

# Leonhard Euler (1707-1783)

Ion CHIȚESCU

## I. Introducere

La 15 aprilie 2007 s-au împlinit 300 de ani de la nașterea marelui matematician elvețian *Leonhard Euler*.

Ziua nașterii lui – 15 aprilie 1707 – este o dată importantă în istoria umanității și împlinirea a 300 de ani de la această zi ne face să ne înclinăm încă o dată în fața copleșitoarei personalități a lui *Euler* și ne îndeamnă să ne gândim cu modestie și respect că istoria științei și culturii au făcut-o titanii.

*Euler* era elvețian. Această mică țară – Elveția – a dat omenirii câteva mari personalități. Vom cita dintre acestea: dinastia de matematicieni și fizicieni *Bernoulli*, filozoful *Jean-Jacques Rousseau*, marele pedagog *Jean Henri Pestalozzi* și alții. Elveția a mai dat lumii rigoarea și precizia simbolizate de inegalabilele ceasuri elvețiene, precum și spiritul de onoare și fidelitate împinse până la sacrificiul suprem simbolizate de garda elvețiană.

Pentru noi, cei care lucrăm în domeniul matematicii, Elveția a dat omenirii mai presus de orice pe *Leonhard Euler*. Cine nu a auzit de *Euler*? Ne-am întâlnit cu toții în liceu cu dreapta lui *Euler*, cu cercul lui *Euler*. Poate că nu am știut, dar câteva simboluri curențe au fost încetățenite în matematică de *Euler*:  $e$ ,  $i$ ,  $\pi$ ,  $\sum$  și  $f(x)$ .

Se spune despre *Euler* că a fost cel mai mare matematician al secolului al XVIII-lea. Desigur acest gen de clasificări este întotdeauna discutabil. Este însă sigur că *Euler* este matematicianul cu cea mai întinsă operă din istorie.

*Gustav Eneström* listează 850 de titluri de memorii ale lui *Euler*. Academia de Științe a Elveției a înființat în anul 1907 (cu prilejul bicentenarului nașterii) Comisia Euler, care avea ca sarcină publicarea întregii opere a lui *Euler*, împreună cu corespondența sa, manuscrisele sale și jurnalele sale. Această întreprindere a necesitat munca a sute de matematicieni și admiratori ai lui *Euler* din întreaga lume. Publicarea operelor complete ale lui

*Euler* a început în 1783 și a fost oprită înainte de a se putea publica totul. Publicarea a fost reluată acum câțiva ani și este, acum, aproape completă. Ediția (colecția) actuală beneficiază la fiecare volum de introduceri substanțiale și date scrise de mari specialiști. Numărul de pagini al fiecărui volum variază între 300 și 600. Până în prezent au fost publicate circa 30000 de pagini. Colecția actuală la care facem referire se numește Opera Omnia (*Opera întregă*) și este divizată în 4 serii. Iată numele acestor serii:

Series prima: Opera mathematica

Series secunda: Opera mechanica et astronomica

Series tertia: Opera physica. Miscellanea

Series quarta A: commercium epistolicum

Series quarta B: Manuscripta

Referitor la Opera Omnia menționăm că:

a) Publicarea colecției a început la Editura B. G. Teubner (Leipzig și Berlin). Actualmente, publicarea este continuată de Editura Birkhauser (Boston, Basel).

b) Mai lipsesc până la editarea completă câteva volume din seriile a IV-a A și a IV-a B.

Statisticile care urmează pot fi de oarecare interes, descriind opera lui *Euler* într-un sens mai precis.

Productivitate pe ani

Perioadă	Nr. Lucrări
1725-1734	35
1735-1744	50
1745-1754	150
1755-1764	110
1765-1774	145
1775-1783	270

Repartiția pe discipline

Algebră și teoria numerelor, analiză	40%
Mecanică și fizică	28%
Geometrie (incluzând trigonometrie)	18%
Astronomie	11%
Teorie navală, artilerie și arhitectură	2%
Filozofie, teorie muzicală, teologie	1%

## Repartiția pe discipline de matematică pură

Algebră, combinatorică și teoria probabilităților	10%
Teoria numerelor	13%
Fundamentele analizei și calcul diferențial	7%
Serii	13%
Calcul integral	20%
Ecuatii diferențiale	13%
Calculul variațiilor	7%
Geometrie (inclusiv geometrie diferențială)	17%

*Euler* a reprezentat o piatră de hotar în dezvoltarea matematicii și a învățământului matematic. Cărțile sale, caracterizate prin simplitate, claritate și forță emoțională de comunicare au reprezentat primele manuale în sensul modern al cuvântului. *Euler* a devenit primul profesor al Europei nu numai în timpul său, ci și în secolul al XIX-lea. *Gauss* a spus : „Studiul operelor lui Euler rămâne cea mai bună instrucție în diferite ramuri ale matematicii și nu poate fi înlocuit cu nimic altceva“.

Putem vorbi de un „fenomen Euler“? Credem că da. Acest fenomen are următoarele componente:

a) O cultură vastă, cu tentă clasicizantă, incluzând cunoașterea multor limbi străine, printre care latina și greaca. Majoritatea operei lui *Euler* a fost scrisă în limba latină.

b) O memorie fenomenală. Se pare că *Euler* reținea aproape totul. De exemplu, chiar la o vârstă avansată, era capabil să recite întreaga Eneidă a lui *Virgiliu*, în limba latină.

c) O forță de calcul uluitoare (făcea calcule mintale uriașe fără greșală). Astronomul francez *Francis Arago* spunea: „Euler calculează așa cum oamenii respiră și vulturii zboară în văzduh.“

d) O capacitate extraordinară de concentrare. Atunci când medita asupra unui subiect, zgomotul și dezordinea dimprejur nu îl deranjau deloc. *Thiébault*, colegul său de la Academia din Berlin, spunea: „Un copil pe genunchi, o pisică pe spinare – iată cum își scria el opera nemuritoare.“

e) Capacitate de a munci în mod continuu și calm, fără întrerupere, ca mod firesc de viață.

Toate aceste componente completează în mod armonios geniul matematic al acestui titan al gândirii.

## II. Viața

### 1. Copilăria, anii de formare

*Leonhard Euler* s-a născut la Basel (Bâle), Elveția, în data de 15 aprilie 1707 și a murit la Sankt Petersburg (Rusia) în data de 18 septembrie 1783. A avut două surori mai mici: *Anna Maria* și *Maria Magdalena*.

Tatăl său, *Paul Euler*, era pastor luteran, cu studii de teologie la Universitatea din Basel, dar și cu studii de matematică (audiase cursurile lui *Jacob Bernoulli*). De altfel, în vremea studenției lor la Basel, *Paul Euler* și *Johann Bernoulli* au locuit în casa lui *Jacob Bernoulli*, care era și el fiu de pastor protestant. *Johann Bernoulli* avea să devină unul dintre cei mai importanți matematicieni ai Europei, după moartea lui *Newton* și avea să aibă o influență decisivă asupra carierei lui *Leonhard Euler*.

Cu această ocazie, menționăm imensa importanță pe care a avut-o dinastia *Bernoulli* asupra vieții și a operei lui *Euler*. *Daniel* și *Nicolaus*, fii lui *Johann Bernoulli*, aveau să-i fie cei mai buni prieteni.

Mama lui *Euler*, *Margaretha Brucker* era fiica unui pastor protestant. Evident, tânărul *Euler* a primit o educație profund religioasă și foarte solidă, bazată pe studii clasice serioase. Această dublă trăsătură a educației l-a marcat profund, definitiv, pe *Euler*, care a fost un creștin practicant, chiar teoretician al creștinismului și, de asemenea, un mare om de cultură, adept al clasicismului, cu solide consecințe de teologie, medicină, astronomie, fizică și limbi străine.

Când micul *Euler* a împlinit un an, familia s-a mutat în orașul Riehen, lângă Basel, unde *Euler* și-a petrecut majoritatea copilăriei. Grație educației sale matematice, *Paul Euler* l-a putut introduce de timpuriu pe *Leonhard* în lumea miraculoasă a matematicii, predându-i, în același timp și elemente de bază ale altor discipline. Trebuie menționat că *Paul Euler* și-a dorit cu ardoare ca fiul său să urmeze teologia și l-a îndrumat în acest sens, reușind ulterior să înțeleagă că vocația acestuia era matematica.

A urmat plecarea tânărului *Leonhard Euler* la școală, în orașul său natal, Basel. Aici el a locuit la bunica dinspre partea mamei. În școala de la Basel se predă extrem de puțină matematică (practic aproape de loc). În aceste condiții, *Leonhard* și-a potolit setea de matematică pe cont propriu, luând meditații. La vârsta de 13 ani (1720) *Leonhard Euler* se înscrie la Universitatea din Basel cu scopul declarat de a se pregăti pentru cariera teologică. În acest sens urma ca, în universitate, să primească, mai întâi o pregătire de bază teologică și filozofică, completată cu cunoștințe de limbi orientale și istorie.

Foarte curând, în timpul studenției, *Leonhard Euler* și-a dat seama că adevărata sa vocație este matematica. Acest fapt a fost recunoscut imediat de *Johann Bernoulli* care, deși era foarte ocupat, i-a indicat cărțile pe care era necesar să le citească, l-a introdus în problemele moderne de cercetare matematică și l-a primit pentru sfaturi în ceea ce privește obstacolele întâlnite. Cităm din *Euler*: „Dacă întâlneam unele obstacole sau dificultăți, mi s-a dat permisiunea să îl vizitez de câte ori voiam în fiecare duminică după amiază și el îmi explica cu multă amabilitate tot ceea ce eu nu puteam să înțeleg.“

În 1723, *Leonhard Euler* absolvă facultatea la Basel, obținând titlul de Master în filozofie. În teza de master, *Euler* compară și pune în antiteză ideile filozofice ale lui *Descartes* și *Newton*.

În toamna lui 1723, *Leonhard Euler*, respectând voința tatălui său, începe studiile de teologie la Universitatea din Basel. Studiile intense de teologie, limba greacă, limba latină și ebraică necesare facultății de teologie îl îndepărtau pe *Euler* de matematică. La rugămintea sa, *Johann Bernoulli*, care, după cum am mai spus, era prieten cu tatăl său, l-a convins pe acesta să îl lase pe *Euler* să părăsească teologia și să studieze matematica.

*Euler* reușește să încheie studiile de matematică la Universitatea din Basel în 1726. În acest răstimp, sub atenta îndrumare a lui *Johann Bernoulli*, *Euler* a citit un material enorm, incluzând lucrări ale unor coloși ai matematicii și mecanicii ca *Descartes*, *Newton*, *Jacob Bernoulli*, *Taylor*, *Wallis*, *Galilei*, *Varignon*. Deja în 1726, *Euler* scrisese o lucrare privind curbe izocrone în medii rezistente.

În 1727 a publicat un articol despre traiectorii reciproce, pe care l-a trimis să concureze pentru marele premiu la un concurs al Academiei din Paris, dedicat modalității optime de aranjare a catargelor pe un vapor. Premiul întâi la acest concurs l-a obținut *Pierre Bourguer*, cel care, ulterior, avea să fie supranumit „tatăl arhitecturii navale“. Premiul al doilea a fost acordat lui *Euler*. De notat că *Euler* a obținut în cariera sa de 12 ori premiul Academiei din Paris.

Tot în 1727, *Euler* și-a susținut teza de doctorat cu titlul „De sono“ (Despre acustică). Pe baza acestei teze, tânărul *Euler* (20 ani) a solicitat un post de profesor de fizică la Universitatea din Basel, post vacant prin decesul titularului, pe care nu l-a obținut. Unii spun că motivul major al respingerii ar fi fost tinerețea solicitantului.

## 2. Prima perioadă de la Sankt Petersburg

În fața situației create prin neobținerea catedrei de la Basel, *Euler* a trebuit să ia o decizie hotărâtoare pentru viitorul său. În acest sens, o ocazie neașteptată a apărut prin moartea, în urma unei apendicite, a prietenului său *Nicolaus Bernoulli* II la Sankt Petersburg în iulie 1726, ceea ce a creat un post liber la o catedră de aplicații ale matematicii și mecanicii în fiziologie acolo. *Euler* acceptă acest post în noiembrie 1726, punând condiția ca să pornească spre Rusia abia în primăvara lui 1727. Motivele acestei amânări au fost duble: pe de o parte, *Euler* dorea să se pregătească pentru noul post, care era foarte pretențios prin specificul său; pe de altă parte *Euler* a sperat până în ultimul moment să obțină, totuși, postul de profesor la catedra de fizică a Universității din Basel, pe care l-a dorit foarte mult. În acest sens, *Euler* a făcut o ultimă încercare scriind un articol, devenit ulterior clasic despre acustică. Totul a fost în zadar.

Să descriem puțin contextul istoric al acestui moment din viața lui *Euler*. În primul rând trebuie spus că prietenii săi *Nicolaus* și *Daniel Bernoulli* erau în Rusia din 1725, lucrând ca profesori la Academia de Științe din Sankt Petersburg. În acel moment Rusia era în epoca imediat următoare lui *Petru cel Mare*, despotul luminat care a domnit între anii 1682-1725 și a modernizat Rusia. El a fondat în anul 1703 orașul Sankt Petersburg (ulterior Leningrad și revenit astăzi la denumirea inițială de Sankt Petersburg). *Petru cel Mare* a adus în Rusia mulți savanți fundamentali ai epocii, punând bazele culturii occidentale în Rusia. Urmând ideile lui *Leibniz*, *Petru cel Mare* pregătea apariția primei instituții științifice a Rusiei: Academia de Științe din Sankt Petersburg. Moartea sa, survenită în 1725, a făcut ca văduva sa, împărăteasa *Ecaterina* I să aibă onoarea de a deschide această Academie, continuând politica culturală a soțului său. *Ecaterina* I a domnit apoi singură între anii 1725-1727.

La 5 aprilie 1727, sub domnia *Ecaterinei* I, *Euler* a plecat din Basel spre Sankt Petersburg. În vremea aceea, călătoriile nu erau deloc rapide. Să-l urmăm pe *Euler* în drumul său. Mai întâi a călătorit cu vaporul pe Rin. Apoi a traversat statele germane cu un vagon de poștă. În fine, îmbarcat la Lübeck, *Euler* ajunge pe vapor la Sankt Petersburg la data de 17 mai 1727. Din păcate, împărăteasa *Ecaterina* I a murit la foarte scurt timp după sosirea lui *Euler* la Sankt Petersburg. Această moarte nu a fost de bun augur pentru Academia de Științe din Sankt Petersburg, deoarece anturajul defunctei împărătese nu agrea prea mult pe savanții străini de la Academie.

Din punct de vedere istoric, pentru Rusia a urmat o perioadă tulbure. Pe tron a fost urcat în 1727 *Petru al II-lea* (în vârstă de 11 ani) care a domnit (evident sub tutelă) până în 1730, când a murit în mod suspect. *Ana Ivanovna*, nepoata lui *Petru cel Mare*, i-a succedat la tron. Ea a guvernat Rusia până la moarte, care a survenit în 1740. A fost urmată la tron de tânărul țar *Ivan al VI-lea*, care a guvernat sub regența mamei sale *Ana Leopoldovna* numai un an. Ei au fost înlăturați de la putere de fiica lui *Petru cel Mare*, *Elisabeta Petrovna*, care a domnit între anii 1741-1762. De menționat că Universitatea din Moscova a fost înființată în 1755, sub domnia ei. În 1762 a fost proclamat țar *Petru al III-lea* care a fost asasinat în același an de soția sa, care avea să devină marea țarina *Ecaterina a II-a*, conducătoare de excepție a Rusiei până în 1796.

Să revenim la *Euler*. La insistențele lui *Daniel Bernoulli* și *Jakob Hermann*, *Euler* a fost numit la departamentul de matematică și fizică și nu la departamentul de fiziologie, unde avusese prima numire. Trebuie să menționăm că la Academia din Sankt Petersburg activau unii dintre cei mai străluciți matematicieni ai epocii: *Daniel Bernoulli* (bun prieten cu *Euler*, cu multe preocupări de matematică aplicată), geometrul *Jakob Hermann* (rudă cu *Euler*), *Christian Goldbach* (specialist în mai multe ramuri ale matematicii, autor al faimoasei conjecturi care-i poartă numele) și mulți alții. De altfel, Academia era foarte elitistă, având un număr mic de studenți admiși, care erau de un nivel foarte ridicat. Dotarea bibliotecii era excepțională, mare parte din cărți fiind obținute din donații ale curții imperiale. Aceste circumstanțe făceau ca sarcinile didactice ale numeroșilor profesori ai Academiei să fie foarte reduse, ei putându-se dedica în liniște cercetării științifice în condiții materiale excepționale .

La Sankt Petersburg *Euler* a locuit împreună cu prietenul său *Daniel Bernoulli*, care nu s-a adaptat niciodată foarte bine la condițiile din Rusia. Spre deosebire de *Daniel Bernoulli*, *Euler* (care era un mare poliglot) a învățat foarte bine limba rusă și s-a adaptat perfect Rusiei.

Urmărind cariera lui *Euler*, îl vedem devenind profesor de fizică la Academia de Științe în 1731. În 1733, *Daniel Bernoulli* părăsește definitiv Rusia, nemulțumit de intrigile continue și de ostilitatea cu care era privit de unii colegi și unii reprezentanți ai autorității statale. Postul de șef al departamentului de matematică devine, astfel, vacant și este ocupat de *Euler*.

La 7 ianuarie 1734, *Leonhard Euler* se căsătorește cu *Katharina Gsell*, care era elvețiană, fiica pictorului *Georg Gsell*, profesor la Gimnaziul Academiei din Sankt Petersburg.

Cu *Katharina*, *Euler* a avut 13 copii dintre care au reușit să supraviețuiască peste perioada copilăriei numai 5. Numai 3 dintre aceștia i-au supraviețuit. Unul singur – *Johann Albrecht* – a devenit matematician.

Este poate, acum, momentul să spunem câteva cuvinte despre *Euler* – omul, calitățile și cultura lui ieșite din comun. Era un om deosebit, sociabil și optimist, în ciuda numeroaselor probleme de sănătate pe care le-a avut. Total lipsit de orice aroganță, deși conștient de marea sa valoare, era de o politețe deosebită, cu maniere care trădau educația aleasă pe care o primise.

A fost întotdeauna generos cu ideile sale, împărtășind altor matematicieni multe din ideile și descoperirile sale, chiar înainte de a le publica. Nu a căutat niciodată să-și însușească ideile sau descoperirile altora. Iată cum vorbea *Euler* despre faimoasa formulă sumatorie care avea să poarte numele de formula *Euler-MacLaurin*: „Nu am niciun fel de dorință de a scădea cu ceva faima celebrului domn MacLaurin, deoarece domnia sa a descoperit aceeași teoremă de sumare înaintea mea și prin urmare merită să fie numit prim descoperitor“.

Revenind la cariera științifică a lui *Euler*, vom menționa faptul că a fondat revista *Commentarii Academiae Scientiarum Imperiales Petropolitanae*. De menționat că revista ar fi putut exista numai cu articolele lui *Euler*, care lucra într-un ritm incredibil.

Din cauza muncii excesive, la 28 de ani (1735), *Euler* a suferit o congestie cerebrală (unii autori acuză și condițiile climatice din Rusia sau, chiar o eventuală cataractă) pierzându-și ochiul drept. „Voi avea mai puține distracții“ a exclamat savantul după pierderea ochiului și a continuat să muncească cu aceeași pasiune, în același ritm infernal, în ciuda sfaturilor medicilor, care i-au recomandat odihnă. Menționăm că unii biografi cred că munca excesivă pusă în slujba cartografierii teritoriului Rusiei ar fi fost la originea pierderii ochiului.

În anii 1738 și 1740 *Euler* a obținut Marele Premiu al Academiei din Paris, devenind una dintre cele mai importante figuri ale matematicii mondiale.

Anii 1727-1741 (14 ani) au fost prima etapă de ședere la Sankt Petersburg.



### 3. Etapa Berlin

Ajungem în anul de grație 1741. La Berlin, pe tronul Prusiei, era regele *Frederic al II-lea Cel Mare* (supranumit uneori „Unicul“). Putem spune cu tot curajul că el a reprezentat modelul de despot luminat. Protector al artelor și științelor, s-a înconjurat de unii dintre cei mai mari artiști și oameni de știință ai Europei pe care îi primea adesea la minunatul castel de vară Sans Souci. De asemenea *Frederic al II-lea* a fost un mare strateg, câștigând numeroase bătălii. Aceste calități au fost dublate și de un foarte bun spirit administrativ. Desigur, i s-ar putea imputa vanitatea ieșită din comun, precum și excesiva admirație pentru limba și cultura franceză. În acest sens este de remarcat faptul că *Frederic al II-lea* și-a scris „Memoriile“ în limba franceză.

În acest timp, în Rusia, situația politică era tulbure. Începuseră să se manifeste sentimente de xenofobie, savanții străini de la Academia de Științe din Sankt Petersburg resimțind o oarecare nesigurantă. Moartea țarinei *Ana Ivanovna*, în 1740 a sporit starea de incertitudine din țară. Consecvent cu politica sa de atragere a marilor figuri ale artei și științei, *Frederic al II-lea* îl invită în mod imperativ pe *Euler* să vină la Berlin, în 1741. *Euler* acceptă invitația, pleacă din Sankt Petersburg la 19 iunie 1741 și ajunge la Berlin la 25 iulie 1741, unde este numit profesor la nou înființata Academie Prusiană (viitoarea Academie din Berlin), stabilindu-se cu întreaga familie. Obține imediat poziția de director al departamentului de matematică. De remarcat că președinte al Academiei a fost numit mecanicianul francez *Maupertuis*, situat cu mult sub *Euler* în clasificarea neoficială a savanților epocii. Cei doi au fost însă buni prieteni și *Euler* l-a înlocuit de multe ori de facto.

*Euler* avea să rămână la Berlin 25 de ani, până în 1766. Activitatea sa de la Berlin a fost uriașă, am putea spune incredibilă. Pe lângă cercetările de matematică, finalizate cu un număr fenomenal de articole (380) și cărți, *Euler* a mai avut și alte numeroase activități, dintre care cităm: a supervizat observatorul astronomic și grădina botanică; a supervizat problemele financiare ale Academiei; a înlesnit publicarea de calendare și hărți geografice, din a căror vânzare s-au obținut venituri serioase pentru Academie; a conceput baza teoretică a corectării nivelului apei în Canalul Finow; a supervizat munca la pompele și conductele sistemului hidraulic al castelului Sans Souci. Referitor la această ultimă activitate este, poate anecdotice, să amintim că *Frederic al II-lea* se plângea într-o scrisoare către *Voltaire* de prestația lui *Euler*, care ar fi lucrat mai mult ca un geometru decât ca un inginer. Să mai adăugăm la aceste activități că *Euler* a fost consilier al guvernului pentru loteria de stat, asigurări, pensii și artilerie. A fost, poate, cel mai activ membru al comitetului științific al Academiei, ocupându-se de bibliotecă și

publicațiile științifice.

Pe bună dreptate ne întrebăm: când a mai putut *Euler* ca în această perioadă să producă 380 de articole de cercetare, precum și nenumărate cărți în următoarele domenii: calcul variațional, calculul orbitelor planetelor, artilerie și balistică, construcție de nave, navigație, mișcarea lunii, calcul diferențial. O carte cu un caracter aparte este „Scrisorile lui Euler asupra unor subiecte variate, adresate unei prințese germane“ (3 volume). În această carte, *Euler*, care fusese numit și tutore al prințesei de Anhalt-Dessau (nepoata regelui *Frederic al II-lea*) strânge circa 200 de scrisori către prințesă, în care expune în mod popular chestiuni privind matematica și fizica, dar și religia. Cartea va oferi o privire asupra personalității lui *Euler*. De menționat că această carte a cunoscut un succes enorm fiind mai citită decât toate operele matematice ale lui *Euler*, în întreaga Europă și în Statele Unite. Această carte ilustrează pe deplin talentul inegalabil de mare comunicator al lui *Euler*.

În acest răstimp, *Euler* a păstrat legăturile cu Rusia, rămânând membru al Academiei de Științe din Sankt Petersburg, căreia *Euler* i-a trimis spre publicare aproximativ jumătate din scrierile sale, fapt pentru care a primit în mod continuu pensie din partea sus-numitei Academii.

Ne apropiem acum de sfârșitul perioadei berlineze din viața lui *Euler*. La acest sfârșit au contribuit doi factori: unul negativ și altul pozitiv.

Factorul negativ, care trebuie menționat din motive de onestitate istorică, nu face cinste unei mari personalități din istoria culturii. Unul din cei mai admirați și iubiți oameni de cultură aduși la curte de *Frederic cel Mare* era *Voltaire*, care exercita o poziție dominantă fiind un fel de favorit al monarhului. Intrigile lui *Voltaire*, combinate cu disprețul afișat de acesta față de modul onest și direct de comportament al lui *Euler*, l-au afectat profund pe acesta.

Factorul pozitiv a fost reprezentat de dorința puternică a mării împărătese *Ecaterina a II-a* a Rusiei de a-l readuce pe *Euler* în Rusia, în cadrul eforturilor ei (încununată de succes) de revenire la gloria anterioară a Academiei de Științe de la Sankt Petersburg.

În acest sens, ambasadorul rus la Berlin a fost acreditat să accepte absolut toate condițiile impuse de *Euler* pentru întoarcere.

În 1766, *Euler* decide să părăsească Berlinul pentru a reveni la Sankt Petersburg. *Frederic al II-lea* a fost profund șocat de această hotărâre a lui *Euler* și, inițial, nu i-a permis să plece. În urma presiunilor formidabile exercitate de țarină și în fața hotărârii neclintite a lui *Euler*, *Frederic al II-lea* a cedat și *Euler* a plecat spre Rusia în 1766, prin Polonia. În Polonia a fost primit cu mare fast și respect de regele *Stanislas*. Întoarcerea la Sankt

Petersburg a fost un adevărat triumf.

Menționăm că succesorul lui *Euler* la Berlin a fost *Lagrange*.

#### 4. A doua perioadă la Sankt Petersburg, ultimii ani

În 1766, la reîntoarcerea în Rusia, *Euler* era în vârstă de 59 de ani. Avea să mai trăiască acolo 17 ani, caracterizați de o productivitate extraordinară (aproape o jumătate a operei sale), dar marcați din nefericire, de pierderea completă a vederii și alte nenorociri.

Munca istovitoare de zi cu zi i-a slăbit și mai mult vederea care era deja afectată. În urma operației nereușite de cataractă, *Euler* orbește complet în 1766. Geniul său a făcut ca această tragedie să nu-i afecteze aproape de loc productivitatea matematică.

Este momentul să reamintim că *Euler* a fost unul din cei mai extraordinari calculatori ai tuturor timpurilor : era capabil să efectueze calcule urișe mintal, cu o rapiditate și o precizie incredibile.

În plus, după cum am spus, memoria sa era fabuloasă. Combinând toate aceste utilități, *Euler* a continuat să creeze ajutat de fiii săi *Johann Albrecht Euler* (care devenise în 1766 profesor la catedra de fizică a Academiei de Științe din Sankt Petersburg, fiind apoi numit și secretar al acesteia în 1769) și *Cristoph Euler* (militar de carieră), precum și de matematicienii *Krafft*, *Lexell* și *Fuss*. Metoda de lucru era următoarea: *Euler* dicta (în special lui *Johann Albrecht*) și în același timp, el purta discuții matematice cu asistenții săi, pe care uneori îi pune să îi completeze calculele.

Cu generozitate și onestitate, maestrul i-a răsplătit pe discipoli pentru eforturile depuse în ajutorul său. De exemplu, *Johann Albrecht*, *Kraft* și *Lexell* au fost creditați ca autori ai unei lucrări de 775 de pagini privind mișcarea lunii.

După pierderea completă a vederii au urmat alte nenorociri. În 1771, un incendiu i-a distrus casa. Intervenția providențială a artistului *Peter Grimm* din Basel l-a salvat pe *Euler* din mijlocul flăcărilor. Au ars aproape toate cărțile din casă dar, în mod miraculos, au putut fi salvate manuscrisele lui *Euler*.

În 1773, după o căsătorie care a durat 40 de ani, soția lui *Euler*, *Katharina* trece în lumea dreptilor. Rămas văduv, *Euler* se recăsătorește în 1776 cu sora *Katharinei*, *Abigail Gsell*.

*Leonhard Euler* a murit la 18 septembrie 1783 la vârsta de 76 de ani. Iată cum descrie istoricul rus al științelor *A. P. Iușkevici* (*Youschkevitch*) ultima zi din viața lui *Euler*: „În data de 18 septembrie 1783 Euler și-a petrecut prima parte a zilei ca de obicei. A făcut lecția de matematică cu nepoții, a făcut câteva calcule privind mișcarea baloanelor, cu creta pe două

table; apoi a discutat cu Lexell și Fuss despre recent descoperita planetă Uranus. În jurul orei 5 după amiază a suferit o hemoragie cerebrală și a mai apucat să murmure „Mor!“ înainte de a-și pierde cunoștința. A murit în jurul orei 11 noaptea.“

Elogiul la moartea lui *Euler* a fost scris, din partea Academiei Franceze, de marchizul *de Condorcet* care a fost, ulterior, una din victimele terorii dezlănțuite de revoluția franceză.

*Euler* este îngropat în celebra necropolă Nevskii Lavra din Sankt Petersburg. Sarcofagul în care odihnește marele savant se găsește într-unul din locurile sfinte ale Rusiei, alături de alte mari personalități, ca *Lomonosov* și alții.

### III. Opera

Este foarte greu, dacă nu imposibil, să cuprinzi într-o conferință datele esențiale privind geniala și imensa operă a lui *Euler*. Voi încerca în cele ce urmează să mă achit de această sarcină quasi-imposibilă cu riscurile inerente ale unei selecții eventual arbitrare și superficiale.

Contribuția lui *Euler* la Analiza Matematică a fost decisivă. Putem spune că Analiza Matematică a început cu *Euler*. *Euler* a conceput analiza ca studiu al funcțiilor.

Se știe că există o dispută istorică în ceea ce privește primatul asupra introducerii analizei matematice ca disciplină între școala britanică (pentru care fondatorul analizei este *Isaac Newton*) și școala germană (pentru care fondatorul analizei este *Gottfried Wilhelm Leibniz*). *Euler* a reușit să contopească metoda fluxiunilor a lui *Newton* cu calculul diferențial al lui *Leibniz*.

Cărțile de analiză al lui *Euler*, dinte care cităm pe cele mai faimoase: „*Introductio in analysis infinitorum*“ (în care apare celebra formulă  $e^{i\pi} + 1 = 0$ ), „*Institutiones calculi differentialis*“ și „*Institutiones calculi integralis*“ au reprezentat multă vreme sursa unică și autorizată de învățare a analizei matematice.

*Euler* s-a ocupat de derivatele parțiale mixte, intuind comutativitatea lor (criteriile *Young-Schwarz*) și a descoperit criteriul ca o formă diferențială să fie exactă (în limbaj arhaic „să fie diferențială totală“).

A studiat probleme de maxim și minim și a utilizat în mod constant regulile lui *L'Hospital*.

*Euler* a introdus integralele care îi poartă numele (integralele euleriene, adică funcțiile beta și gamma).

În teoria seriilor, *Euler* a avut realizări nenumărate și remarcabile. A

reușit să calculeze  $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  printr-o metodă profund neortodoxă (problema găsirii sumei acestei serii fusese studiată fără succes de *Leibniz*, *Stirling*, *De Moivre*, *Jakob*, *Johann* și *Daniel Bernoulli*).

Cu metode similare, *Euler* a descoperit că  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ ,  $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ ,  $\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$ ,  $\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$  și  $\zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$ , generalizând apoi formula cu ajutorul numerelor lui *Bernoulli*.

A obținut celebra formulă privind egalitatea între  $\zeta(s)$  și produsul numerelor de forma  $\frac{1}{1-p^{-s}}$  cu  $p$  prime. A obținut foarte multe dezvoltări în serie.

De asemenea, *Euler* s-a ocupat de metode de sumare pentru serii divergente sau foarte lent convergente (accelerarea convergenței). A obținut celebra constantă care îi poartă numele (limita șirului  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ ).

Inspirat de o carte în două volume a lui *Fagnano*, *Euler* s-a ocupat de integralele eliptice (de altfel el a recunoscut mereu întâietatea lui *Fagnano* în acest domeniu) și a creat, practic, teoria funcțiilor algebrice.

*Euler* a obținut rezultate remarcabile în teoria fracțiilor continue.

Contribuția lui *Euler* la teoria ecuațiilor diferențiale a fost covârșitoare. Îi datorăm rezolvarea ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, precum și rezolvarea ecuațiilor liniare de ordin 2 cu coeficienți variabili. De asemenea, *Euler* a introdus factorul integrant. În fine, *Euler* a avut și ideea metodei variației constantelor.

Putem spune că *Euler* este fondatorul calculului variațional dând celebrele ecuații *Euler-Lagrange* (descoperite independent de *Lagrange*).

În legătură cu geneza calculului variațional trebuie să menționăm că ea este datorată faimoasei probleme a brahistrocronei, propusă de *Johann Bernoulli*.

Această problemă a fost rezolvată de mai mulți matematicieni (se pare că *Newton* a rezolvat-o în aproximativ două ore). *Euler* a dat o teorie sistematică a rezolvării acestui tip de probleme fondând, după cum am spus, calculul variațional. (A se vedea cartea sa „*Methodus inveniendi lineas curvas*“). Ulterior, *Lagrange* a intervenit, scriindu-i lui *Euler* și introducând derivata variațională și metoda multiplicatorilor care îi poartă numele.

*Euler* a avut realizări remarcabile în geometrie (incluzând trigonometria). Nu vom vorbi despre așa-zisa „geometria elementară“, unde ne-a lăsat rezultate remarcabile – adevărate perle ale matematicii. Ne vom referi

aici, în primul rând la faptul că *Euler* a introdus în mod riguros funcțiile trigonometrice, dând și faimoasa formulă

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

În al doilea rând, *Euler* a început studiul teoriei suprafețelor, investigând, între altele, curbura lor. A introdus geodezicele. Multe din rezultatele sale nu au fost publicate și au fost redescoperite ulterior de *Gauss*. În fine, să nu uităm celebra formulă pe care i-o datorăm lui *Euler* privind legătura între numărul vârfurilor, muchiilor și fețelor unui poliedru convex:  $V + F = M + 2$ .

Ajungem și la teoria numerelor unde *Euler* ne-a lăsat o multitudine de rezultate fundamentale.

La *Euler*, teoria numerelor a fost strâns împletită cu Algebra, pentru care ne-a lăsat monografia „Anleitung zur Algebra“, în două volume. Această monografie a constituit, multă vreme, textul standard după care se învăța algebra. De remarcat că în acest manual, *Euler* a introdus multe probleme pe care le-a rezolvat atunci când învăța algebră în primii ani cu tatăl său (informație comunicată de prof. dr. *D. Vaida*). În sus-numita monografie figura și formula binomului lui *Newton* cu exponent real (seria binomială).

Menționăm că multe din rezultatele din teoria numerelor au fost obținute pornind de la discuțiilor avute de *Euler* cu colegul său *Christian Goldbach* de la Academia de Științe de la Sankt Petersburg. De exemplu, acesta l-a incitat pe *Euler* să se ocupe de conjectura lui *Fermat* privind faptul că numerele de forma  $2^{2^n} + 1$  sunt prime. *Euler* a demonstrat falsitatea conjecturii arătând că  $2^{32} + 1$  se divide cu 641.

Studiile de teoria numerelor l-au condus pe *Euler* la introducerea funcției  $\varphi$  ( $\varphi(n)$  = numărul acelor  $1 \leq k < n$  prime cu  $n$ ). Cu ajutorul lui  $\varphi$ , *Euler* a generalizat mica teoremă a lui *Fermat*. Legat de numele lui *Fermat*, menționăm că *Euler* a demonstrat celebra sa conjectură („marea teoremă a lui *Fermat*“) pentru  $n = 3$ .

Mai menționăm că multe rezultate ale lui *Euler* în teoria numerelor sunt inspirate de lucrările lui *Fermat*. Anume, *Euler* a demonstrat sau a infirmat o mulțime de rezultate ale lui *Fermat* adnotate de acesta pe o ediție franceză a cărții „Arithmetica“ a lui *Diofant*.

Alte rezultate ale lui *Euler* în teoria numerelor se referă la numerele care se pot reprezenta ca sume a două pătrate, legea reciprocității pătratice (pe care doar a intuit-o, demonstrația fiind dată ulterior de *Gauss*), numere poligonale etc.

În legătură cu contribuția lui *Euler* la teoria numerelor, trebuie spus că aceasta este cuprinsă în 4 volume din Opera Omnia. Din acest motiv, putem

spune că teoria numerelor a devenit o parte importantă a matematicii, grație lui *Euler*.

*Euler* este și fondatorul teoriei grafurilor. Nașterea acestei discipline coincide cu rezolvarea de către *Euler* a problemei celor șapte poduri din Königsberg (orașul lui *Immanuel Kant*, astăzi Kaliningrad, enclavă rusă). Problema era de a străbate câte o singură dată toate cele șapte poduri de pe râul Pregel care trece prin Königsberg, cu întoarcere în punctul de start (recunoaștem problema determinării unui circuit hamiltonian).

*Euler* a fost unul dintre cei mai mari mecanicieni din istorie (inclusiv aici și mecanica cerească). Cartea sa „Mechanica“ a dat un impuls hotărât mecanicii.

Fundamental, în ceea ce privește viziunea lui *Euler* asupra mecanicii, este faptul că, spre deosebire de predecesorii săi, el a folosit, în mod constant, analiza matematică.

În mecanica sistemelor rigide a determinat ecuația generală de mișcare a unui corp în jurul unui punct fix. A dat ecuația generală de mișcare a unui corp liber.

A fundamentat teoretic principiul minimei acțiuni al lui *Maupertius*.

A atacat problema celor trei corpuri.

A dat ecuațiile generale de mișcare în hidrodinamică.

Menționăm că la data morții sale, *Euler* scria un tratat de hidromecanică.

S-a ocupat de hidrostică în legătură cu proiectarea navelor.

În studiul mișcării unui punct material pe o suprafață el a folosit metoda geodezicilor.

În fundamentala carte „Theoria motus corporum solidorum“, *Euler* decompunea mișcarea unui solid într-o mișcare rectilinie și una de rotație, introducând cu această ocazie unghiurile care îi poartă numele.

Lucrările de mecanica fluidelor ale lui *Euler* sunt fundamentale (a dat ecuația de continuitate, ecuația de mișcare a unui fluid nevâscos incompresibil etc.). Metodele sale în acest domeniu erau uimitoare și mult superioare predecesorilor săi *Bernoulli*, *Clairaut* și *D'Alembert*.

În astronomie (mecanica cerească) *Euler* a obținut rezultate privind calculul orbitelor cometelor, calculul paralaxei Soarelui etc. (a se vedea cărțile „Theoria Motus Lunarum“ și „Theoria Motuum Planetarum et Cometarum“). Rezultatele sale au fost folosite de *Mayer* pentru alcătuirea unor tabele privind mișcarea Lunii.

*Euler* ne-a lăsat și un tratat de optică intitulat „Dioptrica“ (trei volume) în care combate teoria corpusculară a luminii a lui *Newton*.

Ca o curiozitate, menționăm și un tratat de teoria muzicii, intitulat „Tentamen novae theoriae musicae“ (1739) în care încerca să facă muzica (cităm): „parte a matematicii și să deducem, într-un mod ordonat, din principii corecte, tot ceea ce face să se potrivească și să se amestece tonurile în mod plăcut“. Din păcate, lucrare era (iarăși cităm) „pentru muzicieni prea avansată în matematică și pentru matematicieni prea muzicală“.

Nu putem încheia aceste referiri la opera lui *Euler* fără să amintim despre scrierile sale cu caracter filozofic și religios. *Euler*, în armonie cu originea sa părintească și cu formația sa, era profund credincios și poseda o bogată cultură filozofică. Ca orientare filozofico-creștină, *Euler* era un opoent al filozofiei monadelor, datorată lui *Leibniz* și discipolului său *Christian Wolff*. Ideile filozofico-religioase ale lui *Euler* apar în deja pomenita culegere „Scrisori către o prințesă germană...“, precum și în lucrarea „Apărarea revelației divine împotriva obiecțiilor liber-cugetătorilor“ („Rettung der Göttlichen Offenbahrung gegen die Einwürfe der Freigeister“).

Terminând de prezentat opera lui *Euler*, este obligatoriu să mai adăugăm un fapt care ilustrează deopotrivă imensul volum de lucrări lăsat de *Euler*, cât și onestitatea sa și atașamentul față de Academia de Științe de la Sankt Petersburg. El s-a angajat să lase Academiei atâtea memorii cât să se poată publica în anele ei 20 de ani după moartea sa. A dat mai mult decât a promis! S-a putut publica 40 de ani după moartea sa!

#### IV. Încheiere

Suntem la capătul acestui lung expozeu despre viața și opera genialului *Leonhard Euler*. Ne înclinăm înfiorați în fața măreției sale.

Am vorbit despre un titan. Nu putem încheia altfel decât citând pe un alt titan – *Pierre-Simon Laplace*: „Citiți-l pe Euler, citiți-l pe Euler! El este profesorul nostru, al tuturor!“

**Facultatea de Matematică și Informatică  
a Universității din București  
Str. Academiei, nr. 14, București**