Prefaţă

Teoria distribuţiilor sau a funcţiilor generalizate reprezintă un capitol al analizei funcţionale care a apărut din necesitatea de a fundamenta din punct de vedere matematic, concepte, formule şi reguli de calcul utilizate în fizică, mecanica cuantică şi calculul operaţional, ce nu puteau fi justificate cu ajutorul analizei clasice.

Astfel, de exemplu, în anul 1926 fizicianul englez P.A.M. Dirac, introduce în mecanica cuantică, simbolul $\delta(x)$, denumit funcţia delta a lui Dirac, prin formulele $\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases}$, $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1$.

Prin acest simbol, Dirac a descris matematic densitatea unui punct material de masă egală cu unitatea plasată în originea axei de coordonate.

Se observă imediat că simbolul $\delta(x)$, denumit şi funcţia impuls, nu reprezintă o funcţie în accepţiunea analizei matematice, deoarece fiind nulă peste tot, cu excepţia originii, integrala ei este nulă şi nu egală cu unitatea.

De asemenea, relaţiile $x\delta(x)=0, \dfrac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}=\delta(x)$ nu au sens în cadrul analizei matematice clasice, unde $H(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$ reprezintă funcţia lui Heaviside, introdusă în anul 1898 de inginerul englez Oliver Heaviside.

Formalismul creat relativ la utilizarea funcţiei δ precum şi altele, deşi erau în contradicţie cu conceptele analizei matematice, au permis studiul unor fenomene discontinue şi au condus la rezultate corecte din punct de vedere fizic.

Toate aceste elemente au constituit germenii apariţiei teoriei distribuţiilor sau a funcţiilor generalizate, teorie menită să justifice formalismul de calcul utilizat în diferitele domenii ale fizicii, mecanicii şi tehnicii.

În anul 1936, S.L. Sobolev introduce noţiunea de derivată generalizată pentru funcţii în legătură cu studiul problemei Cauchy pentru ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale de tip hiperbolic.

Evenimentul major are loc în anii 1950 - 1951 când L. Schwartz publică un tratat în două volume intitulat *Teoria distribuţiilor*. În această carte se face o expunere sistematică şi unitară a teoriei distribuţiilor, cuprinzând toate abordările anterioare, justificând astfel, matematic formalismele de calcul utilizate în fizică, mecanică și alte domenii.

Monografia lui L.Schwartz, având la bază funcționalele liniare și teoria spațiilor vectoriale topologice local convexe, a impulsionat dezvoltarea multor capitole ale matematicii ca de, exemplu: teoria ecuațiilor diferențiale, calculul operațional (transformarea Fourier și Laplace), teoria seriilor Fourier și altele.

Proprietăți în sensul distribuțiilor ca, de exemplu: existența derivatei de orice ordin a unei distribuții și, în particular, a funcțiilor continue, convergența seriilor Fourier precum și posibilitatea derivării termen cu termen a seriilor convergente de distribuții, au condus la aplicații importante a teoriei distribuțiilor în tehnică, eliminând astfel o serie de restricții din analiza clasică.

În continuare teoria distribuțiilor a cunoscut o dezvoltare considerabilă, ca urmare a lucrărilor elaborate de J. Mikusińki și R. Sikorski, I.M. Ghelfand și G.E. Şilov, L. Hörmander, A.H.Zemanian etc.

Spre deosebire de metoda funcționalelor liniare și continue folosită de L. Schwartz de definire a distribuțiilor, J. Mikusińki și R. Sikorski introduc noțiunea de distribuție cu ajutorul șirurilor fundamentale de funcții continue.

Această metodă corespunde spiritului analizei clasice și astfel apare evident că noțiunea de distribuție reprezintă o generalizare a noțiunii de funcție, ceea ce justifică și termenul de funcție generalizată, utilizat în special de școala rusă. Alți matematicieni ca: H. König , J. Korevaar, Sebastiano e Silva, I. Halperin au definit noțiunea de distribuție prin diferite mijloace (axiomatică, metoda derivatelor etc.).

În prezent, noțiunea de distribuție este generalizată prin aceea de hiperfuncție introdusă de către M. Sato încă din anul 1958. Teoria hiperdistribuțiilor conține drept cazuri particulare extensii ale noțiunii de distribuție abordate de C. Roumieu, H. Komatsu, J.F. Colombeu și alții.

Lucrarea de față prezintă, în mod sistematic și sub o formă accesibilă, teoria distribuțiilor în vederea aplicării ei la studiul diferitelor fenomene din mecanică, fizică și tehnică.

În acest scop sunt date teoreme și formule de calcul, însoțite de o gamă largă de rezolvări de probleme care evidențiază modalitățile de aplicare a rezultatelor teoretice și aplicative stabilite.

Lucrarea este astfel concepută încât asigură autonomia lecturii ei de alte surse bibliografice.

Pentru definirea diferitelor clase de distribuții se prezintă spațiile de funcții cunoscute D, E, S, dar și alte două noi spații $D_p^n(r) \subset D(\mathbf{R})$ și $D_c(r,z) \subset D(\mathbf{R}^2)$, care servesc la definirea distribuțiilor reprezentabile în coordonata polară $r \in \mathbf{R}$ și, respectiv, în coordonatele cilindrice $(r,z) \in \mathbf{R}^2$.

În continuare se dau teoremele de caracterizare pentru spațiile de distribuții D', E', S' și se definesc operațiile: translația, omotetia, simetria față de origine, derivarea și produsul direct. Se prezintă proprietățile acestor operații cu distribuții și formulele corespunzătoare de calcul, urmate de o serie de exemplificări.

Ținând seamă de importanța șirurilor reprezentative Dirac, se prezintă teoreme de recunoaștere a acestora și se dau exemple cu aplicații în teoria elasticității.

Deoarece simplificarea rezolvării unor probleme este legată uneori de utilizarea coordonatelor polare în $\mathbf{R}^n$ și a coordonatelor cilindrice în $\mathbf{R}^3$, în lucrare se analizează cazul când formula schimbării de variabile la distribuții este inaplicabilă. În acest context se introduc noțiunile de distribuție reprezentabilă în coordonata polară $r \in \mathbf{R}$ și distribuție reprezentabilă în coordonatele cilindrice $(r,z) \in \mathbf{R}^2$. Asociat acestor distribuții se definește transformarea polară T_p^n și transformarea cilindrică T_c pentru care se determină anumite dependențe. Se arată că distribuțiile $\delta, \Delta\delta \in D'(\mathbf{R}^n)$ admit atât transformată polară, cât și transformată cilindrică (n=3) și se dau expresiile acestora. Acest studiu se încheie cu stabilirea condițiilor suficiente ce asigură existența transformatei polare și a transformatei cilindrice a unei distribuții din D'.

Deoarece unele mărimi întâlnite în fizica matematică depind și de un parametru real, se abordează studiul distribuțiilor depinzând de un parametru. În raport cu parametrul considerat se definesc: continuitatea, derivabilitatea și integrabilitatea distribuțiilor, dându-se și formulele corespunzătoare de calcul.

Dintre operațiile cu funcții și distribuții, produsul de convoluție ocupă un loc central datorită proprietăților sale. Această lege de compunere a două distribuții constituie un instrument eficace de studiu în calculul operațional, a ecuațiilor diferențiale și în reprezentarea unor mărimi fizice. Ca urmare, se dau criterii de existență a produsului de convoluție pentru funcții și distribuții, precum și proprietățile lui specifice.

Legat de această problematică se introduce noțiunea de produs de convoluție parțial pentru distribuții pentru care se dă formula de reprezentare, criteriile de existență precum și proprietățile lui. Menționăm că acest tip de convoluție are largi aplicații în studiul vibrațiilor longitudinale ale barelor vâscoelastice, a vibrațiilor transversale a unor asemenea bare precum și la reprezentarea operațională a forței tăietoare și a momentului încovoietor din rezistența materialelor.

Studiul seriilor Fourier în cadrul teoriei distribuțiilor îi conferă acestuia generalitatea și unitatea de tratare. În acest scop se definesc noțiunile de distribuție periodică și transformata periodică a unei distribuții cu suport compact, care constituie generalizări ale noțiunilor corespunzătoare pentru funcții.

Utilizând un șir reprezentativ Dirac de tip Dirichlet se arată că orice serie Fourier asociată unei distribuții periodice converge către distribuția corespunzătoare. Remarcăm faptul că acest rezultat obținut în spațiul distribuțiilor, elimină inconvenientul major privind problema convergenței seriilor Fourier.

În vederea aplicațiilor practice se dau formule de calcul pentru coeficienții Fourier corespunzători distribuțiilor exprimate cu ajutorul produsului de convoluție și a produsului direct. Dezvoltările în serie Fourier a distribuției lui Dirac de una și două variabile după sinusuri și cosinusuri ilustrează rezultatele teoretice obținute precum și legătura cu derivarea distribuțiilor depinzând de un parametru.

În lucrare un loc important se acordă și studiului transformării Fourier a funcțiilor și a distribuțiilor din S' și D'. Se stabilesc proprietățile acestei transformări privind operatorul de derivare, produsul direct și produsul de convoluție. Prin numeroase exemple se ilustrează modul de utilizare a proprietăților transformării Fourier la determinarea imaginilor Fourier a unor distribuții.

Ultimul capitol al cărții abordează aplicațiile teoriei distribuțiilor în tehnică. În cadrul acestei problematici se arată utilitatea teorie în reprezentarea unor mărimi fizice precum și în modelarea matematică a unor fenomene discontinue din tehnică. Astfel, sunt date reprezentările vectorilor legați, a momentelor concentrate de diferite tipuri și a potențialului de volum și de suprafață a câmpului electrostatic.

Utilitatea produsului de convoluție, cât și a celui parțial, este eviden-țiată prin studiul legii constitutive a solidelor vâscoelastice unidimensionale și a generalizării mărimilor de forță tăietoare și moment încovoietor din rezistența materialelor. Modul în care se obțin ecuațiile diferențiale în spațiul distribuțiilor este ilustrat în cazul modelării vibrațiilor longitudinale ale barelor vâscoelastice de tip Kelvin-Voigt.

Aplicațiile distribuțiilor depinzând de un parametru și a șirurilor reprezentative Dirac sunt date în legătură cu soluția generalizată (în $D'(\mathbf{R})$) a problemei la limită în tensiuni privind semiplanul elastic. În cadrul expunerii sunt înserate și rezultatele originale obținute de autor.

Considerăm că prin conținutul său, cât și prin modul de prezentare a problemelor teoretice în strânsă legătură cu cele aplicative, această lucrare este utilă cercetătorilor din domeniul matematicilor aplicate, inginerilor care lucrează în domeniul tehnic, precum și cadrelor didactice și studenților.

Februarie 2002 Autorul