Einleitung

Zu den zentralen Fragestellungen der Analysis gehört zweifellos das sogenannte Dirichlet-Problem. In dessen klassischer Fassung handelt es sich um die Suche nach einer harmonischen Funktion auf einem Gebiet im $\mathbb{R}^n$, die eine gegebene stetige Funktion auf dem Rand des Gebietes in das Innere stetig fortsetzt. Dieses Problem ist eindeutig lösbar, wenn der Rand eine stückweise glatte Hyperfläche des $\mathbb{R}^n$ ist. Bei der Frage nach praktisch anwendbaren Lösungsverfahren stellt man jedoch fest, daß es außer für ganz wenige Arten von Gebieten (wie etwa für Kugeln oder Halbräume) keine expliziten Lösungsformeln bekannt sind. Dies zeigt, wie schwer es ist, die Natur einer harmonischen Funktion und den Prozeß der harmonischen Ausdehnung zu erfassen.

Heutzutage hat man längst die Gegebenheiten der euklidischen Geometrie verlassen und studiert harmonische Funktionen und Abbildungen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Die qualitativen Aussagen über das Dirichlet-Problem lassen sich großenteils übertragen. Man findet jedoch kaum noch explizite Darstellungen für die Dirichlet-Lösung in nicht-euklidischen Situationen (selbst dann nicht, wenn das Gebiet eine Kugel ist).

Die vorliegende Abhandlung, welche auf der Grundlage meiner Habilitationsschrift verfaßt ist, hat es sich zum Ziel gesetzt, an dieser Stelle einen Beitrag zu leisten, wodurch sich diese Lücke wenigstens teilweise schließen läßt, und zwar für die Räume konstanter Schnittkrümmung, unter denen die Sphären und die hyperbolischen Räume die nicht-euklidischen Prototypen sind. Das Referenzgebiet des Dirichlet-Problems ist dabei stets eine (geodätische) Kugel oder deren Äußeres. Die Lösungsfunktion wird als Poisson-Integral mit einem expliziten Poisson-Kern gegeben.

Im ersten Kapitel wird das Dirichlet-Problem für eine Kugel eingehend untersucht. Im dritten Abschnitt werden die sphärischen und die hyperbolischen Poisson-Kerne berechnet, und zwar in beliebigen Dimensionen. Es zeichnet sich der Spezialfall des Dirichlet-Problems für die Halbsphäre $\{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} |\, |x| = 1$ und $x_{n+1} > 0\}$ dadurch aus, daß sich der entsprechende Poisson-Kern als Produkt einer Funktion, welche allein vom Abstand des inneren Punktes zum Kugelmittelpunkt mit einer solchen, die vom Abstand des inneren Punktes zum Randpunkt allein abhängt, geschrieben werden kann (vierter Abschnitt). Diese im Euklidischen wohlbekannte Tatsache ist auf den nicht-euklidischen Räumen sonst nicht gegeben. Mit der Halbsphäre hängt der elliptische Raum zusammen, für den der Poisson-Kern eine unerwartet und überraschend einfache Gestalt annimmt (fünfter Abschnitt). Das in der Vergangenheit untersuchte Dirichlet-Problem für den hyperbolischen Raum im Ganzen läßt sich hier als Spezialfall einer unendlich großen Kugel behandeln (sechster

Abschnitt).

Im zweiten Kapitel werden die nicht-euklidischen Poisson-Integrale auf Desintegrationseigenschaften hin getestet, wie sie von M. Vignati Ende der 1980er Jahre in der euklidischen Situation entdeckt wurden. Auch diesbezüglich zeichnen sich die Halbsphäre und der elliptische Raum besonders aus.

Im dritten Kapitel wird das Dirichlet-Problem für das Äußere einer Kugel erörtert. Der erste Abschnitt erinnert den Leser an die diesbezüglichen Sätze in der euklidischen Situation, die aber nun aus den zuvor abgeleiteten (bislang unbekannten?) Resultaten für eine Kugelschale gefolgert werden. Die Behandlung der hyperbolischen Situation schließt sich an (zweiter Abschnitt).

Im vierten Kapitel werden harmonische Funktionen auf Umgebungen isolierter Singularitäten unter einem für die Räume konstanter Krümmung gemeinsamen Gesichtspunkte betrachtet und in den Einzelfällen konkrete Darstellungen solcher Funktionen gegeben.

Anlaß nehmend von der Untersuchung im vierten Abschnitt des ersten Kapitels wird im ersten Anhang der Frage nachgegangen, ob es im Euklidischen außer dem Poisson-Kern auch andere harmonische Funktionen gibt, die sich als Produkt aus zwei Funktionen von je einer Abstandsvariable schreiben lassen. Es wird gezeigt, daß dem nicht so ist, daß also diese Eigenschaft für den Poisson-Kern charakterisierend ist (triviale Fälle ausgenommen).

In allen nicht-euklidischen Formeln und Ausdrücken spielt die klassische hypergeometrische Funktion eine zentrale Rolle. Als „Nebenprodukte“ der Untersuchung ergeben sich in diesem Zusammenhang drei beachtenswerte Identitäten (Bemerkung am Ende von Abschnitt 1.4, in Abschnitt 1.6 und am Ende von Kapitel 2). Es wird aufgezeigt, wie sich diese Identitäten auch unabhängig von ihrer Gewinnung ad hoc herleiten lassen (im zweiten Anhang wird die erste Identität rein rechnerisch vollständig bewiesen).

An dieser Stelle möchte ich meinen Dank an Professor Nico M. Temme am „Centrum voor Wiskunde en Informatica“ aussprechen, auf dessen Vorschlag hin und mit dessen Initiative die erwähnten Identitäten einer weltweit vernetzten Gruppe von Fachleuten mitgeteilt wurden, so daß sie bald darauf auch direkt bewiesen werden konnten.

Eichstätt, im Juli 2004 E. Symeonidis