Prefaţă

Scopul principal al acestei cărţi este de a da o descriere şi o analiză relativ completă a celor mai importante metode de calcul numeric utilizate în rezolvarea problemelor de algebră liniară şi neliniară, metode adaptate la performanţele spectaculoase ale computerelor actuale.

În prima parte a capitolului 1 prezentăm metode de calcul numeric pentru aproximarea soluţiilor ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii neliniare: metoda lui Newton (generalizată), metoda aproximaţiilor succesive şi metoda gradientului. Metoda gradientului este aplicată şi sistemelor liniare.

Partea a doua a capitolului 1 cuprinde metode de calcul numeric specifice ecuaţiilor algebrice: metodele Lobacevski, Bairstow şi Bernoulli, metode pentru determinarea limitelor şi numărului rădăcinilor reale. În capitolul 3 vom avea încă o metodă de aproximare a rădăcinilor ecuaţiilor algebrice.

În primele trei paragrafe ale capitolului 2 prezentăm metodele de calcul numeric pentru triangularizare şi factorizare (LR, QR, Cholesky) a matricelor. Aceste metode se folosesc în continuare pentru obţinerea metodelor directe pentru rezolvarea sistemelor liniare (paragraful 2.4) şi a unor metode pentru calculul determinanţilor şi inversarea matricelor (paragrafele 2.6, respectiv 2.7).

În paragraful 2.5 sunt prezentate metodele iterative Seidel-Gauss, Jacobi şi relaxării pentru aproximarea soluţiilor sistemelor de ecuaţii liniare.

Capitolul 3 cuprinde metode de calcul numeric pentru determinarea polinomului caracteristic, a vectorilor şi valorilor proprii astfel:

-metode pentru determinarea polinomului caracteristic: metoda minorilor diagonali şi metoda lui Fadeev;

-metode pentru determinarea polinomului caracteristic şi a vectorilor proprii: metodele Krîlov şi Danilevski;

-metode pentru aproximarea valorilor şi vectorilor proprii pentru matrice simetrice: metodele Jacobi şi Givens;

-metode pentru aproximarea valorilor şi vectorilor proprii pentru matrice oarecare: metoda puterii, metodele LR şi QR.

Problema determinării valorilor proprii pentru o matrice şi problema rezolvării ecuaţiilor algebrice sunt două probleme echivalente.

Într-adevăr, pentru o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ valorile proprii sunt rădăcinile polinomului caracteristic, adică rădăcinile ecuaţiei algebrice: $det(xI - A) = 0$. Pentru rezolvarea acestei ecuaţii se pot folosi metodele prezentate în primul capitol.

Reciproc, dacă:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0 \tag{0.1}$$

este o ecuaţie algebrică, unde $a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$, atunci polinomul caracteristic al matricei:

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

este $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$ (v. paragraful 3.5). Aşadar, rădăcinile ecuaţiei 0.1 sunt valorile proprii ale matricei 0.2.

Având stabilit acest rezultat şi ţinând cont de faptul că metoda QR are rezultate remarcabile în aproximarea valorilor proprii, obţinând aproximaţii pentru toate valorile proprii (simultan), propunem în subparagraful 3.10.1 o metodă de aproximare a rădăcinilor ecuaţiilor algebrice bazată pe metoda QR.

Conţinutul capitolului 4 este o noutate în literatura noastră de specialitate. În acest capitol sunt prezentaţi algoritmi pentru accelerarea convergenţei numerice cu aplicaţii în rezolvarea problemelor de algebră.

Pentru un studiu detaliat al algoritmilor pentru accelerarea convergenţei numerice recomandăm cititorului cărţile [9, 10, 12, 76].

În paragraful 4.1 este prezentat algoritmul Δ^2 al lui Aitken. Acest algoritm transformă şirurile obţinute prin metoda aproximaţiilor succesive pentru ecuaţii neliniare în şiruri cu o viteză de convergenţă mult mai mare. Acest fapt este ilustrat prin exemplul **4.4** rezolvat cu **Algoritmiul 56**.

În paragraful 4.2 prezentăm algoritmul epsilon vectorial şi trei aplicaţii ale sale: rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare, rezolvarea sistemelor de ecuaţii neliniare, calculul valorilor şi vectorilor proprii.

Rezultatul cu totul remarcabil este cel obţinut prin aplicarea algoritmului epsilon vectorial pentru accelerarea şirurilor obţinute prin metode iterative pentru sisteme liniare. Astfel, se stabileşte în subparagraful 4.2.1 că aplicând algoritmul epsilon vectorial pentru accelerarea convergenţei unui şir $(x_n)_n$ de aproximaţii pentru soluţia sistemului de ecuaţii liniare $Ax = b$, şir obţinut printr-o metodă iterativă oarecare, după un număr finit de paşi (număr ce nu depăşeşte dublul ordinului sistemului) se obţine soluţia exactă a sistemului $Ax = b$, indiferent dacă şirul $(x_n)_n$ este convergent sau nu.

Pentru sistemele de ecuaţii neliniare este prezentat algoritmul 4.28. Acest algoritm are convergenţă pătratică şi este o "conlucrare" între metoda aproximaţiilor succesive şi algoritmul epsilon vectorial. Importanţa acestui algoritm este explicată în comentariul 4.18. În plus, cu acest algoritm se rezolvă probleme cu condiţii iniţiale şi probleme polilocale pentru ecuaţii diferenţiale, probleme pentru care metode de calcul numeric nu oferă rezultate acceptabile sau nu există.

În ultimul paragraf al capitolului 4 este prezentat algoritmul lui Overholt. Cu acest algoritm se obţine metoda iterativă 4.74 cu ordin de convergenţă oarecare pentru aproximarea soluţiilor ecuaţiilor neliniare. Exemplele 4.32, 4.33, rezolvate cu **Algoritmii 61**, respectiv **62**, sunt ilustrative pentru puterea de calcul a algoritmului lui Overholt.

Metodele de calcul numeric (semnificative) descrise în această carte sunt însoţite de algoritmi prezentaţi într-o formă care permite cititorului (cu minime cunoştinţe în domeniul limbajelor de programare) implementarea acestora într-un limbaj de programare şi rezolvarea cu ajutorul computerului a problemelor de algebră pentru care este dedicată metoda respectivă. Aceţi algoritmi au fost folosiţi în exemplele care însoţesc metodele studiate.

Această carte se adresează studenţilor de la specializările de informatică, matematică-informatică, matematică, studenţilor de la facultăţile tehnice. În acelaşi timp, această carte poate fi utilă inginerilor, fizicienilor, chimiştilor, biologilor, economiştilor, ..., specialişti care au cunoştinţe despre metodele de calcul numeric şi le pot folosi pentru a rezolva cu computerul probleme de matematică din activitatea curentă.

Profesorii şi elevii din învăţământul preuniversitar, în special cei din domeniile informatică şi matematică, vor găsi în această carte atât metodele numerice cuprinse în propriile manuale şcolare, cât şi alte metode numerice pentru rezolvarea cu computerul a problemelor de algebră, metode accesibile, interesante (metode pentru triangularizarea şi factorizarea matricelor, calculul determinanţilor, inversarea matricelor, rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare pătrate şi nepătrate, ş. a.). Totodată, cred că pentru activităţile practice de laborator vor fi utili algoritmii cuprinşi în această carte, modul de descriere al acestor algoritmi putând stimula elevii pentru obţinerea de alte variante de algoritmi (mai interesante, de ce nu?).

În final, mulţumesc în mod deosebit domnilor Prof. univ. dr. Dumitru Buşneag şi Prof. univ. dr. Nicolae Ţăndăreanu pentru aprecierile şi observaţiile importante pe care mi le-au făcut în urma realizării recenziilor la această carte. Mulţumesc totodată colegilor din Departamentul de Informatică al Facultăţii de Matematică-Informatică a Universităţii din Craiova, în special colegului Lect. univ. dr. Mircea Preda, pentru sprijinul acordat în realizarea tehnoredactării acestui material. Nu în ultimul rând, mulţumirile mele se adresează familiei, soţiei şi fiului meu, pentru suportul moral, condiţiile asigurate şi încurajările permanente pentru realizarea acestei cărţi.

Dumitru Ebâncă
Octombrie 2005, Craiova