Prefaţă

Analiza complexă este una dintre disciplinele matematice la care şcoala românească de matematică a adus importante contribuţii. De asemenea, Analiza complexă este o ramură a matematicii cu largi aplicaţii în diferite domenii ale ştiinţei şi tehnicii.

O mare parte a Analizei complexe se ocupă cu studiul funcţiilor de o variabilă complexă, cunoscută sub numele de „Teoria funcţiilor de o variabilă complexă". Bazele acestei teorii se găsesc undeva pe la mijlocul secolului al XIX-lea. Această ramură a Analizei complexe este unul dintre domeniile matematice în care se îmbină rigoarea raţionamentului matematic, cu intuiţia geometrică. Mai mult, teoria geometrică a funcţiilor analitice ajută la exprimarea în limbaj analitic a unor proprietăţi geometrice. Teoria geometrică a funcţiilor analitice are la bază noţiunea de reprezentare conformă, teorie în care funcţiile univalente au un rol esenţial. Un rezultat remarcabil în acest sens îl reprezintă teorema lui Riemann de reprezentare conformă.

Cele mai interesante funcţii de studiat s-au dovedit a fi funcţiile univalente. Una dintre problemele studiate a fost aceea de a obţine condiţii necesare şi suficiente de univalenţă pentru diferite tipuri de funcţii. Primele condiţii necesare şi suficiente au fost obţinute în anul 1931 de către Gh. Călugăreanu. O altă problemă a fost aceea de a obţine condiţii de univalenţă cât mai simple, care să fie uşor de testat. Multe dintre aceste condiţii de univalenţă exprimă anumite proprietăţi de convexitate, stelaritate, convexitate de un anumit ordin, stelaritate de un anumit ordin etc. Condiţiile de univalenţă sunt adesea prezentate sub forma unor inegalităţi diferenţiale. Prima lucrare semnificativă privind studiul funcţiilor univalente datează din jurul anului 1907 şi aparţine matematicianului P. Koebe. De atunci au fost publicate şi alte lucrări privind teoria funcţiilor univalente, printre care pot fi amintite: Z. Nehari, *Conformal mappings*,1952, L.V. Alfors, *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory*, 1973, Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, 1975, A.W. Goodman, *Univalent functions*, 1984, S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential Subordinations. Theory and Applications*, 2000.

Un capitol aparte în teoria geometrică a funcţiilor îl ocupă subordonările diferenţiale. Această teorie a subordonărilor diferenţiale mai este cunoscută şi sub numele de „ metoda funcţiilor admisibile". Teoria subordonărilor diferenţiale a fost iniţiată de S.S. Miller şi P.T. Mocanu.

Metoda subordonărilor diferenţiale, sau metoda funcţiilor admisibile, este una dintre cele mai noi metode folosite în teoria geometrică a funcţiilor analitice, având un mare merit în demonstrarea mult mai simplă a unor rezultate cunoscute deja, cât şi în obţinerea unor rezultate noi. Metoda funcţiilor admisibile are un rol important în studiul funcţiilor univalente.

O altă problemă a teoriei funcţiilor este aceea a studiului operatorilor integrali. Studiul lor a fost obiectul cercetării multor matematicieni de-a lungul timpului. Un mare ajutor în studiul Operatorilor integrali este oferit de către subordonările diferenţiale, reuşindu-se demonstrarea unor rezultate remarcabile referitoare la teoria operatorilor integrali, cât şi obţinerea altor rezultate noi. Un capitol aparte în studiul operatorilor integrali îl ocupă studiul diferitelor proprietăți ale operatorilor pe diferite clase de funcții univalente.

Operatorii integrali au fost studiați începând încă din jurul anului 1900 de către o serie de matematicieni, printre care amintim pe J.W. Alexander, R. Liberia, S. Bernardi, S.S. Miller și, mai recent, P.T. Mocanu, M. O. Reade, R. Singh, R. Sijuk și mulți alții.

Primul care a definit un operator integral pe o subclasă de funcții univalente a fost J.W. Alexander în anul 1915. În lucrarea sa, intitulată: *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions,* a fost prezentat operatorul

$$J_1(f)(z)=\int_0^z \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$$

și a demonstrat că $J_1(S^*)\subset K$.

Destul de târziu , în anul 1965 , R. Libera, în lucrarea: *Some classes of regular univalent functions*, studiază operatorul

$$J_2(f)(z)=\frac{2}{z}\int_0^z f(t)\mathrm{d}t,$$

demonstrând că $J_2(S^*)\subset S^*$.

În anul 1969, matematicianul S. Bernardi studiază operatorul

$$J_3(f)(z)=\frac{1+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z f(t)t^{\gamma-1}\mathrm{d}t,$$

care este o generalizare a operatorului lui Libera și pentru care a demonstrat că $J_3(S^*)\subset S^*$.

În anul 1963, în mai multe publicații ca, de exemplu, cea a lui W.M . Causey, *The univalence of an integral*, apare operatorul

$$J_4(f)(z)=\int_0^z \left[\frac{f(t)}{t}\right]^\alpha \mathrm{d}t.$$

Operatorul

$$J_5(f)(z)=\left[\alpha\int_0^z f^\alpha(t)t^{-1}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

prezentat, în anul 1974, în lucrarea: *Bazilevic functions and generalized convexity* a lui S.S. Miller , P.T. Mocanu și M.O. Reade, a fost o generalizare a operatorului $J_4(f)$ editat în anul 1963.

R. Singh, în lucrarea: *On Bazilevic functions*, studiază operatorul

$$J_6(f)(z)=\left[\frac{\beta+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z f^\beta(t)t^{\gamma-1}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{\beta}},$$

care are proprietatea că $J_6(S^*)\subset S^*$.

În mai multe lucrări tipărite în anul 1974 apare operatorul

$$J_7(f,g)(z)=\left[\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}}\int_0^z\left[\frac{f(t)}{t}\right]^{\alpha}\left[\frac{g(t)}{t}\right]^{\sigma}t^{\alpha+\delta-1}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{\beta}},$$

cu proprietatea că $J_7(S^*,K)\subset S^*$.

Un operator mult mai general este

$$J(f)(z)=\left[\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}\phi(z)}\int_0^z f^{\alpha}(t)\varphi(t)t^{\delta-1}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Acest operator a fost studiat de P.T. Mocanu , S.S. Miller şi M.O. Reade în lucrarea: *Starlike integral operators* din anul 1978.

Studiul operatorilor integrali a cunoscut o continuă dezvoltare, obţinâdu-se de-a lungul timpului, multe rezultate remarcabile.

În lucrarea de faţă sunt prezentate o serie de rezultate legate de proprietăţile geometrice ale unor operatori integrali. De fapt, sunt studiate unele proprietăţi de univalenţă, stelaritate, convexitate etc., pentru operatori integrali cunoscuţi, cât şi pentru unii operatori integrali noi.

În primul capitol sunt prezentate câteva noţiuni elementare legate de Analiza complexă şi, respectiv, Operatorii integrali, noţiuni care sunt folosite mai apoi la demonstrarea altor rezultate conţinute în această lucrare.

Subordonările diferenţiale ocupă un loc important în această lucrare. Sunt prezentate câteva rezultate clasice referitoare la subordonări, iar în ultimul paragraf al capitolului este expusă o aplicaţie a subordonărilor diferenţiale.

De asemenea, sunt prezentate mai multe clase de funcţii univalente, unele dintre ele cunoscute, ca, de exemplu, clasa funcţiilor stelate, convexe etc., dar şi altele recent studiate. Pentru aceste clase de funcţii sunt date unele proprietăţi precum şi diferite caracterizări analitice, care ne ajută să studiem, în capitolele care urmează, diferite proprietăţi ale unor operatori integrali.

În capitolul patru sunt prezentaţi operatori integrali, teoreme de existenţă ale lor, cât şi diferite proprietăţi geometrice pentru diferiţi operatori.

Rezultatele capitolului cinci sunt originale, aparţinând autorului. De fapt, sunt câteva generalizări ale unor operatori integrali cunoscuţi, iar pentru operatorii noi obţinuţi sunt prezentate diferite proprietăţi ale lor.

Operatorul lui Bernardi ocupă un loc important în această lucrare, proprietăţi ale sale fiind studiate pe parcursul capitolului şase.

În final sunt prezentate proprietăţi ale diferitor operatori integrali pe clasele $UCD(\alpha)$ şi $TUCD(\alpha)$, cât şi câteva lucruri legate de uniform convexitatea funcţiei hipergeometrice a lui Gauss.

Această monografie se adresează tuturor celor care doresc să-şi aprofundeze cunoştinţele în domeniul Operatorilor integrali, a funcţiilor univalente, fiind un bun ghid pentru studenţi, cercetători şi doctoranzi în domeniul Analizei complexe.

Alba Iulia
Septembrie 2003 *Autorul*