Întroducere

Problematica punctului fix este prezentă în aproape toate disciplinele matematice. Ea poate fi formulată într-un cadru foarte general şi în legătură cu noţiuni fundamentale ca noţiunea de mulţime şi de operator. Dându-se o mulţime şi un operator $f : X \to X$ se pune problema de a studia mulţimea $\mathcal{F}_f = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ numită mulţimea punctelor fixe ale operatorului f.

Teoria punctului fix se construieşte deci în funcţie de structura cu care este înzestrată mulţimea X şi de proprietăţile operatorului f.

În ultimele decenii a luat o amploare deosebită studiul operatorilor definiţi pe spaţii metrice şi pe spaţii metrice generalizate.

Problemele esenţiale ale teoriei metrice de punct fix sunt tratate într-un număr impresionanat de lucrări de sinteză, şcoala de punct fix condusă de Ioan A. Rus contribuind în mod esenţial la dezvoltarea acestui important capitol al analizei neliniare. Principalele rezultate obţinute în cei treizeci de ani de activitate a Seminarului de Puncte Fixe, se regăsesc sistematizate în Preprintul Nr. 3 din 1999, al Semariilor de cercetare matematică ale Facultăţii de Matematică şi Informatică al Universităţii Babeş-Bolyai.

Monografia de faţă îşi propune studiul şi generalizarea rezultatelor cunoscute ale principiilor de punct fix în diverse spaţii metrice şi spaţii metrice generalizate. Astfel se studiază generalizări ale spaţiilor metrice luând valori în $\mathbb{R}_+^m$, în $[\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}]^m$, spaţii 2-metrice şi în produs cartezian de spaţii metrice, după care se dau aplicaţii ale acestor rezultate la studiul unor sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale hiperbolice cu argument modificat.

La început se scot în evidenţă anumite rezultate despre funcţii de comparaţie de una şi de mai multe variabile, apoi se studiază operatori definiţi în spaţii metrice, urmate de unele principii de punct fix cunoscute, şi în încheierea acestui prim capitol se definesc operatorii Picard, slab Picard şi se dau câteva exemple importante.

Următoarele capitole prezintă rezultate referitoare la anumite teoreme de punct fix în diverse spaţii metrice generalizate, reuşind generalizarea unor rezultate prezentate de Ioan A. Rus în [141] şi [142].

Capitolul 2. se ocupă cu teoreme de punct fix în spaţii metrice cu metrica vectorială. După câteva consideraţii generale în §.2.1. se întroduce noţiunea de L-contracţie şi se deduce un principiu de punct fix pentru L-contracţii în spaţii metrice generalizate cu metrica vectorială şi în spaţii Banach ordonate. §.2.2. este consacrat unor rezultate referitoare la φ-contracţii generalizate.

Această parte conţine unele rezultate originale ale autorului. Astfel teorema 2.1.1. generalizează cunoscuta Teoremă a lui Perov, teorema 2.1.2. teorema lui Maia, iar teorema 2.2.3. reuşeşte să generalizeze rezultatele referitoare la φ-contracţii generalizate din [142], în sfârşit teoremele 2.2.4., 2.2.5. şi 2.2.6. pot fi considerate corolare ale teoremei 2.2.3.

În Capitolul 3. se generalizează Teorema lui Luxemburg-Jung [95, 110] referitoare la operatori definiţi în spaţii metrice luând valori în $[\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}]^m$. După ce se clarifică în §.3.0. structura spaţiului metric generalizat şi se dau câteva exemple, se obţin rezultate noi referitoare la φ-contracţii generalizate în teoremele 3.0.1., 3.1.1. şi 3.1.2. [63], iar ca şi corolare se obţin generalizări ale Principiului contracţiilor, ale teoremelor lui Perov, Kannan şi Čirič-Reich-Rus [43, 44, 45, 142].

§.4.0. din Capitolul 4. prezintă conceptul de spaţiu 2-metric întrodus de

S. Gähler, se dau câteva exemple de spaţii 2-metrice şi §.4.1. se demonstrează generalizări ale Principiului contracţiilor în spaţii 2-metrice [69].

În Capitolul 5. se face o sinteză a rezultatelor referitoare la operatori definiţi pe produs cartezian. În §.5.1. se generalizează unele rezultate ale matematicianului italian P. Bassanini [64], iar în §.5.2. se generalizează unele rezultate ale lui S. B. Prešič şi Ioan A. Rus.

Capitolul 6. este dedicat operatorilor Picard şi operatorii slab Picard, precum şi unele aplicaţii ale acestora în studiul dependenţei continue şi derivabilităţii în raport cu parametri al punctului fix al unui operator Picard. Aceste rezultate vor sta la baza studiului dependenţei de parametri în problemele referitoare la sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale din partea a II-a a lucrării.

Datorită întroducerii operatorilor Picard şi operatorilor slab Picard a devenit mai uşor stabilirea unor rezultate referitoare la dependenţa continuă a punctului fix de datele problemei sau continuitatea şi derivabilitatea în raport cu un parametru.

Rezultatele referitoare la punctele fixe s-au dovedit a fi un instrument important în studiul existenţei, unicităţii soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale, ecuaţii cu derivate parţiale şi diferite sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale.

Pornind de la rezultatele obţinute de D. V. Ionescu pentru probleme la limită referitoare la ecuaţii cu derivate parţiale hiperbolice cu argument modificat, cum ar fi problema lui Darboux, problema lui Picard, problema lui Cauchy şi problema lui Goursat, autorul îşi propune în partea a doua a monografiei, demonstrarea existenţei şi unicităţii soluţiei, dependenţei continue în raport cu datele problemei, respectiv dependenţei continue şi a derivabilităţii în raport cu parametrii pentru sisteme hiperbolice semiliniare cu argument modificat. Teoremele enunţate în capitolul 7. aparţin autorului monografiei şi sunt generalizări ale rezultatelor obţinute în [57, 58, 59, 62].

Lamberto Cesari a dat o metodă denumită metoda înlănţuită sau metoda lui Cesari, care apare drept ca o generalizare ale unor probleme studiate de Dario Graffi, Pietro Bassanini. Aceste probleme au la bază fenomene fizice din optica neliniară. În ultimul capitol se studiază şi se dau câteva teoreme originale cu ajutorul acestei metode se demonstrează unele teoreme de existenţă şi dependenţă continuă de datele problemei pentru anumite sisteme cvasiliniare hiperbolice cu argument modificat.

Aici doresc să mulţumesc domnului profesor dr. Ioan A. Rus pentru indrumarea ştiinţifică permanentă acordată de-a lungul a mai mult de două decenii şi pentru sprijinul de care am avut parte pe tot parcursul elaborării şi redactării acestei cărţi.

În încheiere doresc să aduc mulţumiri colegilor de la Catedra de Ecuaţii diferenţiale de la Facultatea de Matematică şi Informatică, de la Catedra de Metodica Ştiinţelor Exacte de la Facultatea de Psihologie şi Ştiinţele Educaţiei din cadrul Universităţii Babeş-Bolyai, precum şi foştilor mei colegi de la Catedra de Matematică de la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca pentru observaţiile şi indemnurile cu care m-au susţinut în elaborarea cărţii.