INTRODUCERE

Cartea prezintă rezultate fundamentale dintr-un domeniu actual, în continuu progres. Spre deosebire de topologia diferențială, care studiază proprietățile globale ale varietăților diferențiabile, geometria diferențială studiază atât proprietățile locale (curbură), cât și pe cele globale (geodezice). Lucrarea de față prezintă modul în care operatorii diferențiali pe o varietate diferențiabilă pun în evidență legătura dintre geometria și topologia varietății. Acesta este un domeniu în continuă dezvoltare și a fost studiat într-o serie de monografii ([BGM], [Ch], [CP], [CPR1], [ROS], [Ro]). Menționez, în mod special, monografiile [CP] (1988), [CPR1] (2001). Mulțumesc pe această cale prof. dr. Mircea Craioveanu și prof. dr. Mircea Puta, de la Universitatea de Vest Timișoara, pentru sprijinul oferit în elaborarea acestei lucrări.

Cartea este rodul cursurilor opționale de „Geometrie Spectrală pe varietăți Riemann", ținute de autoarea prezentei lucrări studenților din anul IV de la Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea București.

În primul capitol sunt prezentate rezultate de bază din geometria riemanniană și, de asemenea, sunt introduși o serie de operatori diferențiali pe o varietate Riemann. Sunt studiate proprietăți ale diferențialei exterioare, codiferențialei exterioare, produsului exterior, produsului interior, ale gradientului, divergenței, tensorului Hesse, formei Hesse, operatorului Hodge (star), ale operatorului Laplace-Beltrami și operatorului Hodge-de Rham. În final, utilizând tehnică Bochner, sunt prezentate prima și a doua formulă Weitzenböck pe varietăți Riemann [Wu].

În al doilea capitol sunt studiate valorile proprii ale operatorului Laplace-Beltrami, acționând pe funcții, operator asociat unei varietăți Riemann (M, g) închise, conexe, orientabile. Sunt determinate 0-spectrele pentru torul plat, sferă, spațiul proiectiv și sticla lui Klein. De asemenea, sunt estimate valorile proprii ale operatorului Laplace-Beltrami (principiul minimului al lui Courant). Utilizând formulele Weitzenböck este determinată marginea inferioară a primei valori proprii nenule a operatorului Laplace-Beltrami. Determinarea exactă a spectrului unei varietăți riemanniene compacte generale nu este posibilă. Proprietățile de repartiție asimptotică ale valorilor proprii pun în evidență legăturile dintre spectru și datele geometrice globale ale varietății. Primii coeficienți cunoscuți din dezvoltarea asimptotică Minakshisundaram-Pleijel a funcției de partiție permit studiul varietăților izospectrale cu curbură secțională constantă în cazurile $2 \leq n \leq 6$.

În capitolul următor sunt investigate proprietăți spectrale ale operatorului Hodge-de Rham, acționând pe m-forme, pe o varietate Riemann închisă, conexă, orientabilă. La fel ca și în cazul 0-spectrului, problema determinării explicite a m-spectrului este foarte dificilă și în mare parte deschisă. Sunt determinate m-spectrele pentru torul plat și sferă. În continuare sunt estimate valorile proprii ale operatorului Hodge-de Rham. Această problemă este mai dificilă decât pentru laplacian, deoarece tehnici care funcţionează pentru 0-laplacieni nu mai sunt valabile pentru m-laplacieni.

Formulele Weitzenböck permit determinarea marginii inferioare a primei valori proprii nenule a operatorului Hodge-de Rham.

În finalul capitolului sunt studiate proprietăţile geometrice ale varietăţilor Riemann ce pot fi recuperate din m-spectre, utilizând dezvoltări asimptotice de tip Minakshisundaram-Pleijel-Patodi ale m-funcţiei de partiţie. Doi invarianţi m-spectrali sunt dimensiunea şi volumul unei varietăţi. Este studiată problema dacă 0-spectrul şi m-spectrul ($m \neq 0$) conţin informaţii geometrice diferite. Sunt investigate proprietăţi ale varietăţilor m-izospectrale cu curbură secţională constantă.

Capitolul al patrulea este dedicat studiului laplacianului complex pe varietăţi Kähler. Sunt prezentate proprietăţi de bază ale varietăţilor Kähler. Utilizând coordonate complexe normale într-un punct, putem utiliza tehnică Bochner pe varietăţi Kähler. Sunt prezentate formulele Weitzenböck I, II. Acestea permit studiul proprietăţilor laplacianului complex. De asemenea, sunt caracterizate varietăţile Kähler compacte cu curbură bisecţională negativă.

În finalul capitolului este prezentat spectrul laplacianului complex. Dezvoltarea asimptotică a funcţiei de partiţie conduce la determinarea unor invarianţi (p, q)-izospectrali. Sunt studiate varietăţile (p, q)-izospectrale cu curbură secţională olomorfă constantă.

Ultimul capitol studiază proprietăţile spectrale ale operatorului Dirac D pe varietăţi Riemann compacte, spinoriale, orientabile ($D^2 \cong \Delta$). Acest operator diferenţial eliptic joacă un rol important în fizica-matematică, topologie şi geometrie; studiul său este un domeniu de cercetare actual prezentat într-o serie de monografii ([Fr], [LM], [PR], [Ro]). În prima parte a capitolului sunt studiate algebrele Clifford asociate unei forme pătratice şi reprezentările grupului Clifford, grupului Pin şi Spin. Este introdusă reprezentarea complexă spinorială şi înmulţirea Clifford. În continuare sunt prezentate proprietăţi ale fibratelor principale şi fibratelor asociate. De asemenea, sunt studiate conexiunile în fibrate principale.

Pentru a defini global fibratul spinorial este introdusă noţiunea de structură spinorială asociată unei varietăţi Riemann, a cărei existenţă este asigurată de anularea celei de-a doua clase Stiefel-Whitney $\omega_2(M) = O$. Pe o varietate spinorială (M^n, g) se introduce operatorul Dirac. În ce priveşte spectrul, pentru $n = 2m$, valorile proprii ale operatorului Dirac sunt simetrice faţă de origine. Utilizând tehnică Bochner sunt demonstrate formula Schrödinger şi formula Lichnerowicz.

În final sunt estimate valorile proprii ale operatorului Dirac pe o varietate Riemann spinorială, compactă, orientabilă. Este prezentată inegalitatea Friedrich. Este introdus, de asemenea, operatorul twistor, care, într-un anume sens, este complementar operatorului Dirac. Sunt prezentate proprietăţi ale spinorilor Killing şi sunt determinate condiţiile necesare pentru existenţa acestora. În finalul capitolului este prezentată covarianţa conformă a operatorului Dirac.

Lucrarea se adresează studenţilor de la Facultatea de Matematică din anii terminali şi celor de la Master, doctoranzilor şi cercetătorilor.

Bucureşti, 2004

Autoarea