcal{A}$ o psMTL-algebra, T o teorie si φ o formula peste logica psMTL.

Definitie 3.2.3 Formula φ este o T*-tautologie in raport cu* $\mathcal{A}$ daca urmatoarea conditie este satisfacuta:

$$e_A(T) = \{e_A(\psi) \mid \psi \in T\} = \{1\} \text{ implica } e_A(\varphi) = 1,$$

pentru orice $\mathcal{A}$-evaluare e_A.

Daca T este multimea vida, o $\emptyset$-tautologie in raport cu $\mathcal{A}$ este numita *tautologie in raport cu* $\mathcal{A}$.

- **Algebra Lindenbaum-Tarski in cazul deductiei** $\vdash$

Pentru deductia uzuala $\vdash$ definita in Sectiunea 3.1.1, algebra Lindenbaum-Tarski algebra asociata unei teorii este definita in modul clasic.

Fie T o teorie peste logica psMTL. Pentru orice formule φ, ψ, putem defini urmatoarea relatie:

$$\varphi \equiv_T \psi \text{ ddaca } T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \text{ ddaca } T \vdash \varphi \leftrightsquigarrow \psi.$$

Propozitie 3.2.1 *[20] Structura* $\mathcal{L}_T = (\mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}}/{\equiv_T}, \vee, \wedge, \odot, \to, \rightsquigarrow, 0_T, 1_T)$ *este o psMTL-algebra, numita algebra Lindenbaum-Tarski asociata lui* T.

- **Algebra Lindenbaum-Tarski in cazul deductiei** $\vdash^\circ$

Aceasta subsectiune este o contributie originala. Scopul este de a investiga cand putem construi algebra Lindenbaum-Tarski asociata unei teorii in cazul deductiei slabe $\vdash^\circ$.

Fie T o teorie peste logica psMTL. Pentru orice formule φ, ψ putem defini urmatoarele relatii:

$$\varphi \overset{\circ}{\equiv}{}_T^{\to} \psi \text{ ddaca } T \vdash^\circ \varphi \leftrightarrow \psi,$$
$$\varphi \overset{\circ}{\equiv}{}_T^{\rightsquigarrow} \psi \text{ ddaca } T \vdash^\circ \varphi \leftrightsquigarrow \psi.$$

Observam ca relatiile $\overset{\circ}{\equiv}{}_T^{\to}$ si $\overset{\circ}{\equiv}{}_T^{\rightsquigarrow}$ sunt echivalente pe $\mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}}$ care nu coincid neaparat.

Propozitie 3.2.2 *Pentru orice teorie compatibila* T, *relatiile* $\overset{\circ}{\equiv}{}_T^{\to}$ *si* $\overset{\circ}{\equiv}{}_T^{\rightsquigarrow}$ *coincid.*

Propozitie 3.2.3 *Daca* T *este o teorie compatibila peste logica psMTL, atunci structura*

$$\mathcal{L}_T^\circ = (\mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}}/\overset{\circ}{\equiv}{}_T^{\to}, \vee, \wedge, \odot, \to, \rightsquigarrow, 0_T^\circ, 1_T^\circ)$$

este o psMTL-algebra, numita algebra Lindenbaum-Tarski asociata lui T *pentru* $\vdash^\circ$.

3.2.1 Completitudine tare pentru logica psMTL

Teorema 3.2.1 (Completitudine tare pentru psMTL) *[20] Fie* T *o teorie si* φ *o formula peste logica psMTL. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $T \vdash \varphi$,

(2) pentru orice psMTL-algebra $\mathcal{A}$ *si orice* $\mathcal{A}$*-model* e_A *al lui* T, $e_A(\varphi) = 1$.

3.2.2 Completitudine tare pe lanturi pentru logica $\mathrm{psMTL^r}$

Teorema 3.2.2 (Completitudine tare pe lanturi pentru $\mathrm{psMTL^r}$) *[21] Fie T o teorie peste logica $psMTL^r$ si φ o formula. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $T \vdash \varphi$;

(2) pentru orice $psMTL^r$-algebra $\mathcal{A}$ si orice $\mathcal{A}$-model e_A al lui T, $e_A(\varphi) = 1$;

(3) pentru orice $psMTL^r$-lant $\mathcal{L}$ si orice $\mathcal{L}$-model e_L al lui T, $e_L(\varphi) = 1$.

3.2.3 Completitudine standard pentru logica $\mathrm{psMTL^r}$

Teorema 3.2.3 (Completitudine standard pentru $\mathrm{psMTL^r}$) *[28]*

Logica $psMTL^r$ este completa in raport cu psMTL-algebrele standard.

3.2.4 Completitudine standard tare finita pentru logica $\mathrm{psMTL^r}$

Aceasta subsectiune este o contributie originala si rezultatele sale se gasesc in [3]. Scopul sau este de a demonstra completitudinea standard tare finita a logicii $\mathrm{psMTL^r}$.

Teorema 3.2.4 (Completitudine standard tare finita pentru $\mathrm{psMTL^r}$)

Logica $psMTL^r$ este completa tare finit in raport cu psMTL-algebrele standard, i.e. pentru orice teorie finita T si orice formula φ peste logica $psMTL^r$, astfel incat $T \nvdash \varphi$, exista o pseudo-t-norma continua la stanga $\hat{\star}$ si o evaluare $e_{[0,1]}$ in structura $([0,1], \vee, \wedge, \hat{\star}, \rightarrow^{\hat{\star}}, \rightsquigarrow^{\hat{\star}}, 0, 1)$ astfel incat $e_{[0,1]}(\psi) = 1$, pentru orice $\psi \in T$, si $e_{[0,1]}(\varphi) \neq 1$ (unde $\rightarrow^{\hat{\star}}$ si $\rightsquigarrow^{\hat{\star}}$ sunt reziduumul stang si cel drept al lui $\hat{\star}$).

Capitolul 4

Logica psMTL calculul cu predicate

Acest capitol prezinta logicile $psMTL\forall$ si $psMTL^r\forall$ introduse de Hájek si Ševčík in [23].

Cele mai importante contributii originale din acest Capitol sunt:

· *Subsectiunea 4.1.1, in care introducem o lista de teoreme peste logica* $\mathrm{psMTL}\forall$*;*

· *Sectiunea 4.3, in care demonstram teorema de omitere a tipurilor pentru logica* $\mathrm{psMTL^r}\forall$ *logic (Teorema 4.3.1; acest rezultat se gaseste in [4]).*

4.1 Sintaxa

- **Limbajul**

Un *limbaj cu predicate* $\mathrm{J} = (\mathrm{Pred_J}, \mathrm{Const_J})$ consta intr-o multime nevida $\mathrm{Pred_J}$ de *simboluri de predicate* si o multime $\mathrm{Const_J}$ de *constante obiect*.

Simbolurile logice ale calculului cu predicate $\mathrm{psMTL}\forall$ constau in variabile obiect (multimea tuturor variabilelor obiect este notata prin Var), conectorii primitivi ai logicii psMTL, constanta $\overline{0}$ si cuantificatorii $\forall, \exists$.

- **Formulele**

Pentru un limbaj cu predicate J, notiunea de *J-formula* peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$ este definita in mod uzual. Notam prin $\mathrm{Form}^{\mathrm{J}}_{\mathrm{psMTL}\forall}$ multimea tuturor J-formulelor peste $\mathrm{psMTL}\forall$.

Ca in cazul logicii psMTL, putem defini formula $\varphi^\bullet$, pentru orice formula φ peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$, care nu are niciun efect asupra cuantificatorilor.

- **Axiomele si regulile de deductie**

Axiomele calculului cu predicate $\mathrm{psMTL}\forall$ sunt:

I. axiomele calculului propozitional psMTL;

II. o formula care are una din formele de mai jos este o axioma:

$(\forall 1)$ $(\forall x)\varphi(x) \to \varphi(t)$ (t poate substitui x in $\varphi(x)$)

$(\exists 1)$ $\varphi(t) \to (\exists x)\varphi(x)$ (t poate substitui x in $\varphi(x)$)

$(\forall 2)$ $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$ (x nu este liber in φ)

$(\exists 2)$ $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to ((\exists x)\varphi \to \psi)$ (x nu este liber in ψ)

III. daca φ este o axioma de forma $(\forall 2)$ sau $(\exists 2)$, atunci $\varphi^\bullet$ este o axioma.

Regulile de deductie ale logicii $\mathrm{psMTL}\forall$ sunt cele ale logicii psMTL si regula:

$$\text{(G)}\ \frac{\varphi}{(\forall x)\varphi}$$

- **Logica** $\mathrm{psMTL^r}\forall$

Hájek si Ševčík [23] au introdus si calculul cu predicate $\mathrm{psMTL^r}\forall$. Astfel, logica $\mathrm{psMTL^r}\forall$ are axiomele calculului propozitional $\mathrm{psMTL^r}$, axiomele pentru cuantificatori $(\forall 1)$, $(\exists 1)$, $(\forall 2)$, $(\exists 2)$ si urmatoarea axioma:

$(\forall 3)$ $(\forall x)(\varphi \vee \psi) \to ((\forall x)\varphi \vee \psi)$ (x nu este liber in ψ).

4.1.1 Deductie

In continuare, fixam J un limbaj cu predicate.

Definitie 4.1.1 [23] Fie T o teorie peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$. O formula φ este o *T-teorema* peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$ daca exista un numar natural $n \geq 1$ si o secventa de formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ astfel incat, pentru orice $i \in [n]$, una din conditiile din Definitia 3.1.1 este adevarata sau conditia de mai jos este satisfacuta:

(6) exista $k < i$ astfel incat φ_i este $(\forall x)\varphi_k$.

Notam multimea T-teoremelor peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$ prin $\mathrm{Theor}_{\mathrm{psMTL}\forall}(T)$.

Definitie 4.1.2 O teorie T peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$ se numeste *consistenta* daca exista o formula α astfel incat $T \nvdash \alpha$.

- **Teoreme peste logica** $\mathrm{psMTL}\forall$

Teoremele peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$ nu au fost investigate in literatura. Rezolvam aceasta problema, ca o contributie originala, in aceasta subsectiune.

4.1.2 Deductie slaba

Definitie 4.1.3 [23] Fie T o teorie peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$. O formula φ este o *$\circ$-T-teorema* peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$ daca exista un numar natural $n \geq 1$ si o secventa de formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ astfel incat, pentru orice $i \in [n]$, una din conditiile din Definitia 3.1.2 este adevarata (unde consideram $\mathrm{Theor}_{\mathrm{psMTL}\forall}$ in loc de $\mathrm{Theor}_{\mathrm{psMTL}}$) sau urmatoarea conditie este satisfacuta:

(4) exista $k < i$ astfel incat φ_i este $(\forall x)\varphi_k$.

Notam multimea $\circ$-T-teoremelor peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$ prin $\mathrm{Theor}^{\circ}_{\mathrm{psMTL}\forall}(T)$.

4.2 Semantica

In continuare, fixam o psMTL-algebra $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ si un limbaj cu predicate $\mathrm{J} = (\mathrm{Pred}, \mathrm{Const})$.

- **Structuri**

Definitie 4.2.1 O *$\mathcal{A}$-structura pentru J* este un triplet

$$\mathcal{M} = (M, (M_P)_{P \in \mathrm{Pred}}, (m_c)_{c \in \mathrm{Const}}),$$

unde M este o multime nevida, pentru orice simbol de predicat n-ar P, M_P este o functie $M_P : M^n \rightarrow A$, si pentru orice constanta obiect c, $m_c \in M$.

- **Evaluari**

Definitie 4.2.2 Fie $\mathcal{M}$ o $\mathcal{A}$-structura pentru J. O *$\mathcal{M}$-evaluare* a variabilelor obiect este o functie $v_M : \mathrm{Var} \rightarrow M$, care asociaza fiecarei variabile obiect x un element $v_M(x)$ din M.

Fie v_M o $\mathcal{M}$-evaluare, x o variabila obiect si $a \in M$. Notam prin $v_M[x \mapsto a]$ $\mathcal{M}$-evaluarea definita prin: $v_M[x \mapsto a](x) = a$ si $v_M[x \mapsto a](y) = v_M(y)$, pentru orice variabila obiect $y \neq x$.

- **Valoarea de adevar**

Definitie 4.2.3 Fie $\mathcal{M}$ o $\mathcal{A}$-structura pentru J si v_M o $\mathcal{M}$-evaluare.

(i) *Valoarea unui termen* t in $\mathcal{M}$ pentru evaluare v_M, notata prin $\| t \|_{\mathcal{M},v_M}$, este definita prin inductie dupa cum urmeaza:

$\| x \|_{\mathcal{M},v_M} = v_M(x)$, pentru orice variabila obiect x,

$\| c \|_{\mathcal{M},v_M} = m_c$, pentru orice constanta obiect c.

(ii) *Valoarea unei formule* φ in $\mathcal{M}$ pentru evaluarea v_M, notatat prin $\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M}$, este definita prin inductie dupa cum urmeaza:

$\| P(t_1, \ldots, t_n) \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M} = M_P(\| t_1 \|_{\mathcal{M},v_M}, \ldots, \| t_n \|_{\mathcal{M},v_M})$

$\| \varphi \,\&\, \psi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M} = \| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M} \odot \| \psi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M}$

$\| \varphi \diamondsuit \psi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M} = \| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M} \diamondsuit \| \psi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M}$ unde $\diamondsuit \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \rightsquigarrow\}$

$\| (\forall x)\varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M} = \bigwedge\{\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M[x\mapsto a]} \mid a \in M\}$

$\| (\exists x)\varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M} = \bigvee\{\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M[x\mapsto a]} \mid a \in M\}$.

Daca infimumurile si supremumurile necesare pentru definirea valorii unei formule φ nu exista, spunem ca valoarea lui φ *nu este definita*.

Definitie 4.2.4 O $\mathcal{A}$-structura $\mathcal{M}$ pentru J se numeste *sigura* daca $\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M}$ este definita pentru orice formula φ si orice $\mathcal{M}$-evaluare v_M.

Definitie 4.2.5 Fie $\mathcal{M}$ o $\mathcal{A}$-structura sigura pentru J. *Valoarea de adevar* a unei formule φ in $\mathcal{M}$, notata prin $\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}}$, este definita prin:

$$\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}} = \bigwedge\{ \| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M},v_M} \mid v_M \text{ este o } \mathcal{M}\text{-evaluare}\}.$$

- **Modele**

Definitie 4.2.6 Fie $\mathcal{M}$ o $\mathcal{A}$-structura sigura pentru J si T o teorie peste logica psMTL$\forall$. Atunci $\mathcal{M}$ se numeste un $\mathcal{A}$-*model* pentru T daca $\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}} = 1$, pentru orice $\varphi \in T$.

- **Tautologii**

Fie T o teorie si φ o formula peste logica psMTL$\forall$.

Spunem ca φ este o T-*tautologie in raport cu* $\mathcal{A}$ daca pentru orice $\mathcal{A}$-model $\mathcal{M}$ al lui T avem $\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}} = 1$. Faptul ca φ este o T-tautologie in raport cu $\mathcal{A}$ este notat prin

$$T \models_{\mathcal{A}} \varphi.$$

4.2.1 Completitudine tare pentru logica $\mathrm{psMTL}\forall$

Teorema 4.2.1 (Completitudine tare pentru $\mathrm{psMTL}\forall$) *[23] Fie T o teorie si φ o formula inchisa peste logica $psMTL\forall$. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $T \vdash \varphi$,

(2) pentru orice psMTL-algebra $\mathcal{A}$ si orice $\mathcal{A}$-model $\mathcal{M}$ al lui T, $\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}} = 1$.

4.2.2 Completitudine tare pe lanturi pentru logica $\mathrm{psMTL^r}\forall$

Ca in cazul calculului propozitional $\mathrm{psMTL^r}$, teorema de completitudine tare pe lanturi poate fi obtinuta doar pentru logica $\mathrm{psMTL^r}\forall$ si acest rezultat a fost demonstrat tot de catre Hájek si Ševčík.

Teorema 4.2.2 (Completitudine tare pe lanturi pentru $\mathrm{psMTL^r}\forall$) *[23] Fie T o teorie si φ o formula inchisa peste logica $psMTL^r\forall$. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $T \vdash \varphi$,

(2) pentru orice psMTL-algebra $\mathcal{A}$ si orice $\mathcal{A}$-model $\mathcal{M}$ al lui T, $\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}} = 1$,

(3) pentru orice psMTL-lant $\mathcal{L}$ si orice $\mathcal{L}$-model $\mathcal{M}$ al lui T, $\| \varphi \|^{\mathcal{L}}_{\mathcal{M}} = 1$.

4.3 Teorema de omitere a tipurilor pentru logica $\mathrm{psMTL^r}\forall$

In aceasta sectiune introducem, ca o contributie originala, un rezultat din teoria modelelor clasica in contextul logicii $\mathrm{psMTL^r}\forall$. Acest rezultat se gaseste in [4].

In continuare, fixam un limbaj cu predicate numarabil $\mathrm{J} = (\mathrm{Pred}, \mathrm{Const})$, o psMTL-algebra $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ si $\mathcal{M}$ o $\mathcal{A}$-structura pentru J. Notam n-uplul de elemente $m_1, \ldots, m_n \in M$ prin $\overline{m}$.

Definitie 4.3.1 Spunem ca $\overline{m} \in M^n$ *satisface o formula* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *in* $\mathcal{M}$ daca exista o $\mathcal{M}$-evaluare v_M astfel incat $v_M(x_i) = m_i$, $i \in [n]$, si $\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}, v_M} = 1$.

Definitie 4.3.2 Fie Σ o teorie peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$ astfel incat fiecare formula din Σ contine cel mult variabilele $x_1, \ldots, x_n$ libere.

1) Spunem ca $\mathcal{M}$ *realizeaza* Σ daca pentru orice formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ din Σ, exista $\overline{m} \in M^n$ care satisface $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathcal{M}$.

2) Spunem ca $\mathcal{M}$ *omite* Σ daca $\mathcal{M}$ nu realizeaza Σ.

Definitie 4.3.3 Fie Σ o teorie peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$ astfel incat orice formula din Σcontine cel mult variabilele $x_1, \ldots, x_n$ libere. Daca T este o teorie peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$, atunci Σ este *T-consistenta* daca exista un $\mathcal{A}$-model $\mathcal{M}'$ al lui T astfel incat $\mathcal{M}'$ realizeaza Σ.

Definitie 4.3.4 Fie T o teorie peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$ si Σ o teorie ca mai sus. Spunem ca Σ este *izolata* in T daca exista o formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ astfel incat:

1) φ este T-consistenta,

2) pentru orice $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma$, $T \models_{\mathcal{A}} \varphi \to \psi$,

2′) pentru orice $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma$, $T \models_{\mathcal{A}} \varphi \rightsquigarrow \psi$.

Lema 4.3.1 *Fie T o teorie peste logica $psMTL\forall$ si Σ o teorie ca mai sus. Daca Σ este izolata in T, atunci Σ este T-consistenta.*

Definitie 4.3.5 Fie T o teorie peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$ si Σ o teorie ca mai sus. Spunem ca Σ este *non-izolata* in T daca pentru orice formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ care este T-consistenta, exista $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma$ astfel incat

$$\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}'} < 1,$$

unde $\mathcal{M}'$ este $\mathcal{A}$-modelul lui T care realizeaza φ.

Teorema 4.3.1 (Teorema de omitere a tipurilor pentru $\mathrm{psMTL^r}\forall$**)** *Fie T o teorie consistenta peste logica $psMTL^r\forall$ si Σ o teorie ca mai sus. Daca Σ este non-izolata in T, atunci exista un model numarabil al lui T care omite Σ.*

Capitolul 5

Unele extensii ale logicii psMTL

Scopul acestui Capitol este de a investiga unele extensii ale logicii psMTL, mai exact acelea corespunzatoare claselor particulare de psMTL-algebre prezentate in Sectiunea 2.4.

Cele mai importante contributii originale din acest Capitol sunt:

· *Sectiunea 5.1, in care definim formal notiunea de extensie a logicii psMTL;*

· *Secttunea 5.5, in care introducem logica produs necomutativa, rezolvand astfel o problema deschisa indicata de catre Hájek [21]. Mai mult, introducem o logica probabilista bazata pe logica produs necomutativa, capabila sa modeleze probabilitatea eventimentelor incerte (aceste rezultate se gasesc in [7]);*

· *Sectiunea 5.6, in care introducem logica psSMTL, o extensie a logicii psMTL. Rezultatul principal al acestei sectiuni este teorema de completitudine standard pentru logica* $\mathrm{psSMTL^r}$*, Teorema 5.6.1 (aceste cercetari se gasesc in [5]);*

· *Sectiunea 5.7, in care introducem extensia psIMTL a logicii psMTL, iar principalul rezultat este teorema de completitudine standard pentru logica* $\mathrm{psIMTL^r}$*, Teorema 5.7.1 (aceste rezultate se gasesc in [5]).*

5.1 Extensii ale logicii psMTL logic - teoria generala

Definitie 5.1.1

(1) O *axioma* data de o formula $\Phi(p_1, \ldots, p_n)$ consta in multimea de formule de forma $\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ obtinute prin substituirea cu φ_i a lui p_i ($i \in [n]$) in formula $\Phi(p_1, \ldots, p_n)$.

(2) Un sistem logic $\mathcal{C}$ este o *extensie a logicii psMTL* daca rezulta din logica psMTL prin adaugarea unui numar (finit sau infinit) de axiome la axiomele sale.

(3) Fie $\mathcal{C}$ o extensie a logicii psMTL si $\mathcal{A}$ o psMTL-algebra. Atunci $\mathcal{A}$ este o *$\mathcal{C}$-algebra* daca toate axiomele lui $\mathcal{C}$ sunt tautologii in raport cu $\mathcal{A}$.

Teorema 5.1.1 (Completitudine tare pentru extensiile lui psMTL) *Fie $\mathcal{C}$ o extensie a logicii psMTL, T o teorie si φ o formula peste logica psMTL. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $T \vdash_{\mathcal{C}} \varphi$,

(2) pentru orice $\mathcal{C}$-algebra $\mathcal{A}$ si orice $\mathcal{A}$-model e_A al lui T, $e_A(\varphi) = 1$.

Extensiile logicii $\mathrm{psMTL^r}$ sunt definite corespunzator. In acest caz, poate fi obtinuta si teorema de completitudine tare pe lanturi.

Teorema 5.1.2 (Completitudine tare pe lanturi pentru extensiile lui $\mathrm{psMTL^r}$) *Fie $\mathcal{C}^r$ o extensie a logicii $psMTL^r$, T o teorie si φ o formula peste logica $psMTL^r$. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $T \vdash_{\mathcal{C}^r} \varphi$,

(2) pentru orice $\mathcal{C}$-algebra $\mathcal{A}$ si orice $\mathcal{A}$-model e_A al lui T, $e_A(\varphi) = 1$,

(3) pentru orice $\mathcal{C}$-lant $\mathcal{L}$ si orice $\mathcal{L}$-model e_L al lui T, $e_L(\varphi) = 1$.

Calculul cu predicate al extensiilor logicii psMTL sau $\mathrm{psMTL^r}$ sunt definite in mod natural.

Teorema 5.1.3 (Completitudine tare pentru extensiile lui $\mathrm{psMTL}\forall$) *Fie $\mathcal{C}\forall$ o extensie a logicii $psMTL\forall$, T o teorie si φ o formula inchisa peste logica $psMTL\forall$. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $T \vdash_{\mathcal{C}\forall} \varphi$,

(2) pentru orice $\mathcal{C}$-algebra $\mathcal{A}$ si orice $\mathcal{A}$-model $\mathcal{M}$ al lui T, $\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}} = 1$.

Teorema 5.1.4 (Completitudine tare pe lanturi pentru extensiile lui $\mathrm{psMTL^r}\forall$) *Fie $\mathcal{C}^r\forall$ o extensie a logicii $psMTL^r\forall$, T o teorie si φ o formula inchisa peste logica $psMTL^r\forall$. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $T \vdash_{\mathcal{C}^r\forall} \varphi$,

(2) pentru orice $\mathcal{C}$-algebra $\mathcal{A}$ si orice $\mathcal{A}$-model $\mathcal{M}$ al lui T, $\| \varphi \|^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}} = 1$,

(3) pentru orice $\mathcal{C}$-lant $\mathcal{L}$ si orice $\mathcal{L}$-model $\mathcal{M}$ al lui T, $\| \varphi \|^{\mathcal{L}}_{\mathcal{M}} = 1$.

5.2 Logica MTL

Logica MTL este extensia logicii psMTL prin adaugarea unei axiome care forteaza conjunctia $\&$ sa fie comutativa:

$$(\text{A}\&)\ \varphi\&\psi \to \psi\&\varphi.$$

5.3 Logica psBL

Logica psBL a fost introdusa de Hájek [20] ca analoaga necomutativa a logicii BL. Punctul slab al acestui sistem logic este acela ca nu are completitudine standard.

Logica psBL este extensia logicii psMTL prin adaugarea corespondetei necomutative a axiomei dizivibilitatii:

$$(\text{psDiv})\ (\varphi \wedge \psi) \to ((\varphi \to \psi)\&\varphi)$$

$$(\text{psDiv}^\bullet)\ (\varphi \wedge \psi) \rightsquigarrow (\varphi\&(\varphi \rightsquigarrow \psi))$$

Structurile algebrice corespunzatoare logicii psBL sunt psBL-algebrele.

5.4 Logica Łukasiewicz necomutativa PŁ

Logica Łukasiewicz necomutativa PŁ a fost introdusa de catre I. Leuştean [31] ca fiind generalizarea necomutativa a logicii Łukasiewicz logic si a fost printre primele sisteme logice necomutative studiate.

Limbajul calculului propozitional PŁ consta intr-o multime numarabila de variabile propozitionale si conectorii primitivi $\neg$, $\sim$, $\to$, $\rightsquigarrow$. Axiomele logicii PŁ sunt:

I. O formula care are una din urmatoarele forme este o axioma:

(P1) $\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \varphi)$

(P2) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \rightsquigarrow (\varphi \to \chi))$

(P3) $((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \psi) \to ((\psi \to \varphi) \rightsquigarrow \varphi)$

(P4) $(\neg\psi \rightsquigarrow \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

(P5) $\sim (\varphi \to \neg\psi) \to \neg(\psi \rightsquigarrow \sim \varphi)$

II. Daca φ este o axioma, atunci $\varphi^\bullet$ este tot o axioma.

Propozitie 5.4.1 *Logica Łukasiewicz necomutativa PŁ este extensia logicii psBL prin axiomele:*

$(\mathrm{psINV})\ \sim\neg\varphi\to\varphi$

$(\mathrm{psINV}^{\bullet})\ \neg\sim\varphi\rightsquigarrow\varphi.$

Structurile algebrice corespunzatoare logicii $\mathrm{P}Ł$ sunt psMV-algebrele.

5.5 Logica produs necomutativa $\mathrm{ps\Pi L}$

Aceasta sectiune este o contributie originala si rezultatele sale se gasesc in [7]. Scopul acestei sectiuni este de a introduce logica $\mathrm{ps\Pi L}$, ca generalizarea la cazul necomutativ a logicii produs $\Pi\mathrm{L}$ introdusa de Hájek, Godo si Esteva [22], si de a dezvolta o logica probabilista bazata pe logica $\mathrm{ps\Pi L}$.

5.5.1 Sintaxa si semantica

Limbajul logicii $\mathrm{ps\Pi L}$ este acelasi cu cel al logicii psMTL. Axiomele logicii $\mathrm{ps\Pi L}$ sunt:

I. o formula care are una din formele de mai jos este o axioma:

$(\mathrm{ps\Pi}A1)\quad \varphi\to(\psi\to\varphi)$

$(\mathrm{ps\Pi}A2)\quad (\varphi\to\psi)\rightsquigarrow((\psi\to\chi)\rightsquigarrow(\varphi\to\chi))$

$(\mathrm{ps\Pi}A3)\quad \varphi\to\overline{1}$ si $\overline{0}\to\varphi$

$(\mathrm{ps\Pi}A4)\quad (\varphi\&(\psi\&\chi))\to((\varphi\&\psi)\&\chi)$

$(\mathrm{ps\Pi}A5a)\quad (\varphi\to(\psi\to\chi))\to((\varphi\&\psi)\to\chi)$

$(\mathrm{ps\Pi}A5b)\quad ((\varphi\&\psi)\to\chi)\to(\varphi\to(\psi\to\chi))$

$(\mathrm{ps\Pi}A6)\quad (\varphi\to\psi)\to((\varphi\&\chi)\to(\psi\&\chi))$

$(\mathrm{ps\Pi}A7)\quad \sim\neg\varphi\to(((\varphi\&\chi)\to(\psi\&\chi))\to(\varphi\to\psi))$

$(\mathrm{ps\Pi}A8)\quad (\chi\to\varphi)\to((\chi\to\psi)\to(\chi\to(\varphi\wedge\psi)))$

$(\mathrm{ps\Pi}A9)\quad (\varphi\to\chi)\to((\psi\to\chi)\to((\varphi\vee\psi)\to\chi))$

$(\mathrm{ps\Pi}A10)\quad (\varphi\to\psi)\vee(\psi\to\varphi)$

$(\mathrm{ps\Pi}A11)\quad (\varphi\wedge\neg\varphi)\to\overline{0}$

$(\mathrm{ps\Pi}A12a)\quad (\varphi\wedge\psi)\to((\varphi\to\psi)\&\varphi)$

$(\mathrm{ps\Pi}A12b)\quad ((\varphi\to\psi)\&\varphi)\to(\varphi\wedge\psi)$

$(\mathrm{ps\Pi}A13a)\quad (\varphi\vee\psi)\to(((\varphi\rightsquigarrow\psi)\to\psi)\wedge((\psi\rightsquigarrow\varphi)\to\varphi))$

$(\mathrm{ps\Pi}A13b)\quad (((\varphi\rightsquigarrow\psi)\to\psi)\wedge((\psi\rightsquigarrow\varphi)\to\varphi))\to(\varphi\vee\psi)$

II. daca φ este o axioma, atunci $\varphi^\bullet$ este tot o axioma.

Regulile de deductie ale logicii psΠL sunt cele ale logicii psMTL.

Propozitie 5.5.1 *Logica psΠL este o extensie a logicii psBL prin axiomele:*

$(\mathrm{ps}\Pi 1) \sim \neg\varphi \to (((\varphi \& \chi) \to (\psi \& \chi)) \to (\varphi \to \psi))$

$(\mathrm{ps}\Pi 2)(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \overline{0}$

si $(ps\Pi 1^\bullet)$, $(ps\Pi 2^\bullet)$.

Structurile algebrice corespunzatoare logicii psΠL sunt algebrele psProdus.

5.5.2 Logica psΠL probabilista: logica $\mathrm{SFP}(\mathrm{ps}\Pi\mathrm{L}, \mathrm{ps}\Pi\mathrm{L})$

Scopul acestei subsectiuni este de a introduce logica $\mathrm{SFP}(\mathrm{ps}\Pi\mathrm{L}, \mathrm{ps}\Pi\mathrm{L})$, o logica probabilista bazata pe logica psΠL capabila sa modeleze probabilitatea evenimentelor incerte.

Limbajul logicii $\mathrm{SFP}(\mathrm{ps}\Pi\mathrm{L}, \mathrm{ps}\Pi\mathrm{L})$ este construit peste limbajul logicii psΠL prin adaugarea unui conector unar P, interpretat ca "probabil".

Axiomele logicii $\mathrm{SFP}(\mathrm{ps}\Pi\mathrm{L}, \mathrm{ps}\Pi\mathrm{L})$ sunt:

I. axiomele logicii psΠL,

II. o formula care are una din formele de mai jos este o axioma:

$(P1)$ $P(\varphi \to \psi) \leftrightarrow P(\varphi) \to P(\varphi \wedge \psi)$

$(P2a)$ $P(\varphi \& \psi) \leftrightarrow P(\varphi) \& P(\varphi \rightsquigarrow (\varphi \& \psi))$

$(P2b)$ $P(\varphi \& \psi) \leftrightarrow P(\varphi \to (\varphi \& \psi)) \& P(\varphi)$

$(P3)$ $P(P(\varphi) \& P(\psi)) \leftrightarrow P(\varphi) \& P(\psi)$

$(P4)$ $P(P(\varphi) \to P(\psi)) \leftrightarrow P(\varphi) \to P(\psi)$

$(P5)$ $P(P(\varphi) \vee P(\psi)) \leftrightarrow P(\varphi) \vee P(\psi)$

III. daca φ este o formula de forma $(P1)$ sau $(P4)$, atunci $\varphi^\bullet$ este tot o axioma.

Regulile de deductie ale logicii $\mathrm{SFP}(\mathrm{ps}\Pi\mathrm{L}, \mathrm{ps}\Pi\mathrm{L})$ sunt cele ale logicii psΠL si regula:

$$\text{(NEC)}\ \frac{\varphi}{P(\varphi)}.$$

Structurile algebrice corespunzatoare logicii $\mathrm{SFP}(\mathrm{ps}\Pi\mathrm{L}, \mathrm{ps}\Pi\mathrm{L})$ sunt algebrele psProdus cu stare.

5.6 Logica psSMTL

Aceasta sectiune este o contributie originala si rezultatele sale se gasesc in [5].

5.6.1 Sintaxa si semantica

Logica psSMTL este extensia logicii psMTL prin adaugarea axiomelor:

(psΠ2) $\varphi \wedge \neg\varphi \to \overline{0}$,

(psΠ2$^\bullet$) $\varphi\wedge \sim \varphi \rightsquigarrow \overline{0}$.

Structurile algebrice corespunzatoare logicii psSMTL sunt psSMTL-algebrele.

5.6.2 Completitudinea standard pentru logica psSMTL^r

In aceasta subsectiune demonstram ca logica psSMTL este logica pseudo-t-normelor stricte continue la stanga.

Teorema 5.6.1 (Completitudine standard pentru psSMTL$^{\mathrm{r}}$) *Logica $psSMTL^r$ este completa in raport cu psSMTL-algebrele standard, i.e. pentru orice formula φ astfel incat $\nvdash_{\mathrm{psSMTL^r}} \varphi$, exista o pseudo-t-norma stricta continua la stanga $\hat{\star}$ si o evaluare $e_{[0,1]}$ in $([0,1], \vee, \wedge, \hat{\star}, \to^{\hat{\star}}, \rightsquigarrow^{\hat{\star}}, 0, 1)$ astfel incat $e_{[0,1]}(\varphi) \neq 1$ (unde $\to^{\hat{\star}}$ si $\rightsquigarrow^{\hat{\star}}$ sunt reziduumul stang si cel drept al lui $\hat{\star}$).*

5.7 Logica psIMTL

Aceasta sectiune este o contributie originala si rezultatele sale se gasesc in [5].

5.7.1 Sintaxa si semantica

Logica psIMTL este extensia logicii psMTL prin adaugarea axiomelor:

(psINV) $\sim \neg\varphi \to \varphi$

(psINV$^\bullet$) $\neg \sim \varphi \rightsquigarrow \varphi$.

Propozitie 5.7.1 *Logica Łukasiewicz necomutativa PŁ este extensia logicii $psIMTL$ prin adaugarea axiomelor $(psDiv)$, $(psDiv^\bullet)$.*

Structurile algebrice corespunzatoare logicii psIMTL sunt psIMTL-algebrele.

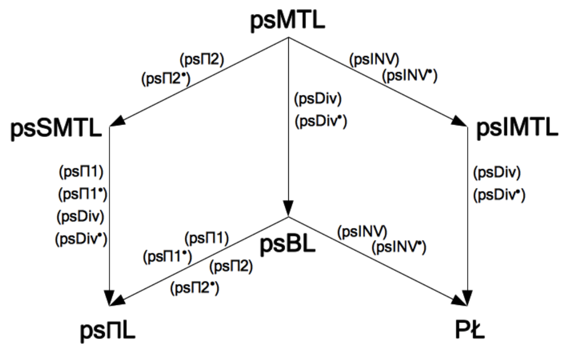

Figura 5.1: Logica psMTL si extensiile sale

5.7.2 Completitudinea standard pentru logica $\mathrm{psIMTL^r}$

In aceasta subsectiune demonstram completitudinea standard pentru logica $\mathrm{psIMTL^r}$.

Teorema 5.7.1 (Completitudine standard pentru $\mathrm{psIMTL^r}$) *Logica $psIMTL^r$ este completa in raport cu psIMTL-algebrele standard, i.e. pentru orice formula φ astfel incat $\nvdash_{\mathrm{psIMTL^r}} \varphi$, exista o pseudo-t-norma continua la stanga $\hat{\star}$ ale carei negatii satisfac conditia (pDN) si o evaluare $e_{[0,1]}$ in $([0,1], \vee, \wedge, \hat{\star}, \rightarrow^{\hat{\star}}, \rightsquigarrow^{\hat{\star}}, 0, 1)$ astfel incat $e_{[0,1]}(\varphi) \neq 1$ (unde $\rightarrow^{\hat{\star}}$ si $\rightsquigarrow^{\hat{\star}}$ sunt reziduumul stang si cel drept al lui $\hat{\star}$).*

5.8 Legaturile intre logicile studiate

In Figura 5.1 indicam legaturile intre logicile studiate in acest Capitol.

Capitolul 6

Semantica de tip Kripke pentru logica psMTL si unele din extensiile sale

Scopul acestui Capitol este de a dezvolta o noua semantica la logica psMTL, si anume o semantica de tip Kripke.

Acest Capitol este o contributie originala si rezultatele din Sectiunile 6.1, 6.2, 6.4 si Subsectiunea 6.3.1 se gasesc in [6].

6.1 Semantica de tip Kripke pentru calculul propozitional

6.1.1 Cadre propozitionale de tip pseudo-Kripke

Definitie 6.1.1

(i) Un *cadru propozitional de tip pseudo-Kripke* este o structura de forma

$$\mathcal{M} = (M, \leq, \odot, 0, 1)$$

astfel incat urmatoarele conditii sunt satisfacute:

1. $\mathcal{M}$ este un poim marginit liniar ordonat;
2. pentru orice multime I si $x, y_i \in M$, $i \in I$, urmatoarele conditii sunt adevarate, cand supremumurile de mai jos exista:

$$x \odot (\bigvee_{i \in I} y_i) = \bigvee_{i \in I}(x \odot y_i) \text{ si } (\bigvee_{i \in I} y_i) \odot x = \bigvee_{i \in I}(y_i \odot x).$$

(ii) Un cadru propozitional de tip pseudo-Kripke $\mathcal{M} = (M, \leq, \odot, 0, 1)$ se numeste *reziduat* daca $\mathcal{M}$ este un porim marginit liniar ordonat.

(iii) Un cadru propozitional de tip pseudo-Kripke $\mathcal{M} = (M, \leq, \odot, 0, 1)$ se numeste *complet* daca $\leq$ este o ordine completa pe M.

6.1.2 Modele propozitionale de tip pseudo-Kripke

Definitie 6.1.2

(i) O *relatie forcing pe un cadru propozitional de tip pseudo-Kripke* $\mathcal{M}$ este o relatie binara intre $\mathcal{M}$ si variabilele propozitionale ale logicii psMTL, i.e.

$$\Vdash \ \subseteq \mathcal{M} \times \mathrm{Var}$$

ce satisface conditiile de mai jos:

(a) daca $a \Vdash p$ si $b \leq a$, atunci $b \Vdash p$,

(b) $0 \Vdash p$,

pentru orice $a, b \in M$ si $p \in \mathrm{Var}$.

(ii) O relatie forcing $\Vdash$ pe un cadru propozitional de tip pseudo-Kripke $\mathcal{M}$ poate fi extinsa in mod unic la o relatie, notata tot prin $\Vdash$, intre $\mathcal{M}$ si formulele logicii psMTL, i.e.

$$\Vdash \ \subseteq \mathcal{M} \times \mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}}$$

prin urmatoarele clauze:

(1) $a \Vdash \overline{0}$ ddaca $a = 0$;

(2) $a \Vdash \varphi \wedge \psi$ ddaca $a \Vdash \varphi$ si $a \Vdash \psi$;

(3) $a \Vdash \varphi \vee \psi$ ddaca ori $a \Vdash \varphi$ ori $a \Vdash \psi$;

(4) $a \Vdash \varphi \& \psi$ ddaca exista b, c astfel incat $b \Vdash \varphi$, $c \Vdash \psi$ si $a \leq b \odot c$;

(5) $a \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ ddaca pentru orice b, daca $b \Vdash \varphi$, atunci $a \odot b \Vdash \psi$;

(6) $a \Vdash \varphi \rightsquigarrow \psi$ ddaca pentru orice b, daca $b \Vdash \varphi$, atunci $b \odot a \Vdash \psi$;

pentru orice $a, b, c \in M$ si orice formule $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}}$.

Definitie 6.1.3 O relatie forcing $\Vdash$ pe un cadru propozitional de tip pseudo-Kripke $\mathcal{M}$ se numeste *relatie r-forcing* daca multimea $\{x \in M \mid x \Vdash p\}$ are un maxim, pentru orice $p \in \mathrm{Var}$.

Definitie 6.1.4

(i) Un *model propozitional de tip pseudo-Kripke* este o pereche $(\mathcal{M}, \Vdash)$, unde $\mathcal{M}$ este un cadru propozitional de tip pseudo-Kripke si $\Vdash$ este o relatie forcing pe $\mathcal{M}$.

(ii) Un model propozitional de tip pseudo-Kripke $(\mathcal{M}, \Vdash)$ se numeste *reziduat* daca $\mathcal{M}$ este reziduat si $\Vdash$ este o relatie r-forcing pe $\mathcal{M}$.

(iii) Un model propozitional de tip pseudo-Kripke $(\mathcal{M}, \Vdash)$ se numeste *complet* daca $\mathcal{M}$ este complet si $\Vdash$ este o relatie r-forcing pe $\mathcal{M}$.

Spunem ca o formula φ peste logica psMTL este *valida* intr-un model propozitional de tip pseudo-Kripke $(\mathcal{M}, \Vdash)$ daca $1 \Vdash \varphi$.

- **Proprietati ale modelelor propozitionale de tip pseudo-Kripke**

Propozitie 6.1.1 *Pentru orice formula φ a logicii psMTL si orice x, y dintr-un model propozitional de tip pseudo-Kripke $(\mathcal{M}, \Vdash)$, avem urmatoarele:*

$$\textit{daca } x \Vdash \varphi \textit{ si } y \leq x, \textit{ atunci } y \Vdash \varphi.$$

Teorema 6.1.1 *Orice teorema peste logica psMTL este valida in orice model propozitional de tip pseudo-Kripke.*

- **Proprietati ale modelelor propozitionale de tip pseudo-Kripke reziduate**

Propozitie 6.1.2 *Fie $(\mathcal{M}, \Vdash)$ un model propozitional de tip pseudo-Kripke reziduat.Atunci, pentru orice formula φ peste logica psMTL , multimea $\{x \in M \mid x \Vdash \varphi\}$ are un maxim.*

- **Modele propozitionale de tip pseudo-Kripke pentru logica** $\mathrm{psMTL}^{\mathrm{r}}$

Toate definitiile si rezultatele de mai sus asupra modelelor propozitionale de tip pseudo-Kripke pentru logica psMTL pot fi reformulate pentru logica $\mathrm{psMTL}^{\mathrm{r}}$ logic.

Teorema 6.1.2 *Orice teorema peste logica $psMTL^r$ este valida in orice model propozitional de tip pseudo-Kripke.*

6.2 Semantica de tip Kripke pentru calculul cu predicate

6.2.1 Cadre cu predicate de tip pseudo-Kripke

In continuare, fie J un limbaj cu predicate.

Definitie 6.2.1 Un *cadru cu predicate de tip pseudo-Kripke* este o pereche de forma $(\mathcal{M},\mathcal{U})$, unde $\mathcal{M}$ este cadru propozitional de tip pseudo-Kripke complet si $\mathcal{U} = (U,(U_P)_{P\in\mathrm{Pred}},(u_c)_{c\in\mathrm{Cont}})$ este o $\mathcal{M}$-structura pentru J.

6.2.2 Modele cu predicate de tip pseudo-Kripke

Definitie 6.2.2

(i) O *relatie forcing pe un cadru cu predicate de tip pseudo-Kripke* $(\mathcal{M},\mathcal{U})$ este o relatie r-forcing $\Vdash$ intre $\mathcal{M}$ si formulele atomice inchise ale logicii $\mathrm{psMTL}\forall$, definita ca in Definitia 6.1.2 (i).

(ii) O relatie forcing $\Vdash$ pe un cadru cu predicate de tip pseudo-Kripke $(\mathcal{M},\mathcal{U})$ poate fi extinsa in mod unic la o relatie, notata tot cu $\Vdash$, intre $\mathcal{M}$ si formulele $\mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}\forall}$ logicii $\mathrm{psMTL}\forall$ prin clauzele (1)-(6) ale Definitiei 6.1.3 pentru conectorii propozitionali si prin urmatoarele clauze pentru cuantificatori:

(7) $a \Vdash (\forall x)\varphi(x)$ ddaca pentru orice $u\in U$, $a\Vdash\varphi(u)$,

(8) $a \Vdash (\exists x)\varphi(x)$ ddaca pentru orice $b<a$, exista $c>b$ si $u\in U$ astfel incat $c\Vdash\varphi(u)$.

pentru orice $a,b,c\in M$ si orice formula $\varphi\in\mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}\forall}$.

Definitie 6.2.3 Un *model cu predicate de tip pseudo-Kripke* este un triplet $(\mathcal{M},\mathcal{U},\Vdash)$, unde $(\mathcal{M},\mathcal{U})$ este un cadru cu predicate de tip pseudo-Kripke si $\Vdash$ este o relatie forcing pe $(\mathcal{M},\mathcal{U})$.

Spunem ca o formula φ a logicii $\mathrm{psMTL}\forall$ este *valida* intr-un model cu predicate de tip pseudo-Kripke $(\mathcal{M},\mathcal{U},\Vdash)$ daca $1\Vdash\varphi$.

- **Proprietatile modelelor cu predicate de tip pseudo-Kripke**

Propozitie 6.2.1 *Pentru orice formula φ a logicii $psMTL\forall$ si orice a,b dintr-un model cu predicate de tip pseudo-Kripke $(\mathcal{M},\mathcal{U},\Vdash)$, avem urmatoarele:*

$$\textit{daca } a\Vdash\varphi \textit{ si } b\le a, \textit{ atunci } b\Vdash\varphi.$$

Teorema 6.2.1 *Orice teorema peste logica $psMTL\forall$ este valida in orice model cu predicate de tip pseudo-Kripke.*

Propozitie 6.2.2 *Fie $(\mathcal{M},\mathcal{U},\Vdash)$ un model cu predicate de tip pseudo-Kripke. Atunci, pentru orice formula φ a logicii $psMTL\forall$, multimea $\{a\in M \mid a\Vdash\varphi\}$ are un maxim.*

- **Modele cu predicate de tip pseudo-Kripke pentru logica** $\mathrm{psMTL^r}\forall$

Toate notiunile pentru modele cu predicate de tip pseudo-Kripke pentru logica $\mathrm{psMTL}\forall$ pot fi reformulate pentru logica $\mathrm{psMTL^r}\forall$.

Teorema 6.2.2 *Orice teorema peste logica $psMTL^r\forall$ este valida in orice model cu predicate de tip pseudo-Kripke.*

6.3 Completitudine Kripke pentru logicile $\mathrm{psMTL^r}$ si $\mathrm{psMTL^r}\forall$

6.3.1 Completitudine Kripke pentru logica $\mathrm{psMTL^r}$

Teorema 6.3.1 *Fiet φ o formula a logicii $psMTL^r$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:*

(1) $\vdash_{psMTL^r} \varphi$;

(2) φ este valida in orice model propozitional de tip pseudo-Kripke;

(3) φ este valida in orice model propozitional de tip pseudo-Kripke de forma

$$(([0,1], \leq, \odot, 0, 1), \Vdash),$$

unde $\odot$ este o pseudo-t-norma continua la stanga si $\Vdash$ este orice relatie forcing.

6.3.2 Completitudine Kripke pentru logica $\mathrm{psMTL^r}\forall$

Urmatorul rezultat este o problema deschisa indicata in [6].

Teorema 6.3.2 *Fie φ o formula inchisa a logicii $psMTL^r\forall$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:*

(1) $\vdash_{psMTL^r\forall} \varphi$;

(2) φ este valida in orice model cu predicate de tip pseudo-Kripke;

(3) φ este o tautologie in raport cu orice $psMTL^r$-lant complet.

6.4 Completitudine standard pentru logica $\mathrm{psMTL^r}\forall$

Teorema 6.4.1 (Completitudine standard pentru logica $\mathrm{psMTL^r}\forall$) *Fie φ o formula inchisa a logicii $psMTL^r\forall$. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $\vdash_{psMTL^r\forall} \varphi$*;*

(2) φ *este valida in orice model cu predicate de tip pseudo-Kripke de forma*

$$(([0,1], \leq, \hat{*}, 0, 1), \mathcal{U}, \Vdash),$$

unde $\hat{*}$ *este o pseudo-t-norma continua la stanga,* $\mathcal{U}$ *este orice structura pe psMTL-algebra standard indusa de* $\hat{*}$ *si* $\Vdash$ *este orice relatie forcing.*

(3) φ *este o tautologie in raport cu psMTL-algebrele standard.*

6.5 Semantica de tip Kripke pentru unele extensii ale logicii psMTL

6.5.1 Semantica de tip Kripke pentru logica psSMTL

- **Definitii si proprietati de baza**

Introducem urmatoarea proprietate a unui cadru propozitional de tip pseudo-Kripke $\mathcal{M} = (M, \leq, \odot, 0, 1)$:

(nn) pentru orice $x > 0$, $x \odot x > 0$.

Propozitie 6.5.1 $(ps\Pi 2)$ *si* $(ps\Pi 2^\bullet)$ *sunt valide in orice model propozitional de tip pseudo-Kripke* $(\mathcal{M}, \Vdash)$ *ddaca* $\mathcal{M}$ *satisface conditia (nn).*

Definitie 6.5.1 Un *psSMTL-cadru propozitional* este un cadru propozitional de tip pseudo-Kripke care satisface (nn). Un *psSMTL-model propozitional* este o pereche $(\mathcal{M}, \Vdash)$, unde $\mathcal{M}$ este un psSMTL-cadru propozitional si $\Vdash$ este o relatie forcing pe $\mathcal{M}$.

Definitie 6.5.2 Un *psSMTL-cadru cu predicate* este un cadru cu predicate de tip pseudo-Kripke care satisface (nn). Un *psSMTL-model cu predicate* este un triplet $(\mathcal{M}, \mathcal{U}, \Vdash)$, unde $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$ este un psSMTL-cadru cu predicate si $\Vdash$ este o relatie forcing pe $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$.

Teorema 6.5.1

(1) Orice teorema peste logica $psSMTL$ *este valida in orice psSMTL-model propozitional.*

(2) Orice teorema peste logica $psSMTL^r\forall$ *este valida in orice psSMTL-model cu predicate.*

Toate notiunile pentru semantica de tip Kripke pentru logica psSMTL pot fi reformulate pentru logica $\mathrm{psSMTL^r}$.

- **Completitudine Kripke pentru logica** $\mathrm{psSMTL^r}$

Teorema 6.5.2 *Fie φ o o formula a logicii $psSMTL^r$. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $\vdash_{psSMTL^r} \varphi$*;*

(2) φ *este valida in orice psSMTL-model propozitional;*

(3) φ *este valida in orice psSMTL-model propozitional de forma*

$$(([0,1], \leq, \odot, 0, 1),\ \Vdash\ ),$$

unde $\odot$ *este o pseudo-t-norma stricta continua la stanga si* $\Vdash$ *este orice relatie forcing.*

- **Completitudine Kripke pentru logica** $\mathrm{psSMTL^r}\forall$

Teorema 6.5.3 *Fie φ o formula inchisa a logicii $psSMTL^r\forall$. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $\vdash_{psSMTL^r\forall} \varphi$*;*

(2) φ *este valida in orice psSMTL model cu predicate;*

(3) φ *este o tautologie in raport cu $psSMTL^r$-lanturile complete.*

- **Completitudine standard pentru logica** $\mathrm{psSMTL^r}\forall$

Teorema 6.5.4 (Completitudine standard pentru $\mathrm{psSMTL^r}\forall$**)** *Fie φ o formula inchisa a logicii $psSMTL^r\forall$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:*

(1) $\vdash_{psSMTL^r\forall} \varphi$*;*

(2) φ *este valida in orice psSMTL-model cu predicate de forma*

$$(([0,1], \leq, \hat{*}, 0, 1), \mathcal{U}, \Vdash\ ),$$

unde $\hat{*}$ *este o pseudo-t-norma stricta continua la stanga,* $\mathcal{U}$ *este orice structura pe psSMTL-algebra indusa de* $\hat{*}$ *si* $\Vdash$ *este orice relatie forcing.*

(3) φ *este o tautologie in raport cu orice psSMTL-algebra standard.*

6.5.2 Semantica de tip Kripke pentru logica psIMTL

- **Definitii si proprietati de baza**

Introducem urmatoarele proprietati pe un cadru propozitional de tip pseudo-Kripke $\mathcal{M} = (M, \leq, \odot, 0, 1)$, pentru a reflecta proprietatile logicii psIMTL:

(inv1) pentru orice $x, y \in M$, daca $x < y$, atunci exista $z \in M$ astfel incat $z \odot x = 0$ si $z \odot y \neq 0$;

(inv2) pentru orice $x, y \in M$, daca $x < y$, atunci exista $z \in M$ astfel incat $x \odot z = 0$ si $y \odot z \neq 0$.

Propozitie 6.5.2 *$(psINV)$ si $(psINV^\bullet)$ sunt valide in orice model propozitional de tip pseudo-Kripke reziduat $(\mathcal{M}, \Vdash)$ ddaca $\mathcal{M}$ satisface conditiile (inv1) si (inv2).*

Definitie 6.5.3 Un *psIMTL-cadru propozitional* este un cadru propozitional de tip pseudo-Kripke reziduat care verifica (inv1) si (inv2). Un *psIMTL-model propozitional* este o pereche $(\mathcal{M}, \Vdash)$, unde $\mathcal{M}$ este un psIMTL-cadru propozitional si $\Vdash$ este o relatie r-forcing pe $\mathcal{M}$.

Definitie 6.5.4 Un *psIMTL-cadru cu predicate* este un cadru cu predicate de tip pseudo-Kripke care verifica (inv1) si (inv2). Un *psIMTL-model cu predicate* este un triplet $(\mathcal{M},\mathcal{U}, \Vdash)$, unde $(\mathcal{M},\mathcal{U})$ este un psIMTL-cadru cu predicate si $\Vdash$ este o relatie forcing pe $(\mathcal{M},\mathcal{U})$.

Teorema 6.5.5

(1) Orice teorema peste logica $psIMTL$ este valida in orice psIMTL-*model propozitional.*

(2) Orice teorema peste logica $psIMTL\forall$ este valida in orice psIMTL-*model cu predicate.*

Toate aceste notiuni pot fi reformulate pentru logica $\mathrm{psIMTL^r}$.

- **Completitudine Kripke pentru logica $\mathrm{psIMTL^r}$**

Teorema 6.5.6 *Fie φ o formula a logicii* $\mathrm{psIMTL^r}$. *Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $\vdash_{psIMTL^r} \varphi$;

(2) φ este valida in orice psIMTL-model propozitional;

(3) φ este valida in orice psIMTL-model propozitional de forma

$$(([0,1], \leq, \odot, 0, 1), \Vdash),$$

unde $\odot$ este o pseudo-t-norma continua la stanga, ale carei negatii satisfac conditia (pDN), si $\Vdash$ este orice relatie forcing.

- **Completitudine Kripke pentru logica** $\mathrm{psIMTL^r}\forall$

Teorema 6.5.7 *Fie φ o formula inchisa a logicii $psIMTL^r\forall$. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $\vdash_{psIMTL^r\forall} \varphi$;

(2) φ *este valida in orice psIMTL-model cu predicate;*

(3) φ *este o tautologie in raport cu orice* $psIMTL^r$*-lant complet.*

- **Completitudine standard pentru logica** $\mathrm{psIMTL^r}\forall$

Teorema 6.5.8 (Completitudine standard pentru $\mathrm{psIMTL^r}\forall$**)** *Fie φ o formula inchisa a logicii $psIMTL^r\forall$. Urmatoarele sunt echivalente:*

(1) $\vdash_{psIMTL^r\forall} \varphi$;

(2) φ *este valida in orice psIMTL-model cu predicate de forma*

$$(([0,1], \leq, \hat{*}, 0, 1), \mathcal{U}, \Vdash),$$

unde $\hat{*}$ este o pseudo-t-norma continua la stanga, ale carei negatii satisfac conditia (pDN), $\mathcal{U}$ este orice structura pe psIMTL-algebra standard indusa de $\hat{*}$ si $\Vdash$ este orice relatie forcing.

(3) φ *este o tautologie in raport cu orice standard psIMTL-algebra standard.*

Capitolul 7

Spre semantica forcing

Scopul acestui Capitol este de a reflecta intr-o notiune algebrica validitatea intr-un model de tip pseudo-Kripke prezentata in Capitolul 6.

Acest Capitol este o contributie originala si rezultatele din Subsectiunile 7.1.1. si 7.1.2 se gasesc in [8], pe cand cele din Subsectiunea 7.1.3 se gasesc in [9].

7.1 Semantica forcing pentru logica MTL

7.1.1 Valoarea forcing slaba

In continuare, fie $\mathcal{X} = (X, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ o MTL-algebra completa.

- **Proprietate forcing slaba**

Definitie 7.1.1

(i) O *proprietate forcing slaba cu valori in $\mathcal{X}$* este o functie

$$f : (\mathrm{Var} \cup \{\overline{0}\}) \times X \rightarrow X,$$

astfel incat urmatoarele conditii sunt satisfacute:

(1) daca $p \in \mathrm{Var}$ si $x, y \in X$, atunci $x \leq y$ implica $f(p, y) \leq f(p, x)$,

(2) $f(\overline{0}, 1) = 0$.

(iii) O proprietate forcing slaba cu valori in $\mathcal{X}$ f poate fi extinsa unic la o functie, notata tot prin f,

$$f : \mathrm{Form}_{\mathrm{MTL}} \times X \rightarrow X,$$

in modul urmator, prin inductie dupa structura formulelor, si vom nota $f(\varphi, x)$ cu $|\varphi|_{x,f}$, pentru orice formula φ a logicii MTL si orice $x \in X$:

(1) $|\varphi|_{x,f} = f(\varphi, x)$, if $\varphi \in \mathrm{Var}$;

(2) $|\overline{0}|_{x,f} = x^-$;

(3) daca $\varphi = \alpha \vee \beta$, atunci $|\varphi|_{x,f} = |\alpha|_{x,f} \vee |\beta|_{x,f}$;

(4) daca $\varphi = \alpha \wedge \beta$, atunci $|\varphi|_{x,f} = |\alpha|_{x,f} \wedge |\beta|_{x,f}$;

(5) daca $\varphi = \alpha \& \beta$, atunci $|\varphi|_{x,f} = \bigvee_{y,z \in X}((x \to (y \odot z)) \odot |\alpha|_{y,f} \odot |\beta|_{z,f})$;

(6) daca $\varphi = \alpha \to \beta$, atunci $|\varphi|_{x,f} = \bigwedge_{y \in X}(|\alpha|_{y,f} \to |\beta|_{x \odot y,f})$.

- **Valoare forcing slaba**

Definitie 7.1.2 *Valoarea forcing slaba* $|\varphi|_{\mathrm{X}}$ a unei formule φ a logicii MTL intr-o MTL-algebra completa $\mathcal{X}$ este definita prin

$$|\varphi|_{\mathrm{X}} = \bigwedge \{|\varphi|_{1,f} \mid \text{f este proprietate forcing slaba cu valori in } \mathcal{X}\}.$$

Spunem ca o formula φ a logicii MTL este *valida* in semantica forcing slaba daca $|\varphi|_{\mathrm{X}} = 1$.

- **Validitatea axiomelor logicii MTL in semantica forcing slaba**

In aceasta subsectiune aratam ca nu toate axiomele logicii MTL sunt valide in semantica forcing slaba. Aceasta analiza arata ca, desi semantica forcing slaba are proprietati interesante, aceasta noua semantica nu este suficient de puternica pentru a fi echivalenta cu semantica algebrica uzuala.

Dupa o investigatie amanuntita, ajungem la concluzia ca axiomele $(A2)$, $(A5)$, $(A6a)$, $(A7)$ si $(A9)$ nu sunt valide in semantica forcing slaba.

7.1.2 Valoare forcing

- **Proprietate forcing**

Definitie 7.1.3

(i) O *proprietate forcing cu valori in* $\mathcal{X}$ este o proprietate forcing slaba cu valori in $\mathcal{X}$ astfel incat urmatoarea conditie suplimentara este satisfacuta

$$f(p, x) = x \to f(p, 1),$$

pentru orice $p \in \mathrm{Var}$ si $x \in X$.

(ii) Orice proprietate forcing cu valori in $\mathcal{X}$ poate fi extinsa in mod unic la o functie, notata tot cu f,

$$f : \mathrm{Form}_{\mathrm{MTL}} \times X \to X,$$

folosind clauzele (1)-(6) din Definitia 7.1.1 (ii) si vom nota $f(\varphi, x)$ cu $[\varphi]_{x,f}$, pentru orice formula φ a logicii MTL si orice $x \in X$.

- **Proprietati ale proprietatii forcing**

Propozitie 7.1.1 *Fie f o proprietate forcing cu valori in $\mathcal{X}$. Pentru orice formula φ a logicii MTL si orice $x \in X$, urmatoarea conditie este adevarata:*

$$[\varphi]_x = x \to [\varphi]_1.$$

- **Legaturi intre proprietatile forcing si evaluari**

Propozitie 7.1.2 *Exista o corespondenta bijectiva intre proprietatile forcing cu valori in $\mathcal{X}$ si $\mathcal{X}$-evaluarile logicii MTL.*

- **Valoarea forcing**

Definitie 7.1.4 *Valoarea forcing* $[\varphi]_{\mathrm{X}}$ a unei formule φ a logicii MTL intr-o MTL-algebra completa $\mathcal{X}$ este definita prin

$$[\varphi]_{\mathrm{X}} = \bigwedge\{[\varphi]_{1,f} \mid \text{f este o proprietate forcing cu valori in } \mathcal{X}\ \}.$$

Teorema 7.1.1 *Pentru orice formula φ a logicii* MTL, *avem* $[\varphi]_{\mathrm{X}} = \|\varphi\|_{\mathcal{X}}$.

7.1.3 Operatori forcing MTL

Definitie 7.1.5 Fie $\mathcal{A}$ si $\mathcal{X}$ doua latici reziduate comutative complete sau doua MTL-algebre complete. Un *operator $\mathcal{X}$-forcing pe $\mathcal{A}$* este o functie $f : A \times X \to X$ astfel incat urmatoarele conditii sunt satisfacute, pentru orice $a, b \in A$ si $x, x' \in X$:

(1) daca $x \leq x'$, atunci $f(a, x') \leq f(a, x)$;

(2) $f(0, 1) = 0$;

(3) $f(a \vee b, x) = f(a, x) \vee f(b, x)$;

(4) $f(a \wedge b, x) = f(a, x) \wedge f(b, x)$;

(5) $f(a \odot b, x) = \bigvee_{y,z \in X}((x \to (y \odot z)) \odot f(a, y) \odot f(b, z))$;

(6) $f(a \to b, x) = \bigwedge_{y \in X}(f(a, y) \to f(b, x \odot y))$;

(7) $x \to f(a, 1) \leq f(a, x)$.

Ne vom referi la operatori $\mathcal{X}$-forcing pe $\mathcal{A}$ si sub numele de *operatori forcing MTL*, cand $\mathcal{A}$ si $\mathcal{X}$ sunt MTL-algebre complete.

In continuare, consideram $\mathcal{A}$ si $\mathcal{X}$ doua MTL-algebre complete.

- **Legaturi intre operatori forcing MTL si morfisme de MTL-algebre**

Teorema 7.1.2 *Exista o corespondenta bijectiva intre operatorii $\mathcal{X}$-forcing pe $\mathcal{A}$ si morfismele intre $\mathcal{A}$ si $\mathcal{X}$.*

- **Teorema de caracterizate pentru MTL-algebre**

Teorema 7.1.3 *Fie $\mathcal{A}$ o latice reziduata comutativa completa. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:*

(i) $\mathcal{A}$ este o MTL-algebra completa.

(ii) Functia $g : A \times A \to A$ definita prin $g(a, x) = x \to a$, pentru orice $a, x \in A$, este un operator $\mathcal{A}$-forcing pe $\mathcal{A}$.

(iii) Pentru orice morfism de latici reziduate $e : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, functia $f : A \times A \to A$ definita prin $f(a, x) = x \to e(a)$ este un operator $\mathcal{A}$-forcing pe $\mathcal{A}$.

7.2 Semantica forcing pentru logica psMTL

7.2.1 Valoare forcing slaba de stanga/dreapta

In continuare, fie X $= (X, \vee, \wedge, \odot, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ o psMTL-algebra completa.

- **Proprietate forcing slaba de stanga/dreapta**

Definitie 7.2.1

(i) O *proprietate forcing slaba cu valori in $\mathcal{X}$* este o functie

$$f : (\mathrm{Var} \cup \{\overline{0}\}) \times X \to X,$$

definita ca in Definitia 7.1.1 (i).

(ii) Fie f o proprietate forcing slaba cu valori in $\mathcal{X}$.

(a) Extindem f la o functie

$$f^{\rightarrow} : \mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}} \times X \rightarrow X,$$

numita *proprietate forcing slaba de stanga cu valori in* $\mathcal{X}$, in modul urmator, prin inductie dupa structura formulelor, si notam $f^{\rightarrow}(\varphi, x)$ cu $|\varphi|^{\rightarrow}_{x,f}$, pentru orice formula φ a logicii psMTL si orice $x \in X$:

(1) $|\varphi|^{\rightarrow}_{x,f} = f(\varphi, x)$, daca $\varphi \in \mathrm{Var}$;

(2) $|\overline{0}|^{\rightarrow}_{x,f} = x^{-}$;

(3) daca $\varphi = \alpha \vee \beta$, atunci $|\varphi|^{\rightarrow}_{x,f} = |\alpha|^{\rightarrow}_{x,f} \vee |\beta|^{\rightarrow}_{x,f}$;

(4) daca $\varphi = \alpha \wedge \beta$, atunci $|\varphi|^{\rightarrow}_{x,f} = |\alpha|^{\rightarrow}_{x,f} \wedge |\beta|^{\rightarrow}_{x,f}$;

(5) daca $\varphi = \alpha \& \beta$, atunci $|\varphi|^{\rightarrow}_{x,f} = \bigvee_{y,z \in X}((x \rightarrow (y \odot z)) \odot |\alpha|^{\rightarrow}_{y,f} \odot |\beta|^{\rightarrow}_{z,f})$;

(6) daca $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$, atunci $|\varphi|^{\rightarrow}_{x,f} = \bigwedge_{y \in X}(|\alpha|^{\rightarrow}_{y,f} \rightarrow |\beta|^{\rightarrow}_{x \odot y,f})$;

(7) daca $\varphi = \alpha \rightsquigarrow \beta$, atunci $|\varphi|^{\rightarrow}_{x,f} = \bigwedge_{y \in X}(|\alpha|^{\rightarrow}_{y,f} \rightsquigarrow |\beta|^{\rightarrow}_{y \odot x,f})$.

(b) Extindem f la o functie

$$f^{\rightsquigarrow} : \mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}} \times X \rightarrow X,$$

numita *proprietate forcing slaba de dreapta cu valori in* $\mathcal{X}$, in modul urmator, prin inductie dupa structura formulelor, si notam $f^{\rightsquigarrow}(\varphi, x)$ cu $|\varphi|^{\rightsquigarrow}_{x,f}$, pentru orice formula φ a logicii psMTL si orice $x \in X$:

(1) $|\varphi|^{\rightsquigarrow}_{x,f} = f(\varphi, x)$, daca $\varphi \in \mathrm{Var}$;

(2) $|\overline{0}|^{\rightsquigarrow}_{x,f} = x^{\sim}$;

(3) daca $\varphi = \alpha \vee \beta$, atunci $|\varphi|^{\rightsquigarrow}_{x,f} = |\alpha|^{\rightsquigarrow}_{x,f} \vee |\beta|^{\rightsquigarrow}_{x,f}$;

(4) daca $\varphi = \alpha \wedge \beta$, atunci $|\varphi|^{\rightsquigarrow}_{x,f} = |\alpha|^{\rightsquigarrow}_{x,f} \wedge |\beta|^{\rightsquigarrow}_{x,f}$;

(5) daca $\varphi = \alpha \& \beta$, atunci $|\varphi|^{\rightsquigarrow}_{x,f} = \bigvee_{y,z \in X}(|\alpha|^{\rightsquigarrow}_{y,f} \odot |\beta|^{\rightsquigarrow}_{z,f} \odot (x \rightsquigarrow (y \odot z)))$;

(6) daca $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$, atunci $|\varphi|^{\rightsquigarrow}_{x,f} = \bigwedge_{y \in X}(|\alpha|^{\rightsquigarrow}_{y,f} \rightarrow |\beta|^{\rightsquigarrow}_{x \odot y,f})$;

(7) daca $\varphi = \alpha \rightsquigarrow \beta$, atunci $|\varphi|^{\rightsquigarrow}_{x,f} = \bigwedge_{y \in X}(|\alpha|^{\rightsquigarrow}_{y,f} \rightsquigarrow |\beta|^{\rightsquigarrow}_{y \odot x,f})$.

- **Valoare forcing slaba de stanga/dreapta**

Definitie 7.2.2

(a) *Valoarea forcing slaba de stanga* $|\varphi|^{\rightarrow}_{\mathrm{X}}$ a unei formule φ a logicii psMTL in $\mathcal{X}$ este definita prin:

$$|\varphi|^{\rightarrow}_{\mathrm{X}} = \bigwedge\{|\varphi|^{\rightarrow}_{1,f} \mid \text{f este o proprietate forcing slaba cu valori in } \mathcal{X}\ \}.$$

(b) *Valoarea forcing slaba de dreapta* $|\varphi|^{\rightsquigarrow}_{\mathrm{X}}$ a unei formule φ a logicii psMTL in $\mathcal{X}$ este definita prin:

$$|\varphi|^{\rightsquigarrow}_{\mathrm{X}} = \bigwedge\{|\varphi|^{\rightsquigarrow}_{1,f} \mid \text{f este o proprietate forcing slaba cu valori in } \mathcal{X}\ \}.$$

7.2.2 Valoarea forcing de stanga/dreapta

- **Proprietate forcing de stanga/dreapta**

Definitie 7.2.3

(a) O *proprietate forcing de stanga cu valori in* $\mathcal{X}$ este o proprietate forcing slaba cu valori in $\mathcal{X}$ $f^{\rightarrow} : (\mathrm{Var} \cup \{\bar{0}\}) \times X \to X$ astfel incat urmatoarea conditie suplimentara este satisfacuta

$$f^{\rightarrow}(p, x) = x \rightarrow f^{\rightarrow}(p, 1),$$

pentru orice $p \in \mathrm{Var}$ si $x \in X$.

(b) FIe $f^{\rightarrow}$ o proprietate forcing de stanga cu valori in $\mathcal{X}$. Extindem $f^{\rightarrow}$ la o functie

$$f^{\rightarrow} : \mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}} \times X \to X,$$

folosind clauzele (1)-(7) din Definitia 7.2.1 (a) si vom nota $f^{\rightarrow}(\varphi, x)$ cu $[\varphi]^{\rightarrow}_{x,f}$, pentru orice formula φ a logicii psMTL si orice $x \in X$.

Definitie 7.2.4

(a) O *proprietate forcing de dreapta cu valori in* $\mathcal{X}$ este o proprietate forcing slaba cu valori in $\mathcal{X}$ $f^{\rightsquigarrow} : (\mathrm{Var} \cup \{\bar{0}\}) \times X \to X$ astfel incat urmatoarea conditie suplimentara este satisfacuta

$$f^{\rightsquigarrow}(p, x) = x \rightsquigarrow f^{\rightsquigarrow}(p, 1),$$

pentru orice $p \in \mathrm{Var}$ si $x \in X$.

(b) Fie $f^{\rightsquigarrow}$ o proprietate forcing de dreapta cu valori in $\mathcal{X}$. Extindem $f^{\rightsquigarrow}$ la o functie

$$f^{\rightsquigarrow} : \mathrm{Form}_{\mathrm{psMTL}} \times X \to X,$$

folosind clauzele (1)-(7) din Definitia 7.1.1 (b) si vom nota $f^{\rightsquigarrow}(\varphi, x)$ cu $[\varphi]^{\rightsquigarrow}_{x,f}$, pentru orice formula φ a logicii psMTL si orice $x \in X$.

- **Valoare forcing de stanga/dreapta**

Definitie 7.2.5

(a) *Valoarea forcing de stanga* $[\varphi]_{X}^{\rightarrow}$ a unei formule φ a logicii psMTL in $\mathcal{X}$ este definita prin:

$$[\varphi]_{X}^{\rightarrow} = \bigwedge\{[\varphi]_{1,f}^{\rightarrow} \mid f^{\rightarrow} \text{ este o proprietate forcing de stanga cu valori in } \mathcal{X}\}.$$

(b) *Valoarea forcing de dreapta* $[\varphi]_{X}^{\rightsquigarrow}$ a unei formule φ a logicii psMTL in $\mathcal{X}$ este definita prin:

$$[\varphi]_{X}^{\rightsquigarrow} = \bigwedge\{[\varphi]_{1,f}^{\rightsquigarrow} \mid f^{\rightsquigarrow} \text{ este o proprietate forcing de dreapta cu valori in } \mathcal{X}\}.$$

Spunem ca o formula φ a logicii psMTL este *valida* in semantica forcing de stanga/dreapta daca $[\varphi]_{X}^{\rightarrow} = 1$ si, respectiv, $[\varphi]_{X}^{\rightsquigarrow} = 1$.

Capitolul 8

Concluzii finale si cercetari viitoare

Aceasta Teza de Doctorat este o contributie la studiul logicilor multivalente cu conjunctii necomutative si este concentrata in jurul logicii psMTL introdusa de Hájek [21].

Speram ca aceasta Teza de Doctorat demonstreaza faptul ca logicile multivalente necomutative sunt sisteme logice interesante ce ofera noi perspective de cercetare.

- **Contributii originale**

Trecem in revista contributiile principale din prezenta Teza de Doctorat. Unele dintre rezultatele originale se gasesc in articolele [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

Capitolul 2:

· Subsectiunea 2.4.4, in care am introdus notiunea de psMTL-algebra stricta (aceasta cercetare se gaseste in [5]),

· Sectiunea 2.5, in care am demonstrat ca orice psMTL-lant se poate scufunda intr-un psMTL-lant complet (Teorema 2.5.1),

· Sectiunea 2.6, in care am introdus notiunea de algebra psProdus cu stare (aceasta cercetare se gaseste in [7]).

Capitolul 3:

· Ultima parte a Subsectiunii 3.1.1, in care am prezentat o lista de teoreme peste logica psMTL (aceste rezultate se gasesc in [5]),

- Subsectiunea 3.1.2, in care am introdus notiunea de teorie compatibila; rezultatul principal al acestei subsectiuni este o teorema de deductie pentru teorii compatibile (Teorema 3.1.1; aceasta cercetare se gaseste in [5]),
- Propozitia 3.2.3 care defineste algebra Lindenbaum-Tarski asociata unei teorii compatibile T in contextul deductiei slabe;
- Subsectiunea 3.2.4, in care am demonstrat teorema de completitudine standard tare finita pentru logica $\mathrm{psMTL^r}$ (Teorema 3.2.4; aceasta cercetare se gaseste in [3]).

Capitolul 4:

- Ultima parte a Subsectiunii 4.1.1, in care am introdus o lista de teoreme peste logica $\mathrm{psMTL}\forall$,
- Sectiunea 4.3, in care am demonstrat teorema de omitere a tipurilor pentru logica $\mathrm{psMTL^r}\forall$ (Teorema 4.3.1; acest rezultat se gaseste in [4]).

Capitolul 5:

- Sectiunea 5.1, in care am definit formal notiunea de extensie a logicii psMTL,
- Sectiunea 5.5, in care am introdus generalizarea necomutativa a logicii produs. Mai mult, am introdus o logica probabilista bazata pe logica produs necomutativa (aceste rezultate se gasesc in [7]),
- Sectiunea 5.6, in care am introdus logica psSMTL, o extensie a logicii psMTL (aceste rezultate se gasesc in [5]),
- Sectiunea 5.7, in care am introdus extensia psIMTL a logicii psMTL (aceste rezultate se gasesc in [5]).

Capitolul 6: Acest Capitol este o contributie originala in intregime si scopul sau este de a introduce o semantica diferita pentru logica psMTL, si anume o semantica de tip Kripke. Am demonstrat faptul ca logica $\mathrm{psMTL}\forall$ are completitudine standard (Teorema 6.4.1), rezultat extrem de valoros pentru teoria logicilor multivalente necomutative. Rezultatele din Sectiunea 6.1, 6.2, 6.4 si din Subsectiunea 6.3.1 se gasesc in [6].

Capitolul 7: Acest Capitol este o contributie originala in intregime si scopul sau este de a introduce notiunea de valoare forcing, ca o rafinare a notiunii de validitate intr-un model de tip pseudo-Kripke. Rezultatele din Subsectiunile 7.1.1 si 7.1.2 se gasesc in lucrarea [8], iar cele din Subsectiunea 7.1.3 se gasesc in in [9].

- **Cercetari viitoare**

Aceasta Teza de doctorat ofera o baza pentru cercetari viitoare. Amintim problemele deschise care au aparut de-a lungul Tezei:

(a) Gasirea unor exemple netriviale de algebre psProdus cu stare.

(b) Gasirea unei liste de axiome pentru logica psMTL, plecand de la Definitia 2.1.11 pentru latici psBCK(pPR) marginite.

(c) Gasirea legaturilor intre logicile psSMTL, psIMTL si Gödel.

(d) Dezvoltarea unei semantici de tip Kripke pentru logica psBL, logica produs necomutativa si logica Łukasiewicz necomutativa.

(e) Generalizarea Teoremei 7.1.1 la cazul necomutativ.

(f) Definirea operatorilor forcing psMTL, ca o generalizare necomutativa a operatorilor forcing MTL din Subsectiunea 7.1.3.

Mai jos enuntam cateva directii de cercetare viitoare care isi au radacinile in prezenta Teza de Doctorat:

1. Cercetarea altor rezultate de teoria modelelor ar fi necesare pentru o mai buna intelegere a calculelor cu predicate pentru logicile necomutative.

2. Hájek [18] a demonstrat ca logica Łukasiewicz are o interpretare in logica produs. O problema interesanta ar fi aceea de a verifica daca aceasta relatie este pastrata in cazul necomutativ.

3. In Subsectiunea 5.5.2, am introdus logica $\mathrm{SFP}(\mathrm{ps}\Pi\mathrm{L}, \mathrm{ps}\Pi\mathrm{L})$, un sistem logic bazat pe logica produs necomutativa capabil sa modeleze probabilitatea evenimentelor incerte. Investigatii suplimentare ar trebui facute pe acest subiect.

4. Dezvoltarea altor extensii ale logicii psMTL apare ca o problema naturala.

5. Deoarece toate exemplele intuitive de conjunctii necomutative implica ideea de succesiune, ar fi interesant de stabilit legaturile dintre logicile temporale si logicile necomutative.

Bibliografie

[1] Ceterchi, R.: On Algebras with Implications, Categorically Equivalent to Pseudo-MV Algebras, *The Proceedings of the Fourth International Symposium on Economic Informatics*, Bucharest, 1999.

[2] Ciungu, L.: Some classes of pseudo-MTL algebras, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, **50**(3), 2007, 223–247.

[3] Diaconescu, D.: Non-commutative fuzzy logic psMTL: an alternative proof for the standard completeness theorem, Accepted for publication in the Proceedings of the 4th International Conference on Fuzzy Computation Theory and Applications.

[4] Diaconescu, D.: Omitting types theorem for the non-commutative psMTL logic, Trimis spre acceptare, Math. Logic Quarterly.

[5] Diaconescu, D.: On the non-commutative propositional logic psMTL and its extensions, Trimis spre acceptare, Fuzzy Sets and Systems.

[6] Diaconescu, D.: Kripke-style semantics for non-commutative monoidal t-norm logic, *J. of Mult.-Valued Logic and Soft Comp.*, **16**(3-5), 2010, 247–263.

[7] Diaconescu, D.: Non-commutative product logic and probability of fuzzy events, *Proceedings of the 14th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU 2012)*, Advances in Computational Intelligence, Springer-Verlag, 2012.

[8] Diaconescu, D., Georgescu, G.: On the forcing semantics for monoidal t-norm based logic, *Journal of Universal Computer Science*, **13**(11), 2007, 1550–1572.

[9] Diaconescu, D., Georgescu, G.: Forcing operators on MTL-algebras, *Math. Logic Quarterly*, **57**(1), 2011, 47–64.

[10] DiNola, A., Georgescu, G., Iorgulescu, A.: Pseudo-BL algebras - Part I, *J. Multiple-Valued Logic*, **8**, 2002, 671–750.

[11] DiNola, A., Georgescu, G., Iorgulescu, A.: Pseudo-BL algebras -Part II, *J. Multiple-Valued Logic*, **8**, 2002.

[12] Dvurečenskij, A., Rachůnek, J., Salounova, D.: State operators on generalizations of fuzzy structures, *Fuzzy Sets and Systems*, **187**(1), 2012, 58–76.

[13] Esteva, F., Godo, L.: Monoidal t-norm based logic: Towards a logic for left-continuous t-norms, *Fuzzy Sets and Systems*, **124**(3), 2001, 271–288.

[14] Flondor, P.: Non-commutative algebras of the logics, in: *Logica si provocarile sociale*, Politehnica Press, 2008, 86–94.

[15] Flondor, P., Georgescu, G., Iorgulescu, A.: Pseudo-t-norms and pseudo-BL algebras, *Soft Computing*, **5**, 2001, 355–371.

[16] Galatos, N., Jipsen, P., Kowalski, T., Ono, H.: Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics, in: *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 151, Elsevier, 2007.

[17] Georgescu, G., Iorgulescu, A.: Pseudo-BL algebras: a non-commutative extension of BL-algebras, *Abstracts of the Fifth International Conference FSTA*, Slovakia, 2000.

[18] Hájek, P.: *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Number 4, Dordrecht, 1998.

[19] Hájek, P.: Observations on the monoidal t-norm logic, *Fuzzy Sets and Systems*, **132**(1), 2002, 107–112.

[20] Hájek, P.: Fuzzy logics with non-commutative conjunctions, *J. Logic. Comput.*, **13**, 2003, 469–479.

[21] Hájek, P.: Observations on non-commutative fuzzy logic, *Soft Computing*, **8**, 2003, 38–43.

[22] Hájek, P., Godo, L., Esteva, F.: A complete many-valued logic with product-conjunction, *Arch. Math. Logic*, **35**(3), 1996, 191–208.

[23] Hájek, P., Ševčík, J.: On fuzzy predicate calculi with non-commutative conjunction, 2004.

[24] Horčik, R.: Standard completeness theorem for ΠMTL, *Archive for Mathematical Logic*, **43**(4), 2005, 477–503.

[25] Iorgulescu, A.: Classes of pseudo-BCK algebras - Part I, *J. of Mult.-Valued Logic and Soft Comp.*, **12**(1-2), 2006, 71–130.

[26] Iorgulescu, A.: *Algebras of logics as BCK algebras*, Academy of Economic Studies Press, Bucharest, 2008.

[27] Jenei, S., Montagna, F.: A proof of standard completeness for Esteva and Godo's logic MTL, *Studia Logica*, **70**(2), 2002, 183–192.

[28] Jenei, S., Montagna, F.: A proof of standard completeness for non-commutative monoidal t-norm logic, *Neural Network World*, **13**, 2003, 481–488.

[29] Kühr, J.: Pseudo-BL-algebras and DRl-monoids, *Math. Bohem.*, **128**, 2003, 199–208.

[30] Kühr, J.: *Pseudo-BCK-algebras and related structures*, Universita Palackého v Olomouci, 2007.

[31] Leuştean, I.: Non-commutative Łukasiewicz propositional logic, *Arch. Math. Logic*, **45**, 2006, 191–213.

[32] MacNeille, H.: Partially ordered sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **42**(3), 1937, 416–460.

[33] Schweizer, B., Sklar, A.: Statistical metrics, *Pac. J. Math.*, **10**, 1960, 313–334.