

# Prefață

Dinamica economică, disciplina care studiază variația în timp a mărimilor economice, este în stadiul de cristalizare. Aceasta se datorește în primul rând necunoașterii, în cercurile economiștilor, a termodinamicii proceselor în neechilibru și în special departe de echilibru. Această termodinamică dispune de modelele cele mai generale care descriu mișcările din orice sistem, deci în particular și pe cele din sistemele economice. Ele contin ecuații care merg de la cele stocastice la cele deterministe, în anumite contexte fiind ecuații cu derivate parțiale, în altele ecuații diferențiale ordinare. La ele se adaugă condiții inițiale, la limită și eventual alte constrângeri. Ceea ce nu poate furniza termodinamica sunt ecuațiile "reologice", de "material" și de "stare" corespunzătoare unor clase mari concrete de sisteme economice. De multe ori acestea nu sunt făcute cunoscute. Din cartea [101] dedicată de autoare dinamicii economice se constată existența unui număr imens de modele, dar ele nu decurg din legi de bilanț generale pentru clase particulare de "materiale" economice ci sunt deduse ad-hoc pentru diferite situații economice. De aici și multitudinea de criterii de clasificare, când cele mai naturale ar fi cele corespunzătoare claselor de "materiale" economice.

Prezenta carte constă din șase capitole, cinci anexe și o listă de 123 titluri bibliografice.

După prezentarea în Capitolul 1 a cadrului teoretic necesar studiului inițiat (noțiuni și rezultate din teoria sistemelor dinamice și a bifurcației prezentate excelent într-o formă unitară care scoate în evidență atât utilitatea acestora cât și modul cum se aplică în situații concrete) în Capitolul 2 autoarea, consultând un mare număr de lucrări de specialitate, realizează o clasificare a modelelor economice (dintre care una pe criterii economice și una pe criterii matematice). O atenție mai mare este acordată modelelor constând din prob-

leme Cauchy pentru sisteme de două ecuații diferențiale ordinare (e.d.o.) de ordinul întâi ce depind de parametri reali și sunt prezentate concret paisprezece modele economice importante pentru cele mai multe prezentând și rezultatele matematice și interpretările economice existente în literatură. În următoarele trei capitole este studiat un astfel de model care guvernează dinamica capitalului și a forței de muncă într-o firmă. Inițial modelul are nouă parametri reali. După câteva schimbări de funcții necunoscute și parametri, în model rămân doar trei parametri iar câmpul de vectori este polinomial de grad trei în prima ecuație și de grad unu în cea de a doua. În ultimul capitol este tratat un model de publicitate care conține doi parametri și neliniarități cubice.

În Capitolul 3 este studiată bifurcația statică și dinamică a modelului firmei în cazul când cel puțin unul dintre parametri este nul. Se deduc punctele de echilibru, valorile și vectorii proprii asociați, se găsește forma explicită a traiectoriilor de fază, se deduc diagramele de bifurcație statică și dinamică. În Secțiunea 3.1 este prezentat modelul, în Secțiunea 3.2 este tratat cazul când toți cei trei parametri sunt nuli, în Secțiunea 3.3 se consideră doi parametri nuli iar în Secțiunea 3.4 doar un parametru este nul. În Secțiunea 3.5 se studiază locul în spațiul parametrilor corespunzător punctelor de echilibru hiperbolice și nehiperbolice. Se trasează diagrama de bifurcație statică. Se prefigurează o analiză a bifurcației dinamice prin clasificarea punctelor nehiperbolice care au o valoare proprie nulă și două complex conjugate pur imaginare. Această analiză este completată cu una de bifurcație dinamică bazată pe teoria formelor normale și a varietății centrale. Se găsesc puncte șa-nod și se regăsesc, cu ajutorul formelor normale, centre neliniare. Se verifică rezultatele obținute separat pe axele și planele de coordonate fără axe și fără origine și se dă o estimare inferioară a codimensiunii bifurcațiilor.

Capitolul 4 este consacrat bifurcației statice pentru modelul firmei în care toți parametri sunt nenuli. Se obțin expresiile echilibrelor și ale valorilor proprii corespunzătoare, ceea ce permite găsirea cardinalului mulțimii soluțiilor staționare și deci trasarea diagramei de bifurcație statică (Secțiunile 4.1 și 4.2), a unor secțiuni în ea (Secțiunea 4.3), a unei margini inferioare a codimensiunii bifurcațiilor corespunzătoare echilibrelor nehiperbolice (Secțiunea 4.4). În spațiul parametrilor se pun în evidență suprafața corespunzătoare punctelor duble, curba  $\gamma_2$  corespunzătoare unor singularități de tip dublu-zero și un domeniu inclus în planul  $\alpha_2 = b$ , unde  $\alpha_2$  și  $b$  sunt doi dintre cei trei para-

metri, corespunzător unor centre liniare. În plus se studiază o suprafață  $F$  corespunzătoare transformării nodurilor în focare. În dependență de poziția parametrilor față de aceste varietăți (unele foarte complicate, e.g.  $F$ ), sistemul dinamic corespunzător posedă un echilibru, două sau trei, două din ele coincid, li se schimbă natura și semnele valorilor proprii într-o manieră complicată. Aceasta face necesar studiul multiplicităților diferitelor echilibre (Secțiunea 4.5.1) și a tipului valorilor proprii asociate ceea ce permite obținerea unei situații de ansamblu a punctelor de echilibru nehiperbolice, incluzând pentru completitudine și cazurile când cel puțin unul dintre parametri este nul (Secțiunea 4.5.6).

Capitolul 5 continuă studiul din Capitolele 3 și 4 cu tratări pur dinamice, permise de sistematizările din aceste capitole. Așa cum era de așteptat, punctelor de pe  $S$  le corespund șa-noduri (Secțiunea 5.1), obținute cu ajutorul aducerilor la forma normală și a teoremei varietății centrale care furnizează direcțiile atractive și repulsive. În Secțiunea 5.2 se consideră singularitățile corespunzătoare centrelor liniare de pe planul  $\alpha_2 = b$  și folosind teoria formelor normale se găsește că ele sunt centre neliniare pâna la termeni de grad trei. Cum un calcul direct devine imposibil pentru termeni de ordin superior, s-au folosit programe Maple și s-a găsit că această situație se menține pâna la termeni de grad cinci. Cazul singularităților dublu-zero este analizat în Secțiunea 5.3, de asemenea cu ajutorul formelor normale.

Aceste analize permit trasarea diagramei de bifurcație dinamică (Secțiunea 5.4) și interpretarea ei economică. Se constată o mare complexitate de dinamici iar cele care guvernează dinamica economică a capitalului și forței de muncă ale firmei sunt atât stări de echilibru cât și de bifurcație Hopf și Bogdanov-Takens degenerate, corespunzătoare unor fenomene economice care includ pe cele ciclice. Se găsește că situația cea mai periculoasă este pentru toți parametrii nuli. Deși acest caz nu are semnificație economică, matematic corespunde unei bifurcații de codimensiune trei, în jurul originii din spațiul parametrilor existând un mare număr de straturi corespunzătoare unor situații de structural stabilitate și codimensiune unu sau doi. Se verifică și pe acest caz concret că studiul complet al bifurcației necesită considerarea și a unor valori de bifurcație care nu aparțin domeniului de valabilitate a modelului concret dar care reprezintă cheia, centrul de organizare, a întregii diagrame de bifurcație dinamică.

Capitolul 6 este consacrat modelului de publicitate și anume bifurcației statice (Secțiunea 6.1), bifurcației șa-nod (Secțiunea 6.2), a celei de tip Hopf (Secțiunea 6.3.2) și dublu-zero (Secțiunile 6.3.3 și 6.3.4). Metoda principală folosită este cea a formelor normale.

În Secțiunea 6.3.5 se dă o interesantă interpretare economică a rezultatelor teoretice anterioare, regăsirea cunoscutei “spirale a publicității” confirmând corectitudinea metodelor folosite.

Anexele furnizează formule intermediare pe care se bazează studiul din capitolele 3, 4, 5 și 6.

Tema este interesantă și actuală. Domeniile în care dinamica neliniară și bifurcația pătrund și se dezvoltă în zilele noastre sunt tocmai dinamica economică și cea biologică. Pentru matematicieni aplicațiile în economie și biologie sunt mult mai ușoare decât în mecanică și fizică, cel puțin deoarece, fiind la început, este posibilă alegerea unui model care pare relativ ușor. Autoarea cărții a ales și dânsa două astfel de modele care păreau relativ fezabile dar care s-au dovedit foarte complexe. S-a verificat încă odată faptul că modelele simple de cele mai multe ori au dinamici neliniare deosebit de complicate.

Prin tratarea atât de profundă și completă a unui model matematic din economie prezenta lucrare este o operă de pionierat în dinamica economică. Aceasta s-a încadrat în tipul de abordări ale grupului nostru de dinamica neliniară și bifurcație, folosind jaloane trasate în lucrările matematicienilor Carmen Roșoreanu, Nicolae Giurgițeanu, Mihaela Sterpu, Petru Băzavan și Rodica Curtu și trasând la rândul său jaloane pentru viitoare lucrări.

Rezultatele prezentate sunt de natură preponderent teoretică dar și numerică. Unele sunt deosebit de dificil de obținut, implică metode analitice și geometrice, trebuie să țină seama de dese schimbări de dinamică la variații mici ale parametrilor, de transformări ale echilibrelor și valorilor lor proprii de asemenea cauzate de variarea parametrilor.

Prezentarea este clară, detaliată, generos ilustrată, cu calcule finalizate numeric. Este o adevărată lucrare de matematică aplicată, utilă economiștilor și interesantă pentru matematicieni. Această carte unică în literatura de specialitate prin tratarea modernă și completă a două modele de dinamică microeconomică va deschide o direcție viguroasă de cercetare economică deosebit de utilă practicienilor prin interpretări economice inedite și de actualitate.

Prof. univ. dr. Adelina Georgescu