Prefaţă

Rădăcinile unităţii sunt numere complexe de o mare fascinaţie, de aceea teoria acestora trebuie privită ca o anumită parte a teoriei numerelor. Din punct de vedere istoric, rădăcinile unităţii sunt studiate şi utilizate mai ales începând cu secolul al XVIII-lea (J. L. Lagrange, L. Euler), dar primul care elaborează o teorie coerentă a acestora, relevând frumuseţea şi importanţa lor deosebită, este C. F. Gauss ([25], 1801).

În prefaţa celebrei sale cărţi ([25]), C. F. Gauss consideră că "teoria diviziunii cercului sau teoria poligoanelor regulate, prin ea însăşi nu aparţine aritmeticii, totuşi principiile ei se găsesc în aritmetica superioară".

Iar în secţiunea a VII-a a cărţii amintite, intitulată "Despre ecuaţiile de care depinde împărţirea cercului" notează cu modestie că "intervenţia noastră este nu mai mult decât un prim pas în această vastă teorie, care se cade să fie elaborată cu toată seriozitatea".

Peste aproape un secol, D. Hilbert, într-un alt ópus celebru ([32], 1897) îşi exprima viziunea sa în felul următor: "Ca şi Gauss, Jacobi şi Lejeune–Dirichlet îşi exprimă de multe ori şi cu tărie surpriza lor relativ la legătura strânsă dintre unele chestiuni privind numerele şi anumite probleme de algebră, în particular problema diviziunii cercului. Raţiunea intimă a acestei legături este astăzi bine cunoscută. Teoria numerelor şi teoria ecuaţiilor lui Galois au rădăcinile lor comune în teoria corpurilor algebrice şi această teorie a corpurilor de numere a devenit partea cea mai importantă a teoriei moderne a numerelor".

În fine, peste alte trei sferturi de veac, A. Weil ([67], 1974) are următorul punct de vedere: "Literalmente, *ciclotomie* înseamnă *diviziunea cercului.* Descoperirea de către Euler a relaţiilor dintre funcţiile trigonometrice şi cele exponenţiale transpune problema diviziunii cercului la rezolvarea ecuaţiilor binome de forma $x^n = 1$. Gauss, la 19 ani, primea medalia Fields (mai exact, ar fi primit-o dacă ar fi existat) pentru rezolvarea ecuaţiei $x^{17} = 1$ printr-o succesiune de rădăcini pătrate, ceea ce implică diviziunea cercului în 17 părţi egale, cu rigla şi compasul". Şi în continuare: "Este deci just să calificăm *ciclotomice* corpurile generate peste $\mathbb{Q}$ de rădăcinile unităţii şi subcorpurile lor; se ştie de altfel, de la Kronecker, că aceste corpuri nu sunt altele decât extinderile abeliene ale lui $\mathbb{Q}$. Dar, începând cu Jacobi, pe întreg parcursul secolului al XIX-lea folosirea acestui cuvânt (în germană, *Kreist(h)eilung*) este rezervată studiului anumitor sume remarcabile de rădăcini ale unităţii, care în zilele noastre (începând de la Hasse, se pare) se numesc sume gaussiene".

Cartea de față reprezintă o expunere cu mijloace elementare a chestiunilor de bază legate de rădăcinile unității, evitând intenționat cunoștințe mai speciale, cum ar fi cele ținând de teoria algebrică a numerelor, teoria lui Galois sau recenta teorie Cogalois (pentru care, cititorul interesat poate vedea, de exemplu [1] [2], [6], [9], [23], [32], [36], [40], [53]). Ea este structurată în cinci capitole și un Appendix.

În primul capitol se studiază grupul ciclic al rădăcinilor de ordin n ale unității și generatorii acestui grup, adică rădăcinile primitive de ordinul n ale unității. Capitolul al doilea este dedicat polinoamelor ciclotomice și tratează calculul (determinarea) acestor polinoame, ireductibilitatea lor peste corpul $\mathbb{Q}$, precum și anumite rezultate privind coeficienții acestora. Capitolul al treilea conține aplicații în aritmetică - numere prime, sume gaussiene și legea reciprocității pătratice - și în algebră - subinelele corpului $\mathbb{C}$ având grupul unităților finit, corpurile pătratice privite ca subcorpuri ale unor corpuri ciclotomice, teorema lui Wedderburn de comutativitate a corpurilor finite. Capitolul al patrulea conține aplicații în geometrie, studiind poligoane raționale și echiangulare, apoi celebra problemă a construcției cu rigla și compasul a poligoanelor regulate, tratată cu ajutorul caracterelor și sumelor Jacobi.

Fiecare din cele patru capitole este urmat de probleme, în marea lor majoritate dificile. Multe din aceste probleme sunt chestiuni teoretice, însă de mai mică importanță în viziunea noastră, fapt care a făcut să le considerăm drept "probleme". Capitolul al cincilea conține rezolvările problemelor propuse în primele patru capitole.

Așa cum am mai menționat, cartea are în esență un caracter elementar, putând fi practic citită doar cu cunoștințele generale de matematică dobândite în liceu.

Dar, din această cauză, ca și în ideea ca această lucrare să fie autoconținută, am adăugat un Appendix în care sunt explicate câteva chestiuni de aritmetică sau algebră de largă circulație, pe care le-am utilizat. Totuși, pentru a nu lungi excesiv acest Appendix, am presupus în mod tacit unele chestiuni cunoscute, ca de exemplu factorialitatea inelului de polinoame $\mathbb{Z}[X]$ sau proprietățile congruențelor în acest inel sau în inelul $\mathbb{Z}$.

Sperăm ca materialul expus în această carte să poată forma cititorului o imagine cât mai completă asupra rădăcinilor unității, la acest lucru contribuind și bibliografia, care surprinde câteva din momentele importante ale dezvoltării acestei teorii matematice, denumită și "ciclotomie".

Autorul