PREFAŢĂ

În anul 1864, într-un articol apărut în *Journal für reine und angewandte Mathematik*, matematicianul german Rudolf Lipschitz a studiat condiţii de convergenţă ale seriilor Fourier pentru anumite clase de funcţii. În acest cadru sunt considerate funcţii pentru care creşterea valorilor acestora este controlată de creşterea valorilor argumentului. În anul 1876, Lipschitz publică, în *Bulletin des Sciences Mathématiques,* un articol în care studiază problema Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale ordinare, unde impune asupra unei funcţii condiţia ca variaţia valorilor sale să fie dominată de variaţia valorilor celei de a doua componente a argumentului, înmulţită cu o constantă. Aceste două lucrări au impus comunităţii matematice o nouă temă de cercetare, anume teoria funcţiilor Lipschitz. În anul 1919, într-un articol apărut în *Mathematische Annalen,* Hans Rademacher a demonstrat că mulţimea funcţiilor Lipschitz, o clasă intermediară între clasa funcţiilor uniform continue şi clasa funcţiilor diferenţiabile, este destul de apropiată de aceasta din urmă. Ne referim la faptul că orice funcţie Lipschitz, definită pe un deschis din $\mathbb{R}^n$, este diferenţiabilă Fréchet aproape peste tot. Prin urmare, putem privi condiţia lui Lipschitz ca pe o slăbire a condiţiei de diferenţiabilitate.

Cartea de faţă prezintă direcţiile în care încercările de înlocuire a ipotezelor de diferenţiabilitate cu cele de a fi Lipschitz au avut succes. Teoria funcţiilor Lipschitz nu a constituit, până în acest moment, obiectul nici unei monografii, deşi au apărut numeroase articole ştiinţifice cu această tematică, în cele mai prestigioase reviste de matematică.

Funcţiile Lipschitz apar în probleme de ecuaţii diferenţiale, teoria măsurii, teoria geometrică a integrării, geometrie diferenţială, analiză funcţională şi, corespunzător, în construirea unor modele matematice adecvate din mecanică, fizică sau economie.

Prezentăm în acest sens un exemplu elocvent. Dacă (X, d) este un spaţiu metric şi e este un element fixat al său, mulţimea funcţiilor Lipschitz definite pe X cu valori reale, care se anulează în e, este spaţiu Banach relativ la norma

$$L(f) = \inf\{M \geqslant 0 \mid |f(x) - f(y)| \leqslant M \cdot d(x,y), \text{ pentru orice } x, y \in X\}$$

şi va fi notat cu $\mathrm{Lip}_0(X)$. Prin *moleculă pe* X înţelegem o funcţie $m : X \to \mathbb{R}$ cu suport finit şi având proprietatea

$$\sum_{x \in X} m(x) = 0,$$

iar pentru elemente x, y din X, definim molecula

$$m_{xy} = \varphi_{\{x\}} - \varphi_{\{y\}}.$$

Orice moleculă se exprimă ca o combinaţie liniară finită de molecule de forma m_{xy}. Pe mulţimea moleculelor se defineşte seminorma

$$||m||_{AE} = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_i|\, d(x_i, y_i) \,\middle|\, m = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{x_i, y_i} \right\}$$

şi se notează cu $AE(X)$ completatul spaţiului moleculelor pe X, modulo elementele nule. $AE(X)$ se numeşte *spaţiul Arens-Eells* (vezi R.F. Arens, J. Eells, Jr., *On embedding uniform and topological spaces,* Pacific Journal of Mathematics, **6** (1956), 397–403). Spaţiul $AE(X)$ are o strânsă legătură cu spaţiul $\mathrm{Lip}_0(X)$, în sensul că $AE(X)$ este predualul lui $\mathrm{Lip}_0(X)$ (vezi J.A. Johnson, *Banach spaces of Lipschitz functions and vector-valued Lipschitz functions,* Transactions of American Mathematical Society, **148** (1970), 147–169). Spaţiul Arens-Eells furnizează cadrul ideal pentru studiul problemei determinării unui plan optimal de transfer al produselor de la un număr dat de producători, la un număr dat de consumatori (vezi L.V. Kantorovich, G.S. Rubinstein, *On a functional space and certain extremal problems,* Dokl. Akad. Nauk., SSSR, **115** (1957), 1058–1061).

Lucrarea conţine 10 capitole.

Primul capitol prezintă generalităţi despre funcţiile Lipschitz. Este prezentată legătura dintre funcţiile cu derivate parţiale mărginite şi funcţiile Lipschitz, între funcţiile Lipschitz şi cele cu variaţie mărginită şi cele uniform continue, între funcţiile Lipschitz şi funcţiile convexe. În încheierea capitolului se prezintă un rezultat care precizează condiţiile în care orice funcţie reală continuă, definită pe un spaţiu metric, este Lipschitz şi este menţionată o caracterizare a funcţiilor Lipschitz datorată lui Fihtenholţ (şi o generalizare a acesteia datorată lui W. Julian şi K. Phillips).

În al doilea capitol este expusă celebra teoremă a lui H. Rademacher şi se menţionează unele generalizări ale ei la cazul infinit dimensional, datorate lui P. Mankiewicz, N.A. Aronszajn, R.R. Phelps şi D. Preiss.

Capitolul al treilea are ca obiect de studiu derivatele generalizate şi gradientul Clarke. Sunt prezentate analoagele teoremelor clasice de analiză pentru funcţii Lipschitz, datorate lui F. Clarke şi B.H. Pourciau: teorema de medie, teorema aplicaţiei deschise, teorema aplicaţiei inverse, teorema funcţiilor implicite şi teorema rangului. De asemenea, este menţionat un rezultat al lui S. Sciffer, referitor la existenţa funcţiilor Lipschitz care nu sunt regulate în nici un punct.

Cel de al patrulea capitol este consacrat echivalenţei Lipschitz între spaţii metrice. Este prezentat rezultatul lui I. Aharoni, care stabileşte că orice spaţiu metric separabil este Lipschitz echivalent cu o submulţime a lui c_0, precum şi remarca lui P. Assouad, legată de acest rezultat. Sunt menţionate şi alte rezultate datorate lui P. Assouad, J. Luukkainen şi H. Mohaveni-Lankarani, Kil-Woung Jun, Dol-Won Park.

Al cincilea capitol prezintă aplicaţii ale partiţiei LIP a unităţii, anume o variantă LIP a teoremei lui Dowker, datorată lui J. Luukkainen şi J. Väisäla, studiul distanţei dintre o funcţie Lipschitz şi o mulţime de funcţii Lipschitz şi o teoremă de selecţie LIP, toate datorate lui R. Miculescu.

În capitolul al şaselea sunt expuse două rezultate care precizează condiţii în care „lipirea" funcţiilor Lipschitz, respectiv local Lipschitz, este o funcţie Lipschitz, respectiv local Lipschitz. Ca aplicaţie, se prezintă o generalizare a unui rezultat al lui Sze-Tsen Hu, datorată lui R. Miculescu, care afirmă că în anumite condiţii asupra domeniului şi codomeniului două funcţii Lipschitz, care sunt omotope, sunt de fapt Lipschitz omotope.

Capitolul al şaptelea prezintă teoreme de extindere pentru funcţii Lipschitz. După prezentarea rezultatelor clasice ale lui M.D. Kirszbraun şi E.J. McShane, se continuă cu rezultatele lui J. Czipser şi L. Gehér, F.A. Valentine, I.J. Schoenberg, T.M. Flett. În final, sunt menţionate rezultatele lui E.J. Mickle, S.O. Schönbeck, A. Bressan, A. Cortesi, J. Luukkainen, J. Väisäla, R. Miculescu.

În capitolul al optulea sunt prezentate funcţiile Lipschitz ca funcţii de aproximare. Este prezentată o generalizare a lui R. Miculescu pentru un rezultat clasic al lui G. Georganopoulos, care se bazează pe existenţa partiţiei LIP a unităţii, precum şi alte rezultate datorate lui R. Miculescu şi M.C. Boiso.

Capitolul al nouălea este dedicat varietăţilor Lipschitz. Sunt caracterizate varietăţile 1-Lipschitz conexe, apoi sunt prezentate rezultatele lui J. Luukkainen şi J. Väisäla relative la scufundarea varietăţilor Lipschitz finit dimensionale şi ale lui I. Colojoară, privind scufundarea varietăţilor Lipschitz modelate într-un spaţiu Hilbert separabil, precum şi un rezultat al lui R. Miculescu, privind imersia LIP a varietăţilor Lipschitz modelate pe anumite spaţii Banach.

În capitolul al zecelea se studiază problema punctelor fixe pentru funcţii Lipschitz. Sunt prezentate rezultatele lui L. Deng şi P. Ding, K. Goebel şi W.A. Kirk, J. Górnicki şi M. Krüppel, şi Lifšic. Sunt menţionate de asemenea rezultatele lui R. de Marr şi Miloš Zahradnik, privind punctele fixe comune a două funcţii Lipschitz care comută la compunere.

În acest volum se prezintă toate rezultatele (despre care am cunoştinţă) privitoare la teoria funcţiilor Lipschitz, apărute, până în anul 2002, în principalele reviste din literatura de specialitate. Deoarece numărul acestora este mare, am decis să prezentăm numai enunţul unora dintre ele. Motivele care au stat la baza acestei selecţii sunt de două feluri. Primul, care priveşte întregul capitolul 3, este că rezultatele respective au devenit deja clasice şi, ca atare, am considerat că este suficientă, pentru completitudinea prezentării, o enumerare a lor, neînsoţită de demonstraţii, mai ales că acestea sunt, adeseori, foarte lungi. Cel de al doilea motiv se referă, în special, la rezultatele cuprinse în paragrafele intitulate „Alte rezultate". El constă în caracterul complementar al acestora, aducând însă informaţii suplimentare importante referitoare la tematica discutată.

Pentru unele noţiuni matematice se folosesc, în mod uzual, mai multe notaţii. În acest caz am folosit notaţiile utilizate de către autorii rezultatului discutat.

Mulţumesc domnului academician profesor dr. Romulus Cristescu pentru încurajarea constantă pe care am primit-o din partea domniei sale în timpul elaborării acestei cărţi, domnului profesor dr. Ion Colojoară, care mi-a îndrumat primii paşi în studiul teoriei funcţiilor Lipschitz, precum şi domnilor dr. Gheorghe Grigore şi dr. Mihai Şabac, care au avut amabilitatea să citească manuscrisul şi ale căror observaţii şi sugestii au îmbunătăţit considerabil nivelul ştiinţific al acestuia.

Lector Univ. dr. *Radu Miculescu*