Analele **Univ**ersităţii **Bucureşti**, **Mat**ematică
Anul LIV(2005), pp. 31–32

Spaţiile neolonome şi conexiunea lui Vrănceanu

Steriu IANUŞ

April 27, 2004

Spaţiile neolonome au fost introduse de G. Vrănceanu în două lucrări publicate în *C.R. Acad. Sci. Paris, t.183 (1926), p. 852-854* şi *p. 1083-1085*. O expunere detaliată a spaţiilor neolonome a fost făcută ulterior în monografia *Les espaces non-holonomes et leurs applications mécaniques*, apărută în 1936 la editura franceză Gauthier-Villars în Paris şi în tratatul *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol.II (1964). În limbajul geometriei diferenţiale actuale, un spaţiu neolonom este o varietate diferenţiabilă M înzestrată cu o distribuţie (diferenţiabilă) sau, cu alte cuvinte, un subfibrat V al fibratului TM care nu satisface conditia de integrabilitate. Condiţia de neintegrabilitate a distribuţiei V revine la a spune că spaţiul secţiunilor subfibratului V nu este stabil faţă de paranteza Poisson. În 1976, la 50 de ani de la introducerea spaţiilor neolonome, s-a ţinut la Iaşi o Conferinţă Naţională care a marcat evenimentul. Academia Română a publicat *Lucrările Conferinţei Naţionale de Spaţii Neolonome* (Editura Academiei, 1979) în care sunt prezentate rapoarte de sinteză asupra teoriei spaţiilor neolonome.

În această notă ne vom referi numai la un concept din această teorie, conceptul de conexiune Vrănceanu pentru un spaţiu neolonom (distribuţie neintegrabilă pe o varietate). Vom indica câteva din lucrările unor cercetători în geometria diferenţială care au folosit acest concept.

Fie V o distribuţie (neintegrabilă) pe o varietate diferenţiabilă M înzestrată cu o conexiune liniară D. Să notăm cu V' o distribuţie suplementară, deci avem $TM = V + V'$. Notăm cu v şi v' proiectorii asociaţi celor două distribuţii V, respectiv V'. Conexiunea Vrănceanu este o conexiune liniară ∇ pe M, definită prin

$$\nabla_X Y = vD_{vX}vY + v'D_{v'X}v'Y + v[v'X, vY] + v'[vX, v'Y] \qquad (1)$$

unde X şi Y sunt câmpuri vectoriale pe M.

Proprietatea geometrică remarcabilă a conexiunii Vrănceanu ∇ este că distribuţiile V şi V' sunt paralele în raport cu ∇. În alte cuvinte, dacă se transportă prin paralelism cu conexiunea Vrănceanu un vector oarecare din V (sau din V') în lungul unei curbe oarecare pe M, vectorul nu iese din distribuţia V (respectiv V').

Un studiu local (folosind metoda congruenţelor) al conexiunii ∇ este prezentat în vol. II al tratatului citat mai sus. Formularea invariantă (1) a conexiunii Vrănceanu a fost considerată pentru prima oară de S. Ianuş, în lucrările publicate în *C.R. Acad. Sci. Paris, t.272 (1971), p. 734-735* şi *Kodai Math. Sem. Reports, 23 (1971), p. 303-310.*

Câţiva ani mai târziu, în colaborare cu Iulian Popovici, am considerat conceptul de V-conexiune (care este o conexiune parţială) în lucrarea *On the Vrănceanu's nonholonomic connections, An.Şt.Univ.Al.I.Cuza,Iaşi,t.26(1980), p.389-393).*

Un studiu interesant asupra prelungirii unei conexiuni Vrănceanu la spaţiul total TM al vectorilor tangenţi la o varietate M a fost realizat de Renzo Caddeo (în prezent profesor la Universitatea din Cagliari, Italia) într-o lucrare apărută în *Rev. Roumaine Math. Pures Appl., t.24 (1979), p.339-345).* Menţionăm că lucrarea a fost elaborată când R. Caddeo era în România cu o bursă C.N.R.(Italia) acordată pe o perioadă de 2 ani ca să facă cercetare sub conducerea profesorului G. Vrănceanu. În colaborare cu Paola Matzeu, el a mai publicat o lucrare în care se ocupă de conexiunea parţială Vrănceanu (în revista *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari,49 (1979), p.331-341*). Studiul V-conexiunilor pe TM a fost făcut de A. Cabras şi P. Matzeu într-o lucrare publicată în *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, 27 (1983), p.203-213.* Menţionăm că R. Caddeo, A. Cabras şi P. Matzeu erau atunci asistenţi la Departamentul de Geometrie de la Universitatea Cagliari, condus de profesorul Ettore Picasso (care a făcut o vizită în România pentru a participa la o comemorare a lui Gh. Ţiţeica din 1979), unul din numeroşii prieteni italieni ai prof. G. Vrănceanu. O lucrare interesantă a fost făcută de P. Matzeu în studiul conexiunilor Vrănceanu, asociate distribuţiilor canonice ale unei subvarietăţi Cauchy-Riemann într-o varietate Kähler (*An. Univ. Bucureşti., 36(1987), p.52-54*). Reamintim că distribuţia olomorfă a unei subvarietăţi Cauchy-Riemann este în general neintegrabilă, deci defineşte un spaţiu neolonom în sensul lui Vrănceanu.

La Universitatea din Braşov, Cornel Simionescu a studiat conexiunile Vrănceanu pe spaţiul total al unei fibrări, în lucrarea publicată în *Bul. Univ., 28 (1986), p.101-105*, iar G. Munteanu le-a studiat pe varietăţi înzestrate cu structuri geometrice nilpotente (*idem, t.29 (1987), p.55-58*).

G. Pripoae a publicat mai multe lucrări asupra conexiunilor Vrănceanu, din care menţionăm o lucrare publicată în *Revue Roumaine Math. Pures. Appl., 33 (1988), p.447-455* şi lucrarea apărută în revista italiană *Riv. Mat. Univ. Parma, 12 (1986), pp. 195-201.* N. Soare a studiat conexiunea Vrănceanu într-o lucrare publicată în *Istambul Univ. Ken Fak. Mat. Dev., 55/56 (2000), p.61-65.*

O extindere a conceptului de conexiune Vrănceanu la geometria spaţiilor fibrate vectoriale a fost considerată de A. Bejancu, K. Duggal şi S. Ianus în *On the Vranceanu connection* apărută într-un volum dedicat Conferinţei Naţionale de Geometrie diferenţială şi Topologie cu aplicaţii în Fizică şi Tehnică (*Inst. Politehnic Bucureşti, Sci. Bull., t.53 (1991), p.39-49*). K. Buchner, G. Bădiţoiu şi S. Ianus (*Bull.Soc.Sci.Math. Roumanie, 41(1998), p.153-169*) au aplicat teoria conexiunii Vrănceanu la submersiile semi-Riemanniene. Într-o lucrare recentă (nepublicată), R. Escobales foloseşte curbura conexiunii Vrănceanu pentru a demonstra o teoremă a lui M. Gromov, care afirmă că, în anumite ipoteze, numerele Pontriagin sunt nule.

Stere Ianus
University of Bucharest, Faculty of Mathematics and Informatics
14 Academiei St., RO-010014, Bucharest, Romania
E-mail: ianus@gta.math.unibuc.ro