INTRODUCERE

A. Născut la 17 decembrie 1842 la Nordfjordejet în Norvegia, **Marius Sophus Lie** a studiat matematica la Christiania (actualmente oraşul Oslo). În 1865 trece examenul de profesor pentru învăţământul secundar, şi intră în contact cu lucrările lui Iulius Plücker asupra complexelor de drepte, fapt care avea să-i reveleze vocaţia pentru cercetare. Primeşte o bursă de călătorie şi, în 1869, pleacă la Berlin, unde îl întâlneşte pe Felix Klein (1849 - 1925); cei doi vor dura o lungă şi fructuoasă prietenie şi colaborare. Astfel, ei pleacă la Paris unde descoperă lucrările lui Evariste Galois (1811 - 1832) şi Camille Jordan (1838 - 1921), care îi influenţează profund; lucrează împreună în teoria invarianţilor, în Analiză şi Geometrie diferenţială şi se pare că din această perioadă datează ideile lui Lie asupra grupurilor de transformări. Într-un memoriu comun din 1870, Lie şi Klein studiază sistematic subgrupurile cu un parametru ale grupului proiectiv al planului şi orbitele acestor subgrupuri ("curbele W") regăsind astfel, în cadrul teoriei grupurilor, proprietăţi ale curbelor clasice ($y = c \cdot x^m$, spirala logaritmică, etc.).

La declanşarea războiului franco-prusac (1870), Klein se întoarce în Germania, iar Lie pleacă (pe jos!) în Italia. Este arestat din greşeală ca spion german şi încarcerat, până la intervenţia lui Gaston Darboux (1842 - 1917), care îl disculpă.

În ianuarie 1871 este numit profesor la un colegiu din Christiania; în acelaşi an îşi susţine teza de doctorat la Universitatea din Christiania, intitulată: "*Asupra unei clase de transformări geometrice*". Lucrarea pune bazele teoriei transformărilor de contact (care generalizează simultan transformările geometrice punctuale şi transformarea prin polare reciproce). Începând cu 1872 lui Lie i se creează o catedră la Universitatea din Christiania, pe care o va ocupa până în 1886, dată la care Lie este chemat la Leipzig ca profesor de matematică (la catedra lui Klein) şi ca director al Institutului de Geometrie.

Teoria grupurilor Lie a fost construită începând din 1873, pe când Lie era la Christiania; ajuns la Leipzig, Lie colaborează cu Erns Engel la demonstrarea teoremelor fundamentale ale teoriei sale.

Numit profesor extraordinar la Christiania, Lie moare în 1899, la câteva luni după întoarcerea în ţară; numele său rămâne profund legat de teoria grupurilor Lie, teorie centrală în matematica modernă, la intersecţia analizei, algebrei şi geometriei şi fundamentală pentru modelele actuale ale fizicii teoretice.

În afara acestei contribuţii majore trebuie amintită şi abordarea de către Lie a "problemei spaţiului", care i-a adus autorului, în 1898, premiul Lobacevski decernat de Universitatea din Kazan pentru cercetări de Geometrie, de preferinţă neeuclidiană.

Henri Poincaré (1854 - 1912) analizează astfel opera lui Lie: "*Lie a cercetat în ce mod să se combine diferitele mişcări posibile ale unui sistem oarecare, sau mai general, diferitele transformări posibile ale unei figuri. Dacă se consideră un anumit număr de transformări şi se combină acestea în toate modurile posibile, mulţimea tuturor acestor combinaţii va forma un grup. Fiecărui grup îi corespunde o geometrie şi a noastră, care corespunde grupului deplasărilor unui corp solid, nu este decât un caz foarte particular. Dar toate grupurile ce se pot imagina vor poseda anumite proprietăţi comune, care limitează capriciul inventatorilor de geometrii; aceste proprietăţi au fost cele pe care Lie le-a studiat toată viaţa* ".

B. Ideea de grup, dominantă în matematica modernă, pare a fi demult prezentă în geometrie , implicată în conceptul intuitiv de mişcare rigidă. Definirea riguroasă a noţiunii de grup aparţine matematicianului francez E. Galois, care a utilizat-o în teoria rezolvării ecuaţiilor algebrice prin radicali. Aplicaţii ale noţiunii de grup în geometrie se întâlnesc la A. Cayley (1821 - 1895) şi J. Sylvester (1814 - 1897). Introducând noţiunea de geometrie cu grup fundamental, F. Klein a formulat în 1872 celebrul său "*Program de la Erlangen*", conform căruia, geometria este mulţimea figurilor şi a proprietăţilor invariante faţă de un anumit grup de transformări.

Lie abordează studiul general al grupurilor de transformări, care depind continuu de r parametri şi acţionează într-un spaţiu cu n dimensiuni. Tratatul său "*Theorie der Transformationsgruppen*" (T. I, II, III, Leipzig 1889, 1890, 1893) publicat în caloborare cu F. Engel, conţine un studiu sistematic al problemei, în anumite condiţii de analiticitate. Prezentăm pe scurt ideea lui Lie după G. Vrănceanu (1900 - 1979), [77] şi M. Ţarină (1932 -1992), [73].

În spaţiul numeric $\mathbb{R}^n$ al variabilelor x^i, se consideră o familie G_r de transformări S_a ce depind de parametrii $a^1, ..., a^r$ şi sunt date de ecuaţiile:

$$y^i = f^i(x^1, x^2, ..., x^n; a^1, a^2, ..., a^r), (S_a) \quad (0.1)$$

unde $f^1, ..., f^n$ sunt funcţii analitice. În raport cu operaţia de compunere (prin definiţie asociativă) familia G_r formează un grup, adică:

i) produsul a două transformări din familie aparţine familiei, deci

$$(\forall)S_a, S_b \in G_r \Rightarrow S_aS_b = S_c \in G_r.$$

ii) familia G_r conţine transformarea identică, $S_0 \in G_r$.

iii) orice transformare $S_a \in G_r$ admite o inversă S_a^{-1} şi aceasta aparţine familiei, deci:

$$(\forall)\, S_a \in G_r, (\exists)\, S_a^{-1} \in G_r \text{ cu } S_aS_a^{-1} = S_a^{-1}S_a = S_0.$$

Parametrii $c^1, ..., c^r$ ai transformării produs $S_c = S_aS_b$ sunt daţi de relaţiile:

$$c^h = \varphi^h(a^1, ..., a^r, b^1, ..., b^r),\ h \in \{1, 2, ..., r\}$$

unde funcţiile $\varphi^1, \varphi^2, ..., \varphi^r$ sunt, de asemenea, presupuse analitice.

Dacă în formulele (0.1) funcţiile din membrul drept se dezvoltă în serii de puteri într-o vecinătate corespunzătoare transformării identice (obţinute pentru $a^1 = ... = a^r = 0$) se obţine :

$$y^i = x^i + \xi^i_h a^h + \frac{1}{2}\xi^i_{hk}a^h a^k + ...$$

În acest mod se pun în evidenţă **operatorii diferenţiali** (ai "*transformărilor infinitezimale*"):

$$(0.2) \qquad X_h = \xi^i_h \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \qquad h \in \{1, 2, ..., r\}$$

despre care se arată că satisfac **ecuaţiile de structură** :

$$[X_h, X_k] = c^s_{hk} X_s,$$

unde în membrul stâng figurează **paranteza Poisson** a operatorilor (0.2), iar c^s_{hk} sunt constante numite **constantele de structură.**

Întrega teorie a lui S. Lie se bazează pe proprietăţile operatorilor (0.2) şi ale constantelor de structură. În dezvoltarea ei se pot distinge mai multe etape:

I. Etapa clasică, caracterizată prin contribuţiile aduse de S. Lie şi unii dintre elevii săi, dintre care amintim pe F. Engel, W. Killing, L. Maurer, A. Mayer, K. Umlauf, F. Schur. În toate aceste cercetări, grupul G_r se identifică cu sistemul operatorilor X_h, în baza rezultatelor obţinute privitoare la determinarea unui grup prin aceşti operatori sau prin constantele de structură (Teoremele lui Lie). Se rezolvă unele probleme legate de structura unui grup Lie. Astfel, plecând de la studiul ecuaţiei caracteristice asociate unei transformări infinitezimale a unui grup, Killing obţine clasificarea cunoscută a grupurilor Lie simple. Se descoperă apoi rolul pe care grupurile integrabile (rezolubile) îl joacă în integrarea ecuaţiilor diferenţiale, rol analog grupurilor rezolubile din teoria lui Galois. Rezultate pe această linie au obţinut E. Picard, E. Vessiot, E. Levi, L. Bianchi.

II. A doua etapă în dezvoltarea teoriei grupurilor Lie este marcată de cercetările lui Elie Cartan (1869 - 1951), începând cu teza sa de doctorat: "*Sur la structure des groupes de transformations finis et continue* " (Paris, 1891), publicată în anul 1894. În teza sa de doctorat, E. Cartan reia multe dintre rezultatele anterioare completându-le şi demonstrându-le într-un mod riguros. Ca şi în alte capitole ale geometriei diferenţiale, E. Cartan aplică în studiul grupurilor Lie metoda reperului mobil, elaborată ca un instrument general de studiu. Astfel, dacă pe varietatea M acţionează grupul de transformări G, atunci în raport cu un reper fix (absolut) R_0 cu originea în punctul $x \in M$, unei transformări $S_a \in G$ îi corespunde un reper R_a cu originea în $S_a(x)$. Deplasarea infinitezimală a reperului R_a la o variaţie infinitezimală a parametrilor $a = (a^h)$ corespunde transformării $S_a^{-1} S_{a+da}$ şi este determinată de formele Pfaff $\omega^s(a, da)$, numite componentele sale relative.

Acestea dau variaţia coordonatelor unui punct fix faţă de R prin sistemul

$$dx^i + \sum_{s=1}^{r} \omega^s(a, da) X_s x^i = 0, \tag{0.3}$$

care, prin natura problemei, trebuie să fie complet integrabil. Condiţiile de integrabilitate ale sistemului (0.3) se scriu sub forma

$$d\omega^s = \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{r} c^s_{pq} \omega^p \wedge \omega^q \ , \tag{0.4}$$

unde $d\omega^s$ este diferenţiala exterioară a lui ω^s. Condiţiile (0.4) se numesc **ecuaţiile de structură Maurer-Cartan.**

III. A treia etapă în dezvoltarea teoriei grupurilor Lie este etapa actuală. Cercetările actuale îşi au originea în cele mai sus menţionate şi au evoluat în două direcţii importante:

III_1. Algebrizare. O structură de bază care s-a degajat din studiul grupurilor Lie a fost aceea de algebră Lie, termenul fiind introdus în anul1939 de geometrul H. Weyl (1885 - 1955) în legatură cu teoria reprezentărilor. Există o strânsă legatură între proprietăţile unui grup Lie şi cele ale algebrei sale Lie. Aceasta este furnizată de **aplicaţia exponenţială**, multe dintre rezultatele clasice putând fi uşor interpretate în acest sens. De altfel, studiul general al algebrelor Lie constituie un capitol special al algebrei multiliniare, cu multiple şi interesante aplicaţii. O algebră Lie peste corpul K este o $K-$algebră L înzestrată cu o operaţie $K-$biliniară $L\times L \to L, \quad (x,y) \to [x,y]$ care satisface proprietăţile:

$$\begin{aligned} [x,y]+[y,x] &= 0, \quad (\forall)\, x,y \in L \\ [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] &= 0, \quad (\forall)\, x,y,z \in L. \end{aligned}$$

Menţionăm că multe dintre proprietăţile algebrei Lie a unui grup Lie decurg nemijlocit din teoria clasică, fiind implicit conţinute în acestea.

III_2. Globalizare. În primele decenii ale secolului nostru se pun şi se rezolvă diferite probleme legate de topologia grupurilor Lie. Astfel, a 5-a problemă a lui D. Hilbert (1862 - 1943), din lista prezentată la Congresul Mondial al matematicienilor ţinut la Paris în 1900, se referă la posibilitatea de a construi teoria grupurilor Lie fără ipoteze de derivabilitate asupra funcţiilor de compunere. Rezultate parţiale în această direcţie au fost obţinute de către L. Brouwer, pentru grupurile abeliene. Ulterior J. von Neumann rezolvă problema pentru grupuri nilpotente (în 1933), iar L. Pontreaghin pentru grupurile compacte (în 1934). Alţi matematicieni au căutat o rezolvare a problemei în condiţii mai generale. Cercetări în acest sens au fost întreprinse de A.Gleason, D. Montgomery, L. Zippin [36]. Unul dintre rezultatele obţinute, considerat ca o rezolvare satisfăcătoare a problemei lui Hilbert are următorul enunţ:

"Un grup continuu, conex, local conex, local compact şi de dimensiune finită este un grup Lie".

În prima jumătate a secolului nostru întreaga teorie a grupurilor Lie a fost reconsiderată din punctul de vedere al structurilor matematice de bază. Astfel grupurile topologice au fost studiate de O. Schreier în 1925. În deceniul al patrulea, odată cu elaborarea conceptului de varietate diferenţială, noţiunea de grup Lie se defineşte într-un mod general şi intrinsec. Este vorba de un grup G, care are o structură de varietate analitică reală astfel încât operaţia grupală

$$G \times G \to G, \quad (x, y) \to xy$$

este aplicaţie analitică.

În acelaşi context se precizează ideea de acţiune a unui grup Lie într-o varietate analitică, revenind astfel pe un plan superior la noţiunea de grup Lie de transformări considerată la începutul teoriei.

Această viziune este în acord cu spiritul actual potrivit căruia matematica actuală se caracterizează prin studiul structurilor mixte: algebrice, topologice şi diferenţiale. Studiul acţiunii unui grup Lie într-o varietate analitică se leagă strâns de unele probleme de topologie şi geometrie diferenţială, ca de exemplu de teoria spaţiilor simetrice ale lui E. Cartan sau de aceea a spaţiilor omogene. Există, de altfel, importante aplicaţii ale grupurilor şi algebrelor Lie în diverse ramuri de ştiinţă (mecanică analitică, teoria particulelor elementare, etc.).

În ţara noastră cercetări legate de teoria grupurilor Lie au fost întreprinse de **profesorul Gheorghe Vrănceanu** şi unii dintre elevii săi.

Astfel, Gh. Vrănceanu a enunţat o serie de teoreme privind grupurile Lie, finite şi continue, în care, printre altele, a precizat numărul $N - n$, pe care l-a numit clasa grupului G_r, din grupurile Lie finite şi continue.

În lucrarea "*Clasificarea grupurilor Lie de rang zero*" ("Studii şi cercetări matematice", vol. I. fasc. I, 1950, p. 46-86), Gh. Vrănceanu continuă şi adânceşte cercetările lui Killing şi Umlauf. Astfel, Gh. Vrănceanu, pornind de la ecuaţiile de structură ale unui grup G_r scrise sub forma stabilită de Cartan şi folosind metoda tensorială, aduce la forme canonice anumite mărimi ce se formează din tensorul de structură al grupului.

Interpretând apoi din punct de vedere grupal cazul în care vectorii sunt nuli, Gh. Vrănceanu rezolvă problema clasificării grupurilor Lie de rang zero. Metoda aceasta a fost apoi folosită de A. Dobrescu la clasificarea grupurilor Lie reale cu patru parametrii.

În legatură cu transformările generate de r transformări infinitezimale asociate unui grup Lie G_r, Vrănceanu a demonstrat teorema: "*Partea conexă a grupului centro-afin G_4 este în întregime generată de transformări infinitezimale*".

Menţionăm şi faptul că Gh. Vrănceanu şi I. Matei au efectuat clasificări ale algebrelor Lie reale de dimensiune 4, respectiv 5, prin metode directe.

Alte rezultate interesante obţinute de Gh. Vrănceanu sunt legate de grupurile discrete de mişcări ale spaţiilor euclidiene sau cu curbură constantă.

Dintre rezultatele referitoare la grupurile de mişcări ale spaţiilor Riemann pot fi citate cele obţinute de Gh. Vrănceanu şi K. Teleman. Plecând de la studiul lui Vrănceanu despre grupurile de mişcare tranzitive ale spaţiilor V_4, K. Teleman a studiat grupurile de mişcare tranzitive ale spaţiilor riemanniene V_5. K. Teleman a numit **spaţiu V_n separabil**, un spaţiu Riemann V_n al cărui grup de mişcare are ca invariant două sau mai multe sisteme Pfaff. Apoi a stabilit teorema: " *Condiţia necesară şi suficientă ca un spaţiu V_n cu grup de mişcare tranzitiv să fie separabil este ca grupul de stabilitate al unui punct din V_n să fie reductibil* ". În continuare K. Teleman a clasificat spaţiile Riemann V_5 cu grupuri de mişcări tranzitive. Arată, de exemplu, că în spaţiul euclidian E_5 există un singur grup neseparabil G_3; de asemenea, arată că spaţiile V_5 nu pot avea un grup tranzitiv cu 8 parametrii.

Într-un alt memoriu (publicat în 1954), K. Teleman a arătat că spaţiile simetrice $V_{2p}(\lambda)$, studiate anterior de Gh. Vrănceanu, sunt spaţii ale lui Riemann ireductibile V_{2p}, cu curbură variabilă, având un grup maxim de mişcări cu $p^2 + 2p$ parametrii.

În ceea ce priveşte grupurile de mişcări ale spaţiilor cu conexiune afină, amintim rezultatele obţinute de Gh. Vrănceanu, V. Dumitraş, M. Ţarină.

În ultimii ani au apărut lucrări referitoare la grupurile şi algebrele Lie-Banach. În ţara noastră grupurile Lie-Banach au fost studiate de Gh. Gheorghiev, A. Bejacu [4], M. Craioveanu.

Recent, G. Pripoae [61] a stabilit următoarea teoremă: "*Fie G un grup Lie conex de dimensiune $n \geq 3$. Presupunem că pentru orice două câmpuri stâng invariante X şi Y, câmpul $[X,Y]$ este o combinaţie liniară de X şi Y. Atunci orice metrică pseudo-riemanniană stâng invariantă pe G are curbura secţională constantă*". Acest rezultat constituie o generalizare a unor teoreme bine cunoscute ale lui Milnor (în cazul Riemann) [31] şi Nomizu (în cazul Lorentz) [48].

Rezultate privind algebrele de deformare asociate unui grup Lie au fost obţinute de A. Bejancu [6] şi L. Nicolescu [41]. Caracterizări ale metricilor pseudo-riemanniene bi-invariante pe un grup Lie au fost obţinute de L. Nicolescu [42].

Pseudoconexiuni pe un grup Lie au fost studiate de V. Obădeanu [61].

Monografia de faţă este rodul cursurilor opţionale de *Grupuri Lie* ţinute de autor în ultimii 25 ani la Universitatea Bucureşti. Ea prezintă rezultatele fundamentale dintr-un domeniu care cunoaşte o perioadă de reînflorire. Pe capitole, cartea conţine:

1. Generalităţi asupra grupurilor şi algebrelor Lie (subgrupuri cu un

parametru, aplicaţia exponenţială).

2. Subgrupuri Lie (teorema Cartan, teorema Chevalley).

3. Operatori diferenţiali stâng invarianţi pe grupuri Lie.

4. Algebra înfăşurătoare universală a unei algebre Lie (teorema Birkhoff-Witt).

5. Determinarea unui grup Lie de către algebra sa Lie (formula Campbell-Hausdorff, teorema fundamentală a lui Lie).

6. Reprezentări de grupuri Lie. Aplicaţii la grupurile Lie semi-simple.

7. Grupuri Lie de transformări (spaţii omogene, teoremele lui Lie).

8. Conexiuni liniare şi pseudoconexiuni invariante pe un grup Lie (conexiunile Cartan-Schouten, conexiuni invariante pe spaţii reductive).

9. Metrici pseudo-riemanniene bi-invariante pe grupuri Lie (teorema lui Nomizu, teorema lui Milnor, teorema lui Pripoae).

10. Structuri aproape simplectice şi structuri aproape complexe stâng invariante pe grupuri Lie (teorema Medina-Revoy).

Ultimele trei capitole sunt în mare măsură inedite, ele oglindind preocupări ale autorului de a investiga **proprietăţile geometrice** (conexiuni, curbură) ale grupurilor Lie.

Unele rezultate au apărut până acum doar în periodice, iar sinteza lor într-o monografie reprezintă o premieră.

Demonstraţiile sunt foarte detaliate, iar numeroase exemple şi exerciţii completează în mod armonios textul.

Cartea se adresează în primul rând studenţilor facultăţilor de matematică din anii terminali şi cercetătorilor. Cu puţin efort, cartea este accesibilă şi fizicienilor teoreticieni şi tuturor celor interesaţi într-o abordare riguroasă şi sistematică a grupurilor Lie.

Autorul