

Henri Poincaré, ou les mathématiques sans oeillères*

JEAN MAWHIN

1. Introduction

Alors que les ouvrages sur Albert Einstein se comptent par dizaines, il n'existe pas encore, plus de quatre-vingt-cinq ans après sa mort, de biographie de Henri Poincaré. La stature scientifique des deux hommes est pourtant comparable, et leur réputation a largement dépassé, de leur vivant, les cercles scientifiques.

On peut en chercher une première raison dans la disparition prématurée de Poincaré, le 17 juillet 1912, victime d'une embolie consécutive à une opération chirurgicale, et de la période troublée qui a suivi. Né le 29 avril 1854 à Nancy, dans un hôtel particulier transformé en pharmacie qui fait encore le coin de la Grande-Rue et de la rue de Guise, Poincaré meurt à 58 ans, au sommet de ses capacités intellectuelles.

La vraie raison de l'absence de biographie tient peut-être dans le fait que la carrière de Poincaré s'est déroulée entièrement à Paris, sans heurts ni faits marquants, si ce n'est une création scientifique ininterrompue, dans cette belle époque 1880-1910 où les tensions européennes s'étaient relâchées. La vie professionnelle d'Einstein, par contre, a été marquée, voire déterminée, par les profonds bouleversements que le monde a connu entre 1910 et 1955. S'il est injuste de décrire Poincaré comme un savant enfermé dans sa tour d'ivoire – nous en verrons des contre-exemples – l'engagement d'Einstein dans les mouvements pacifistes et politiques a fait beaucoup plus de bruit. Au niveau familial même, on sait aujourd'hui qu'il y a bien plus à raconter sur Einstein que sur Poincaré, capable au mieux d'inspirer les auteurs de livres édifiants à couverture rouge qui ont longtemps alimenté les distributions de prix. Enfin, le binocle, la jaquette et le pantalon rayé de Poincaré en font un savant d'un autre âge, face aux longs cheveux, au chandail informe et aux sandales du physicien allemand.

Le futur biographe de Poincaré doit donc consacrer l'essentiel de son volume à l'oeuvre du savant, et se voit aussitôt écrasé par l'ampleur, la di-

*Publié initialement dans la Revue des Questions Scientifiques, 169 (1998), 337-365. Reproduit avec l'aimable autorisation de l'éditeur responsable.

versité et la difficulté de la tâche. Peu de mathématiciens ou d'historiens des mathématiques en sont capables et il faut regretter que Jacques Hadamard, le meilleur connaisseur de l'oeuvre de Poincaré¹, ait eu si peu de goût pour l'aspect biographique. Il aurait été l'auteur idéal de cet ouvrage définitif sur Poincaré que l'on attend toujours.

2. Famille, enfance, études

La famille de Poincaré est de celles qui comptent en Lorraine. Son grand-père paternel Jacques-Nicolas s'est établi pharmacien à Nancy, son père, Léon, y est médecin, professeur à la Faculté de médecine et auteur d'ouvrages remarquables de neurologie, son oncle Antoni (le père de Raymond, futur président de la République et de Lucien, futur Recteur de l'Académie de Paris), est polytechnicien et inspecteur général des ponts et chaussées. La mère de Henri, Eugénie Launois, est issue d'une famille de propriétaires terriens d'Arrancy. Henri Poincaré a une soeur, Aline, de deux ans plus jeune que lui, qui épousera le philosophe Emile Boutroux. Leur fils Pierre sera un mathématicien de talent².

L'enfance de Henri se déroule harmonieusement entre les leçons d'un précepteur, Alphonse Hinzelin, et les vacances à Arrancy. Les jeux qu'il invente avec Aline et ses cousins développent son imagination débordante et l'enseignement d'Hinzelin nourrit son extraordinaire mémoire. Au lycée de Nancy, devenu Lycée Henri-Poincaré en 1913, le jeune Henri est tout de suite un fort un thème, dont la vocation mathématique attend les dernières années pour se manifester. Après un baccalauréat en lettres et un autre en sciences, Poincaré rafle tous les prix en mathématiques élémentaires et remporte le concours général en mathématiques spéciales. Ses lectures personnelles comprennent la *Géométrie* de Rouché, l'*Algèbre* de Bertrand, l'*Analyse* de Duhamel et la *Géométrie supérieure* de Chasles. Reçu cinquième à l'Ecole Normale Supérieure et premier à l'Ecole Polytechnique (malgré un zéro en dessin scientifique, un comble pour quelqu'un baptisé en l'église Sainte

¹L'oeuvre d'Henri Poincaré, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 21 (1913), pp. 617-658.

Le problème des trois corps, in *Henri Poincaré*, Alcan, Paris, 1914, pp. 51-114.

L'oeuvre mathématique de Poincaré, *Acta Mathematica*, 38 (1921), pp. 203-287.

The early scientific work of Poincaré, *Rice Institute Pamphlets*, IX, No. 3 (1922), pp. 111-183.

The later scientific work of Poincaré, *Rice Institute Pamphlets*, XX, No. 1 (1933), pp. 1-86.

Henri Poincaré et les mathématiques, in *Livre du Centenaire*, Gauthier-Villars, Paris, 1955, pp. 450-457.

²P. APPELL, *Henri Poincaré*, Plon, Paris, 1925.

A. BOUTROUX, Souvenirs inédits sur la jeunesse d'Henri Poincaré à Nancy, in *Lycée Henri Poincaré. Le livre des centenaires*, Nancy, 1955, pp. 167-184.

A. BELLIVIER, *Henri Poincaré ou la vocation souveraine*, Gallimard, Paris, 1956.

Epvre!) Henri Poincaré opte pour l'X, dont il sortira deuxième. Il a en particulier Hermite en analyse, Résal en mécanique, Mannheim en géométrie, Faye en astronomie, et Cornu en physique. En juillet 1875, frais émoulu de l'X, Henri accompagne son père au Congrès des Sociétés Savantes qui se tient à Nantes, qui a ainsi l'honneur d'avoir été le siège du premier congrès scientifique auquel Henri Poincaré a participé!

Poincaré opte alors pour l'École des Mines, mais sa passion pour les mathématiques se fait dévorante, et ses cahiers de notes révèlent un intérêt mitigé pour les cours techniques et administratifs, si ce n'est celui de minéralogie, qui porte sur la cristallographie mathématique et physique, et nourrit sans doute ses goûts pour la théorie des groupes. Poincaré souhaite mener de pair une licence en mathématiques à la Sorbonne, mais l'autorisation d'y suivre les cours lui est refusée. Qu'importe, il passe et réussit l'examen de licence en août 1876.

3. Thèse de doctorat

Pendant les 2^e et 3^e années de l'École des Mines, Poincaré publie en 1878, au *Journal de l'École Polytechnique*, un premier travail, où il complète les résultats de Briot et Bouquet sur les solutions holomorphes d'équations différentielles dans le plan complexe de la forme $zy' = f(z, y)$ en discutant l'existence de solutions non holomorphes, et prépare une thèse de doctorat ès sciences. Il la soutient le 1^{er} août 1879 à la Faculté des Sciences de Paris, devant un jury formé de Bonnet, Bouquet et Darboux. Elle porte sur les *Propriétés des fonctions définies par des équations aux différences partielles* et étend à ces équations les résultats de Briot et Bouquet. Voici le rapport de Darboux et Bonnet³:

La thèse de M. Poincaré traite de l'intégration des équations aux dérivées partielles par la méthode des séries. Cauchy avait déjà étudié cette question et il aurait donné une méthode qui tombe en défaut pour certaines valeurs exceptionnelles des variables. L'auteur a eu en vue surtout des cas d'exception. Sur ce sujet il a donné au commencement de la deuxième partie un théorème très intéressant qui, sans donner la solution complète de la question proposée, constitue un premier progrès réellement remarquable. Quelques lemmes de l'introduction nous ont aussi paru dignes d'intérêt. Le reste de la thèse est un peu confus et prouve que l'auteur n'a pu encore parvenir à exprimer ses idées d'une manière claire et simple. Néanmoins la Faculté tenant compte de la grande difficulté du sujet et du talent qu'a montré M. Poincaré lui a conféré avec trois boules blanches le grade de docteur.

³H. GISPERT, *La France mathématique*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, 2e série, No. 34, Bélin, Paris, 1981, p. 331.

Dans son éloge de Poincaré⁴, Darboux est devenu plus enthousiaste:

Dès le premier coup d'oeil, il me parut clair que le travail sortait de l'ordinaire et contenait certainement assez de résultats pour fournir matière à plusieurs thèses. Mais il ne faut pas craindre de le dire, si l'on veut donner une idée précise de la manière dont travaillait Poincaré: bien des points demandaient des corrections ou des explications. Poincaré était un intuitif. [...] Quoiqu'il en soit, sa thèse se recommande par plusieurs notions nouvelles et importantes: celle des fonctions à espaces lacunaires, qui avait beaucoup frappé Hermite, et celle des fonctions algébroides, qui est appelée à jouer en analyse un rôle des plus importants.

4. Carrière

Après remise de ses rapports de stage, Poincaré poursuit ses recherches en attendant sa nomination comme Ingénieur ordinaire des Mines à Vésoul, le 3 avril 1879. Même s'il n'exerce cette profession qu'un an et demi, Poincaré reste dans ce corps jusqu'à la fin de sa vie, détaché en permanence à ses fonctions d'enseignement, mais nommé Ingénieur en chef en 1893 et Inspecteur général en 1910. Le 1er septembre 1879, Poincaré est amené à descendre, au péril de sa vie, au puits de Magny où un coup de grisou a fait seize victimes. A Vésoul, où peut-être il s'ennuie, Poincaré trouve le temps d'écrire un roman, tout à fait dans l'air du temps et resté inédit, sans que l'histoire littéraire en souffre trop⁵.

Sa vie d'enseignant commence à la Faculté des Sciences de Caen, où il est chargé du cours d'analyse dès le 1er décembre 1879. Deux ans plus tard, il abandonne définitivement la province en devenant Maître de Conférences d'Analyse à la Faculté des Sciences de Paris le 29 octobre 1881. Il ne quittera plus cette institution: chargé du cours de mécanique physique et expérimentale en 1885, il succède à Lippmann, en 1886, comme Professeur à la Chaire de Physique mathématique et de Calcul des Probabilités, qu'il abandonne en 1896, lors du décès prématuré de Tisserand, pour occuper la Chaire d'Astronomie mathématique et de mécanique céleste. Il a été aussi Professeur d'Astronomie générale à l'Ecole Polytechnique et d'Electricité théorique à l'école professionnelle supérieure des Postes et Télégraphes, et membre du Bureau des Longitudes⁶.

Comme pédagogue, de l'avis d'anciens élèves, Poincaré n'a pas laissé un souvenir comparable à celui d'Emile Picard, par exemple. Selon Robert

⁴G. DARBOUX, Eloge historique d'Henri Poincaré, membre de l'Académie, in *Oeuvres de Henri Poincaré*, tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1916, pp. vii-lvvi.

⁵A. BELLIVIER, *opus citae*, pp. 191-196.

⁶E. LEBON, *Henri Poincaré. Biographie, bibliographie analytique des écrits*, seconde édition, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

d'Adhémar⁷:

J'ai écouté des leçons de lui, sur la Mécanique céleste. Dès le début, en un instant, le tableau noir était couvert de formules et on avait une impression extraordinaire de puissance; le débit était rapide et sûr. [...] Les leçons de M. Picard ont une élégance, un aspect esthétique et pittoresque tout à fait remarquables; celles de M. Poincaré étaient infiniment plus austères. [...] M. Poincaré [...] se livrait fort peu, [...] à plus forte raison quand il était dans sa chaire.

Maurice d'Ocagne confirme ce témoignage⁸:

Mais on ne peut dire que Poincaré fût un merveilleux professeur. Il dominait son auditoire de trop haut pour se mettre exactement à sa portée et n'avait pas les dons d'orateur que requiert l'excellence en matière de professorat.

Citons toutefois un avis plus nuancé de Léon Brillouin⁹:

Poincaré n'avait jamais peur de recommencer une étude si quelque idée nouvelle se présentait. Au cours de ses leçons de Sorbonne (1911), je l'ai vu plusieurs fois repousser ses notes, annoncer qu'il allait essayer une nouvelle méthode, et continuer, sans broncher, en improvisant devant nous au tableau noir.

Terminons par Louis Bourgoïn¹⁰:

J'ai goûté pendant deux termes l'enseignement qu'il donnait en mécanique céleste à la Sorbonne. Poincaré était alors, en 1910 et 1911, un savant qui faisait courir le "tout Paris mondain" pour l'entendre, [...] sur les marches du petit amphithéâtre Leverrier où il parlait deux fois par semaine. Aux premières leçons la salle était archi-comble, puis au fur et à mesure que le maître développait les "hypothèses cosmogoniques," "la théorie du potentiel newtonien", le vide se faisait heureusement. Dès la troisième leçon on ne trouvait plus dans la salle que les normaliens de la rue d'Ulm, quelques candidats au certificat d'astronomie, des auteurs de théories comme Emile Belot, ancien élève de l'École polytechnique et ingénieur des Tabacs, des fervents d'astronomie et des étudiants avides d'apprendre. [...] Des leçons et des conférences que j'ai entendues, j'ai

⁷R. D'ADHÉMAR, *Henri Poincaré*, Hermann, Paris, 1912, p. 6-7.

⁸M. D'OCAGNE, *Souvenirs et causeries*, Plon, Paris, 1918, p. 165.

⁹L. BRILLOUIN, *Vie, matière et observation*, Albin Michel, Paris, 1959, p. 198.

¹⁰L. BOURGOÏN, *Savants modernes. Leur vie, leur oeuvre*, Editions de l'Arbre, Montréal, 1947, p. 275.

conservé quelques notes et, avec étonnement, le souvenir précis de certains exposés de théories cosmogoniques. Souvent des développements mathématiques m'échappaient, mais Poincaré aboutissait toujours à des formules simples qu'il traduisait en langage imagé que l'on était obligé de comprendre.

Sur l'homme, on possède, suite à une enquête du Dr. Toulouse¹¹ à laquelle Poincaré voulut bien se soumettre, des renseignements particulièrement précis, qui datent de 1897:

M. Poincaré est un homme de taille (1 m. 65) et de corpulence (70 kilos environ avec vêtements) moyennes, voûté, le ventre un peu proéminent. La face est colorée, le nez gros et rouge. Les cheveux sont châtain et la moustache blonde. La pilosité est développée. [...] Les mains gantent du 7 3/4 et le pied chausse à l'aise du 42. [...] Il ne fume pas et n'a jamais essayé, n'ayant pas éprouvé de curiosité pour le tabac. Il ne paraît pas être frileux ni beaucoup plus sensible au froid que les autres. Toutefois, il est sujet aux rhumes et aux coryzas. [...] Il ne dort pas la fenêtre ouverte. [...] Ce qui domine dans sa physionomie, c'est une expression constante de distraction. On lui parle, et l'on a le sentiment qu'il n'a pas suivi ou saisi ce qu'on lui disait, alors même qu'il répond ou réfléchit à la question. [...] M. H. Poincaré croit avoir un caractère calme, doux et égal. Mais il n'a de patience pour aucune action, ni même pour le travail. Il n'est pas passionné ni pour ses sentiments ni pour ses idées, et il n'est pas liant ni confidentiel. Dans la vie pratique, il se montre discipliné. [...] Il ne joue pas aux échecs et croit qu'il ne pourrait pas faire un bon joueur à cet exercice. Il n'est pas chasseur.

5. L'explosion

Le séjour à Caen est sans conteste l'*annus mirabilis* de Poincaré. Entre août 1879 et octobre 1881, le jeune mathématicien, non seulement épouse Louise Poullain d'Andecy le 20 avril 1881 (elle lui donnera quatre enfants), mais soumet plus de vingt notes aux *Comptes Rendus* de l'Académie des Sciences de Paris, portant sur trois sujets complètement différents: l'arithmétique des formes, la théorie qualitative des équations différentielles et les fonctions automorphes. L'étude des formes quadratiques et ternaires est inspirée par les travaux de Charles Hermite, son professeur d'analyse à l'École Polytechnique et à la Sorbonne, qui règne sur les mathématiques françaises de l'époque. Hermite doit sa réputation, entre autres choses, à sa résolution de l'équation algébrique du cinquième degré par les fonctions elliptiques et à sa démonstration de la transcendance du nombre e . Hermite réagit

¹¹DR TOULOUSE, *Henri Poincaré*, Flammarion, Paris, 1910.

immédiatement aux notes et mémoires que Poincaré lui soumet, par des lettres de plus en plus enthousiastes. On n'en compte pas moins de 17 pour la période correspondante¹²:

Le sujet que vous traitez m'intéresse vivement, et ce me sera un plaisir de lire la nouvelle note que vous m'annoncez (22 novembre 1879).

Votre recherche des substitutions qui reproduisent une forme donnée [...] me semble entièrement nouvelle, et j'y attache une grande importance. [...] Vous vous y êtes montré algébriste extrêmement habile (4 juin 1880).

Lorsqu'il prend connaissance des travaux de Poincaré sur les fonctions automorphes, Hermite essaie de le convaincre de ne pas abandonner l'arithmétique:

J'espère que l'analyse ne vous détournera point entièrement de l'arithmétique, et que vous poursuivrez [...] la question si curieuse de la réduction simultanée d'une fonction linéaire et d'une forme quadratique (23 juin 1880).

Poincaré l'écoute, mais utilise des notions de géométrie non euclidienne qui effrayent un peu Hermite (qui n'a jamais aimé la géométrie) :

Les considérations tirées de la géométrie imaginaire de Lobatchevski me sont trop peu familières pour qu'il me soit possible de juger du rôle que vous leur faites jouer dans la [...] recherche des transformations en elles-mêmes d'une forme ternaire (20 juillet 1880).

Hermite est stupéfait du rapprochement, par la géométrie non euclidienne, d'une question d'équations différentielles et d'une question d'arithmétique:

Il m'est vraiment impossible de saisir le point de vue auquel vous vous êtes placé pour rapprocher l'une de l'autre des théories aussi énormément distantes que les transformations des formes ternaires et les équations à deux points singuliers (2 août 1880).

Régulièrement, Hermite suggère à Poincaré la lecture de travaux antérieurs contenant ou éclairant certains de ses résultats. Le conseil qui suit sera, comme on le verra plus loin, de la plus haute importance:

¹²P. DUGAC, éd., La correspondance d'Henri Poincaré avec des mathématiciens, de A à H, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 7 (1986), pp. 59-219.

Permettez-moi de vous engager à prendre surtout connaissance des travaux de Mr Kronecker qui m'a infiniment dépassé dans ce genre de recherches [sur les formes quadratiques] et à qui l'on doit les découvertes les plus remarquables et les plus profondes. [...] Quelques-uns des beaux résultats découverts par Mr Kronecker, et publiés dans les *Monatsberichte*, ont été à ma demande traduits en français [...]. Mais il faut lire dans ce même recueil des *Monatsberichte* de l'Académie des Sciences de Berlin, et sans en rien omettre, tout ce qui est sorti de la plume du grand géomètre (27 novembre 1880).

Hermite donne également des conseils de forme, que Poincaré ne suivra guère:

Permettez-moi [...] de vous engager à écrire vos résultats avec les expressions ordinaires de l'analyse, en évitant autant qu'il est possible de recourir aux expressions symboliques, qui jettent comme un voile sur vos découvertes. Un léger effort suffit souvent pour obtenir une perfection plus grande de la forme, ce qui en analyse a une incontestable importance (11 février 1881).

Ebloui par l'importance des résultats de Poincaré sur les fonctions automorphes et abéliennes, Hermite se résigne à l'encourager à préférer l'analyse à l'arithmétique:

Ainsi Monsieur et quelque soit mon affection pour la théorie des nombres, [...] je vous exprimerai le vœu que vous donniez à l'Analyse une préférence qui, j'en ai l'espoir, profitera à l'Arithmétique (10 mars 1881).

Même s'il continue à manifester sa réticence aux considérations de géométrie non euclidienne:

En vous renouvelant la prière de présenter sans recourir à l'emploi de la géométrie non euclidiennes, après les avoir exposés par la méthode qui vous les a fait découvrir, vos résultats sur la classification des fonctions [homographiques] (2 avril 1881),

Hermite est définitivement conquis par les travaux de Poincaré:

Chaque travail que vous présentez à l'Académie m'amène à vous adresser de nouvelles félicitations (23 mai 1881).

6. Les fonctions automorphes

Que sont ces fonctions automorphes découvertes par Poincaré, par un cheminement extraordinaire, qu'il a lui-même raconté dans un de ses ouvrages de philosophie scientifique¹³? Les fonctions trigonométriques ont une période réelle, ainsi $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout nombre réel x . Les points $2k\pi$ pour k entier découpent la droite réelle en intervalles de longueur 2π ; la connaissance du sinus sur l'un d'entre eux suffit pour le connaître partout. Analytiquement, le sinus s'obtient par inversion de l'arc sinus, qui est la primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Les fonctions elliptiques sont des fonctions d'une variable complexe admettant deux périodes ω et ω' de rapport complexe: $f(z + \omega) = f(z)$ et $f(z + \omega') = f(z)$ pour tout z complexe. Elles s'obtiennent par inversion des primitives de fonction irrationnelles du type $\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$, par exemple. Les points $m\omega + n\omega'$ pour m et n entiers sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes du plan complexe. La connaissance de f sur l'un de ces parallélogrammes suffit pour la connaître partout.

Les fonctions automorphes, quant à elles, reprennent la même valeur sous l'action de certaines substitutions homographiques $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ formant un groupe discontinu (on dit aujourd'hui un sous-groupe discret): $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z)$ pour tout z complexe. Le pavage correspondant aux parallélogrammes des fonctions elliptiques est beaucoup plus compliqué, et Poincaré, dans un éclair de génie, le rapproche du groupe des déplacements pour la géométrie non-euclidienne de Lobatchevski. Les fonctions automorphes reprennent les mêmes valeurs aux points homologues d'une sorte de damier dont les cases sont limitées par des arcs de cercles, qui sont les droites de ce modèle de la géométrie lobatschevskienne. On en trouve de saisissantes illustrations dans certains tableaux d'Escher¹⁴.

Poincaré non seulement détermine l'algèbre et la géométrie sous-jacente à ces groupes de transformations¹⁵, mais il obtient les propriétés analytiques des fonctions automorphes et les utilise pour résoudre les équations différentielles linéaires complexes lorsque les coefficients sont des fonctions algébriques de la variable indépendante (de la même manière que les polynômes et les exponentielles complexes suffisent à intégrer toutes les équations à coefficients constants). Notons que Hermite, encore lui, avait donné le premier exemple de fonction automorphe (la fonction modulaire) et que Félix Klein, à Göttingen, tenta désespérément de rivaliser avec Poincaré dans le développement de la théorie. Cela lui valut une grave dépression nerveuse, qui mit un terme définitif à sa carrière de chercheur, le transformant en

¹³H. POINCARÉ, *Science et Méthode*, Flammarion, Paris, 1908, pp. 50-53.

¹⁴B. ERNST, *Le miroir magique de M.C. Escher*, Taschen, Köln, pp. 102-111.

¹⁵G. BOHNKE, Henri Poincaré et la découverte des groupes fuchsien ou la géométrie en action, *Philosophia Scientiae*, 1 (4) (1996), pp. 97-105.

un organisateur efficace et écouté des mathématiques allemandes. Klein en voulut à Poincaré d'avoir donné à une classe de fonctions automorphes le nom de fonctions fuchsienues, la découverte du savant français ayant été motivée par la lecture d'un mémoire de Fuchs, que Klein n'aimait guère. Plutôt que d'en démordre, Poincaré appela fonctions kleinéennes la classe suivante qu'il découvrit, ce qui n'apaisa pas le mathématicien de Göttingen. C'est quand même sa terminologie "automorphe" qui prévaut aujourd'hui.

En étroite relation avec le travail de Poincaré, il convient aussi de citer la question posée en 1878 par Hermite pour le *Grand Prix des Sciences Mathématiques* de l'Académie des Sciences de 1880: "Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante". Poincaré commence par soumettre un mémoire sur le cas d'une variable réelle, qu'il retire, après sa lecture des travaux de Fuchs, pour le remplacer par un mémoire traitant le cas d'une variable complexe. Découvrant alors progressivement ses fonctions automorphes, Poincaré soumet successivement à l'Académie trois suppléments, qui ne seront exhumés des archives de la vénérable institution qu'en 1982. Cette stratégie désordonnée n'est pas, on le devine, du goût de la vieille dame du Quai Conti et, bien que le jury, présidé par Hermite, soupçonne l'importance du travail de Poincaré, il décerne le Grand Prix à Georges Halphen, pour un travail moins révolutionnaire sans doute, mais plus soigné, n'accordant qu'un accessit à Poincaré¹⁶.

7. La théorie qualitative des équations différentielles

En même temps qu'il crée les fonctions automorphes, fleuron de la théorie des fonctions d'une variable complexe, Poincaré, sans doute inspiré par ses premiers travaux sur le théorème de Briot et Bouquet, mais peut-être aussi par les cours de topographie de l'école des Mines, pose les premiers jalons de l'étude des courbes définies dans le plan (x, y) par les solutions de systèmes différentiels réels de la forme $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$, lorsque P et Q sont des polynômes. Dans le cas particulier (hamiltonien) où $P(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$, $Q(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$, ces courbes sont données par la famille d'intégrales premières $H(x, y) = \text{constante}$, (les courbes de niveau de la topographie) et le problème se ramène à une question de géométrie analytique. Il n'en est rien dans le cas général, et si la topographie inspire encore Poincaré (ne parle-t-il pas de cols pour désigner certains points singuliers), il justifie sa méthode par une analogie avec la théorie des équations algébriques¹⁷:

¹⁶J.J. GRAY et S.A. WALTER, éd. *Henri Poincaré. Trois suppléments sur la découverte des fonctions fuchsienues*, Publications des Archives Henri-Poincaré, Akademie Verlag, Berlin et Blanchard, Paris, 1997.

¹⁷H. POINCARÉ, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I), *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, (3) 7 (1881), p. 376.

Pour étudier une équation algébrique, on commence par rechercher, à l'aide du théorème de Sturm, quel est le nombre des racines réelles, c'est la partie qualitative, puis on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation. [...] C'est naturellement par la partie qualitative qu'on doit aborder la théorie de toute fonction et c'est pourquoi le problème qui se présente en premier lieu est le suivant: *Construire les courbes définies par des équations différentielles.*

Notons encore ici l'influence d'Hermite: le théorème de Sturm est un des sujets de prédilection de sa recherche et de son enseignement¹⁸. Autre ingrédient de ce théorème, l'indice de Cauchy, utilisé par Poincaré dans l'étude des cycles (trajectoires fermées), inaugure son emploi de l'*Analysis situs* (la topologie algébrique aujourd'hui) dans diverses questions d'analyse et de mécanique. L'outil récurrent est l'indice introduit par Kronecker en 1869 dans les *Monatsberiche* de Berlin pour généraliser celui de Cauchy aux dimensions quelconques¹⁹. C'est le moment de rappeler le conseil donné par Hermite: il faut lire tout Kronecker. D'ailleurs, le 14 février 1883, Kronecker entre lui-même en contact avec Poincaré²⁰:

Ayant lu votre dernière communication dans les Comptes Rendus je désirerais appeler votre attention à un mémoire que j'ai publié en 1869 et que je prends la liberté de vous envoyer. [...] J'y ai développé la généralisation de cet important théorème de Cauchy, qui me semble contenir le vrai fondement de la théorie des fonctions. Il est très remarquable qu'il existe un théorème tout à fait analogue pour un nombre quelconque de variables.

Poincaré en fait aussitôt un usage abondant, entre 1883 et 1885 :

- dans l'étude des zéros des fonctions Θ ;
- dans son premier travail sur les solutions périodiques du problème des trois corps, où il énonce et démontre un théorème dont l'équivalence avec le théorème du point fixe de Brouwer (1912) ne sera réalisée qu'en 1942!
- dans l'étude des courbes définies par n équations différentielles lorsque $n \geq 3$;
- dans l'étude des formes d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (sujet de sa deuxième thèse!), où il crée de toutes pièces la théorie de la bifurcation.

¹⁸ *Cours de M. Hermite professé pendant le 2e semestre 1881-82*, rédigé par M. Andoyer, Hermann, Paris, 1883.

¹⁹ L. KRONECKER, Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 68 (1869), pp. 159-193, 688-698. *Werke* I, pp. 175-212, 215-226.

²⁰ P. DUGAC, éd., La correspondance d'Henri Poincaré avec des mathématiciens, de J à Z, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 10 (1989), p. 146.

Il aurait pu aussi en déduire le théorème d'invariance du domaine dont Klein et lui-même avaient besoin pour justifier la "méthode de continuité" utilisée dans la théorie des fonctions automorphes. C'est Brouwer qui le prouvera en 1912.

Une autre motivation de son étude qualitative des équations différentielles est une possible application à la mécanique céleste, comme le prouve l'introduction de son premier mémoire²¹:

Prenons pour exemple le problème des trois corps: ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment; si la distance de deux des corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps? Et si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de Géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites.

On voit que les travaux de cette période extraordinaire portent en germe bon nombre de ceux assureront sa gloire.

8. Les trois étoiles d'Hermitte

On a vu l'intérêt porté par Hermite aux premiers travaux de Poincaré. Deux autres étoiles montantes, issues de l'École Normale Supérieure, sont aussi suivies de près par Hermite, pour des raisons, disons, mathématico-familiales: l'une est Emile Picard, deux ans plus jeune que Poincaré, célèbre dès 1879 par son théorème sur les fonctions entières et gendre d'Hermitte; l'autre est Paul Appell, alsacien et condisciple de Poincaré en classes préparatoires, qui a épousé une nièce de Joseph Bertrand, beau-frère d'Hermitte et mathématicien des plus influents. C'est dans ce Dallas impitoyable que vont se décider les carrières universitaires et académiques de nos trois mousquetaires. Hermite, qui doit résister aux pressions de son épouse, qui soutient Picard, et de son terrible beau-frère, qui défend Appell, ouvre son cœur à Mittag-Leffler²², dont nous reparlerons:

Tout bas et en confidence, ayant grande crainte d'être entendu de Mme Hermite, je vous dirai que de nos trois étoiles mathématiques, Poincaré

²¹H. POINCARÉ, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, *opus citae*, pp. 376-377.

²²P. DUGAC, éd., Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883), *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 5 (1984), p. 150.

me semble la plus brillante. Et puis c'est un charmant jeune homme, qui est Lorrain comme moi, et qui connaît parfaitement ma famille.

Navigant habilement sur la mer des chaires vacantes à la Sorbonne, et veillant, par le jeu des suppléances, à n'en faire attribuer aucune de manière définitive avant que ses protégés aient atteints l'âge requis (trente ans), Hermite parvient à faire nommer, comme professeur titulaire, Appell à la chaire de Mécanique rationnelle en 1885, et, l'année suivante, Picard à celle de calcul différentiel et intégral, et Poincaré à celle de physique mathématique et calcul des probabilités²³.

Il lui faut autant d'habileté dans l'intrigue pour faire élire ses poulains à l'Institut. Poincaré entre le premier sous la coupole, en 1887, suivi de Picard en 1889 et d'Appell en 1892.

9. Le Prix du Roi Oscar II

En 1885, à l'instigation du mathématicien suédois Gösta Mittag-Leffler, ancien élève de Weierstrass, époux de la fille du roi du tabac en Finlande et grand ami d'Hermite,

Sa Majesté Oscar II, désireux de donner une nouvelle preuve de l'intérêt qu'elle porte à l'avancement des sciences mathématiques [...] a résolu de décerner le 21 janvier 1889, soixantième anniversaire de Sa naissance, un prix à une découverte importante dans le domaine de l'analyse mathématique supérieure. Ce prix consistera en une médaille [...] portant l'effigie de Sa Majesté et ayant une valeur or de mille francs, ainsi qu'en une somme de deux mille cinq cents Kronor en or. Sa Majesté a daigné confier le soin de réaliser Ses intentions à une commission de trois membres : M. Carl Weierstrass à Berlin, M. Charles Hermite à Paris, [...] M. Gösta Mittag-Leffler à Stockholm²⁴.

La Commission propose au Roi d'accorder le prix pour un mémoire soumis anonymement avant le 1er juin 1888 et portant sur l'un des sujets suivants:

1. Le problème des n corps en mécanique céleste.
2. La généralisation des fonctions ultraelliptiques introduite par Fuchs.
3. Les fonctions définies par une équation différentielle du premier ordre.
4. Les relations algébriques liant deux fonctions fuchsiennes ayant un groupe commun.

Les mémoires doivent être envoyés avant le 1er juin 1888.

²³M. ATTEN, La nomination de H. Poincaré à la chaire de physique mathématique et calcul des probabilités de la Sorbonne, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 9 (1988), pp. 221-230.

²⁴*Acta Mathematica*, 7 (1885), pp. i-vi.

On voit que le concours est taillé sur mesure pour Poincaré, le seul problème étant de rallier à cette cause le vieillissant et têtue Weierstrass. La composition du Jury et le choix des questions ne manquent pas d'indisposer Kronecker, inlassable adversaire de Weierstrass à Berlin.

Poincaré, ennemi la facilité, s'attaque au premier sujet, qu'il a, jusqu'alors, peu travaillé. Le mémoire qu'il envoie, le 17 mai 1888, s'intitule *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, et comporte 158 pages. Bien qu'il ne réponde pas exactement à la question posée, le jury, à l'unanimité, estime que²⁵:

C'est l'oeuvre profonde et originale d'un génie mathématique dont la place est marquée parmi les grands géomètres du siècle. Les plus importantes et les plus difficiles questions, comme la stabilité du système du monde [...] sont traitées par des méthodes qui ouvrent [...] une époque nouvelle dans la mécanique céleste.

Le rapport est signé du 20 janvier 1889, approuvé par le Roi le lendemain, et Poincaré en est informé par une lettre d'Hermitte du 26 janvier 1889. Mittag-Leffler avertit officiellement l'Académie des Sciences de Paris et lui annonce la publication du mémoire couronné dans le journal qu'il édite, les *Acta Mathematica*. La presse française rend largement compte de l'événement et le gouvernement élève Poincaré et Appell, qui a reçu une mention spéciale au même concours, au rang de Chevalier de la Légion d'Honneur.

Le mémoire est mis à l'impression entre le 3 juillet et le 13 novembre 1889. Phragmén, un jeune collaborateur de Mittag-Leffler, surveille l'édition du travail, et trouve certains passages obscurs. Mittag-Leffler en avertit Poincaré en juillet 1889. Les premiers éclaircissements sont suivis d'un long silence rompu, le 1er décembre 1889, par une lettre émouvante de Poincaré à Mittag-Leffler²⁶:

J'ai écrit ce matin à M. Phragmén pour lui faire part d'une erreur que j'ai faite et sans doute il vous a montré ma lettre. Mais les conséquences de cette erreur sont plus sérieuses que je ne pensais d'abord. Il n'est pas vrai que les surfaces asymptotiques soient fermées, au moins dans le sens que j'entendais à l'origine. Ce qui est vrai est que si les deux branches de cette surface sont considérées (et je pense encore qu'elles sont connectées l'une à l'autre) elles se rencontrent suivant un nombre infini de trajectoires asymptotiques [...]. J'avais pensé que toutes ces courbes asymptotiques, s'étant éloignées d'une courbe fermée représentant une solution périodique, approcheraient

²⁵H. POINCARÉ, *Oeuvres*, XI, Gauthier-Villars, Paris, 1955, pp. 286-289.

²⁶P. DUGAC, éd., *La correspondance d'Henri Poincaré avec des mathématiciens*, de J à Z, *opus citae*, pp. 185-186.

alors asymptotiquement la même courbe fermée. Ce qui est vrai est qu'il y en a une infinité qui ont cette propriété. Je ne vous cacherai pas la détresse que cela m'a causé. En premier lieu, je ne sais pas si vous pensez encore que les résultats qui restent, à savoir l'existence de solutions périodiques, les solutions asymptotiques, la théorie des exposants caractéristiques, la non-existence d'intégrales uniformes, et la divergence de séries de Lindstedt, méritent la grande récompense que vous leur avez attribué. D'autre part, de nombreux changements sont devenus nécessaires et je ne sais pas si vous pouvez commencer à imprimer le mémoire. J'ai télégraphié à Phragmén. Dans tous les cas, je ne peux rien faire de plus que confesser ma confusion à un ami aussi loyal que vous. Je vous écrirai plus longuement dès que je verrai les choses plus clairement.

Malheureusement, la distribution du volume des *Acta* a commencé, et Mittag-Leffler doit remuer ciel et terre pour les récupérer. Il craint que Kronecker en prenne connaissance et ridiculise le jury. Ce n'est que récemment qu'on a retrouvé à l'Institut Mittag-Leffler des exemplaires survivants de la première version, l'un portant les corrections de Poincaré et l'autre avec la mention: "Toute l'édition fut détruite. M.L."²⁷.

De Paris, Hermite, aussi ennuyé que Mittag-Leffler, cherche à le rassurer en lui promettant une version remaniée, que Poincaré envoie finalement le 5 juin 1890. Elle paraît en décembre 1890 dans le volume 13 des *Acta*, où elle occupe maintenant 270 pages! Poincaré doit payer lui-même la réimpression du fascicule, un peu plus de 3500 couronnes, 1000 couronnes de plus que le prix du roi Oscar! La malédiction n'est pas éteinte, puisque la médaille en or elle-même sera volée au domicile du petit-fils de Poincaré, où elle était conservée.

Dans la deuxième version du mémoire, Phragmén est chaleureusement remercié, mais sans trop de commentaires sur l'étrange comportement des solutions ainsi découvertes; l'introduction ne les mentionne même pas. C'est probablement dû au fait que Poincaré ne peut le faire sans expliciter son erreur, ce que Mittag-Leffler l'a instamment prié d'éviter. Le secret sur la véritable nature de l'erreur de Poincaré semble avoir été bien gardé jusqu'à la découverte des exemplaires de la première version du mémoire. Pourtant, on sait peu que l'histoire est succinctement racontée en 1959 par Léon Brillouin, dans le chapitre consacré à Poincaré de l'ouvrage déjà cité²⁸, et aurait pu mettre plus tôt les historiens sur la piste:

²⁷J. BARROW-GREEN, Oscar II's prize competition and the error in Poincaré's memoir on the three body problem, *Archive for History of Exact Sciences*, 48 (1994), pp. 107-131, and *Poincaré and the Three Body Problem*, American Mathematical Society, Providence RI, 1997.

²⁸L. BRILLOUIN, *opus citae*, pp.197-198.

Un ancien collègue me raconta, il y a beau temps, une anecdote dont je n'ai pu vérifier que récemment la véracité. Poincaré écrivit, en 1888, un très beau mémoire sur le problème des trois corps en Astronomie. Il prouvait, paraît-il, la stabilité du système. Ce mémoire présenté à l'Académie suédoise obtint le prix du roi Oscar II en janvier 1889 et devait être imprimé dans les *Acta Mathematica*. A cet instant critique, Poincaré apprend ou découvre une difficulté essentielle: ses raisonnements sont basés sur un type classique d'approximations, mais celles-ci conduisent à des séries qui ne convergent pas. Les séries sont seulement semi-convergentes, ce qui suffit largement pour tous les calculs pratiques, mais rend impossible une démonstration générale de la stabilité. Poincaré, sans perdre une minute, repasse au crible tous ses raisonnements, sépare ceux qui sont généraux de ceux qu'entache l'erreur de convergence – et exténué, surmené, envoie à Stockholm un mémoire nouveau. Puis, à bout de forces, il doit prendre plusieurs mois de repos complet. J'avais tenté, plusieurs fois, mais sans succès, de vérifier si cette anecdote était vérité ou légende. J'ai reçu récemment (mars 1959) une très intéressante lettre de M. H. Cramer, chancelier de l'Université de Stockholm, qui confirme et complète l'histoire. Le premier mémoire de Poincaré était à l'impression aux *Acta Mathematica*, au printemps 1889, lorsque le secrétaire de la rédaction, le jeune mathématicien Ed. Phragmén, découvrit une grave difficulté et alerta Poincaré. Le mémoire, déjà imprimé, fut finalement retiré en décembre 1889 et le second mémoire, complètement révisé, parut en octobre 1890. Ed. Phragmén devint plus tard membre de l'Académie des Sciences de Stockholm et sa biographie fut présentée en mars 1958 par H. Cramer, président de l'Académie, qui relata, entre autres, l'anecdote sur Poincaré.

Dix ans après la parution du mémoire couronné, dans le tome III des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* qui le développent, le prolongent et paraissent entre 1892 et 1899²⁹, Poincaré ajoute les remarques aujourd'hui célèbres:

Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se

²⁹Tome I: *Solutions périodiques. Non existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques*, 1892.

Tome II: *Méthodes de Newcomb, Gylden, Lindstedt et Bohlin*, 1894.

Tome III: *Invariants intégraux. Solutions périodiques du deuxième degré. Solutions doublement asymptotiques*, 1899, Gauthier-Villars, Paris.

replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme.

L'erreur corrigée de Poincaré n'est rien d'autre que l'acte de naissance, bien chaotique, de ce que l'on appelle aujourd'hui la théorie du chaos³⁰! La philosophie de cette théorie est d'ailleurs expliquée de façon remarquable par Poincaré dans un article sur *Le hasard* de 1907³¹ reproduit dans l'ouvrage *Science et Méthode* déjà cité.

10. La physique mathématique

Les tribulations du mémoire du Prix du roi Oscar n'empêchent pas Poincaré de prendre très au sérieux son enseignement de physique mathématique à la Sorbonne. Tous les semestres, il change la matière de ses cours et ses meilleurs étudiants, qui vont se faire un nom en mathématique ou en physique, en publient le contenu. Il en résulte une bonne douzaine de volumes couvrant toutes les parties de la physique, où Poincaré laisse libre cours à son inventivité et à sa virtuosité mathématique. Il suit en particulier de très près les expériences de Hertz sur la propagation des ondes électromagnétiques et les débuts de la télégraphie sans fil.

Ses ouvrages sur la théorie de Maxwell portent en germe la relativité restreinte et le conduisent à s'intéresser aux transformations de Lorentz. En 1905, il publie une note (suivie d'un gros mémoire) sur la dynamique de l'électron, qui contient toute la mathématique de la relativité restreinte, dans une présentation différente de celle d'Einstein. Les historiens des sciences se disputent toujours sur la portée de ce travail et la question de priorité qui s'y rattache³². Ironiquement, la différence principale se situe peut-être dans le fait que le mathématicien Poincaré arrive à la cinématique relativiste en développant la théorie électromagnétique de Maxwell, alors que le physicien Einstein construit cette cinématique par une approche axiomatique! N'empêche qu'on trouve dans ce mémoire, et tout à fait explicitement, ce que des générations de physiciens ont appelé l'espace-temps de Minkowski!

Poincaré développe aussi les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique dans une série de longs mémoires échelonnés entre 1890

³⁰K.G. ANDERSSON, Poincarés discovery of homoclinic points, *Archive for History of Exact Sciences*, 48 (1994), pp. 133-147.

³¹*Revue de métaphysique et de morale*, 3, pp. 257-276.

³²Voir les articles de A. MILLER, M. PATY, H. BARREAU dans *Henri Poincaré. Science et philosophie*, Publications des Archives Henri Poincaré, Akademie-Verlag, Berlin et Blanchard, Paris, 1996, pp. 69-100, 101-144, 287-298.

et 1895. Il prouve en particulier, pour la première fois, l'existence d'une infinité de valeurs propres pour le problème de Dirichlet, un jalon essentiel pour la construction de la théorie des équations intégrales de Fredholm.

On sait peu que, pour la période 1901-1912, Poincaré est, avec quarante-neuf présentations, le savant plus souvent nommé pour le prix Nobel de physique³³. La priorité accordée aux expérimentateurs, les ennemis de Mittag-Leffler à l'Académie des Sciences de Suède et la mort prématurée du savant français empêchent finalement l'attribution. Poincaré joue cependant un rôle dans le prix Nobel de 1903, puisque ses suggestions sont directement à l'origine de la découverte de la radioactivité par Henri Becquerel.

11. La mécanique céleste et la topologie

En 1896, suite à la mort inopinée de Tisserand, et sur demande expresse du Doyen Darboux, Poincaré abandonne la chaire de physique mathématique pour reprendre celle d'astronomie théorique et de mécanique céleste. Ses cours sont à nouveau rédigés par ses étudiants: les *Figures d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*³⁴ en 1902, les *Leçons de mécanique céleste*³⁵ en trois volumes entre 1905 et 1910, et son dernier ouvrage, les *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*³⁶, en 1911. Il en profite pour apporter de nouvelles contributions à la théorie des fonctions perturbatrices et surtout à la théorie des marées, dans laquelle, le tout premier, il introduit les équations intégrales de Fredholm.

Le tournant du siècle voit aussi la parution d'une série de six longs mémoires de Poincaré sur l'*Analysis situs*, c'est-à-dire la topologie algébrique, qui a pour but l'étude des propriétés géométriques de figures dans un espace de dimension quelconque à l'aide des propriétés algébriques de groupes ou de modules associés. Poincaré ne cache pas ses motivations, la théorie qualitative des équations différentielles et le problème des trois corps, mais développe la théorie de manière indépendante. Il crée de toutes pièces, entre 1892 et 1901, les outils essentiels qui assurent l'autonomie et l'efficacité de cette discipline: le groupe fondamental d'homotopie, l'homologie simpliciale, et en déduit la formule d'Euler-Poincaré et le théorème de dualité. Il esquisse même la cohomologie de De Rham, dans des pages qui attendront Elie Cartan pour être bien comprises. Il énonce une conjecture célèbre, non encore démontrée, à savoir que toute variété compacte simplement connexe de dimension 3 est homéomorphe à la sphère de dimension 3. Il pose également

³³E. CRAWFORD, *La fondation des Prix Nobel Scientifiques, 1901-1915*, Belin, Paris, 1988.

³⁴Rédigées par L. Dreyfus, Naud, Paris.

³⁵Tome I: *Théorie générale des perturbations planétaires*, 1905.

Tome II: *Développement de la fonction perturbatrice. Théorie de la lune*, 1909.

Tome III: *Théorie des marées*, 1910, rédigés par E. Fichot. Gauthier-Villars, Paris.

³⁶Rédigées par H. Vergne, Hermann, Paris, 1911.

les jalons de la théorie moderne de la dimension.

Enfin, toujours motivé par le problème des trois corps, Poincaré se résigne en 1912, dans un article émouvant, à publier un travail qu'il sait incomplet sur l'existence de deux points fixes pour toute application continue d'un anneau plan en lui-même qui conserve les aires et fait tourner les frontières intérieure et extérieure en sens inverses. Birkhoff le démontre un an après la mort de Poincaré. Les travaux de l'une des dernières médailles Fields françaises descendent en droite ligne de ces considérations.

12. La philosophie scientifique

A côté de ses travaux purement scientifiques, Poincaré publie très tôt des articles de haute vulgarisation ou de philosophie dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées* ou la *Revue de métaphysique et de morale*. Il rédige d'intéressantes préfaces pour ses ouvrages de physique mathématique et fait des conférences d'intérêt général à différents congrès³⁷. Il se penche aussi sur les fondements des mathématiques, en particulier sur le rôle de la logique, la naissance de la théorie des ensembles et les principes de la géométrie. En 1902, il se laisse convaincre par l'éditeur Flammarion de rassembler et d'éditer ces travaux dans sa célèbre *Bibliothèque de Philosophie Scientifique*. Le premier volume, *La Science et l'Hypothèse*, paraît en 1902, suivi de *La Valeur de la Science* en 1905, et de *Science et Méthode* en 1908. Un volume posthume *Dernières Pensées*, paraît en 1913. Ces ouvrages connaissent de nombreuses réimpressions et sont traduits dans une dizaine de langues. Ecrits dans un langage vive, ils diffèrent du style philosophique traditionnel par une ironie parfois mordante et un goût suivi du paradoxe. Beaucoup de philosophes ont eu de la peine à les comprendre, surpris par une pensée changeante, critique d'elle-même³⁸ et non réductionniste, qui se refuse à enfermer le monde dans une seule idée. C'est la critique du scientisme par un vrai savant, qui défend l'idée de modèle "commode", et ne peut être vraiment compris que par les lecteurs de ses contributions scientifiques. L'embarras des philosophes se traduit clairement par le nombre élevé de termes utilisés pour qualifier la pensée de Poincaré: conventionalisme, empirico-conventionalisme, quasi-empirisme, réalisme synthétique, réalisme structurel, pragmatisme, empirisme, relationalisme, post-kantisme, voire nominalisme.

Les petits livres à couverture orange assurent à Poincaré une célébrité médiatique, dont il se serait volontiers passé, lorsque, à la chaude époque des

³⁷L. ROLLET, Henri Poincaré – vulgarisation scientifique et philosophie des sciences, *Philosophia Scientiae*, 1 (1) (1996), 125-153.

³⁸"Poincaré était d'ailleurs coutumier de ces disputes contre soi-même. Il trouvait rarement un adversaire capable de lui répondre; mais lui-même n'hésitait jamais à reprendre des problèmes déjà traités, et sans aucune trace d'obstination ou de parti pris, il rouvrait un débat qui semblait clos", L. BRILLOUIN, *opus citae*, p. 197.

lois Combes sur la laïcisation de l'enseignement, ses propos sur la relativité du mouvement sont interprétés par les milieux conservateurs comme une justification de la condamnation de Galilée par l'Eglise Catholique³⁹!

Mais la célébrité a du bon puisqu'elle vaut à Poincaré d'être élu à l'Académie française, en 1908, au fauteuil de Sully-Prudhomme. Le mathématicien doit faire l'éloge du poète lors de sa réception sous la coupole, le 28 janvier 1909. Un contemporain raconte la scène⁴⁰:

Il avait, comme un auteur mondain, comme un dramaturge, fait salle comble. Et l'on put se demander si les mathématiques n'allaient pas être à la mode cet hiver-là, si un snobisme nouveau n'était pas sur le point de fleurir, le snobisme de l'algèbre [...]. Le plus grand des mathématiciens d'aujourd'hui ne lut pas mal son discours; et l'on entendait bien sa voix, tant il faisait un effort zélé pour ne pas oublier la circonstance et pour mettre le ton. De temps en temps, on eut le sentiment qu'il pensait à autre chose et que son esprit s'évadait vers des algèbres préférées ou des mécaniques célestes. Alors, sa voix traînait sur les phrases et le discours était une mélodie un peu longue. Mais, soudain, M. Poincaré se rappelait son aventure présente: et alors, il prenait le ton le plus dégagé, le plus familier. Ce fut touchant et amusant. Quand une page était finie, je crois qu'il en avait beaucoup de joie. Il la jetait derrière lui, avec empressement. Plus tard, ayant achevé son discours, il s'assit sur tous ces feuillets, avec une vive satisfaction.

Le discours de Poincaré sur Sully-Prudhomme est reproduit, avec d'autres notices biographiques, dans un attachant petit volume *Savants et écrivains*⁴¹, dont l'introduction reste la meilleure description de l'idée que Poincaré se fait du métier du savant.

Auparavant, Poincaré s'était manifesté publiquement à propos de l'affaire Dreyfus. En 1899, au procès de Rennes, il intervient très vivement contre l'emploi du calcul des probabilités par Bertillon dans l'analyse graphologique du fameux bordereau⁴²:

Rien de tout cela n'a de caractère scientifique. [...] Je ne sais si l'accusé sera condamné, mais s'il l'est, ce sera sur d'autres preuves. Il est impossible qu'une telle argumentation fasse quelque impression sur des hommes sans parti pris et qui ont reçu une éducation scientifique solide.

³⁹J. MAWHIN, *La terre tourne-t-elle?* (à propos d'une polémique née d'un livre d'Henri Poincaré), *Ciel et Terre*, 111 (1995), pp. 3-10, et *La Terre tourne-t-elle? A propos de la philosophie scientifique de Poincaré*, in *Le réalisme*, Réminiscences 2, Louvain-la-Neuve et Blanchard, Paris, 1996, pp. 215-252.

⁴⁰A. BEAUNIER, *Visages d'hier et d'aujourd'hui*, Plon, Paris, 1911, pp. 152-153.

⁴¹Flammarion, Paris, 1910.

⁴²Sur l'application du calcul des probabilités (lettre à M. P. Painlevé), in *Le Procès Dreyfus devant le Conseil de Guerre de Rennes, 7 août-9 septembre 1899*, tome 3, Stock, Paris, 1900, pp. 329-331.

Cela n'empêche pas le Conseil de Guerre de déclarer à nouveau Dreyfus coupable, avec circonstances atténuantes.

En 1904, chargé par la Chambre criminelle de la Cour de cassation d'un rapport sur le même sujet, Poincaré conclut, avec Appell et Darboux⁴³:

En résumé, tous ces systèmes sont absolument dépourvus de toute valeur scientifique :

1. Parce que l'application du calcul des probabilités à ces matières n'est pas légitime;
2. Parce que la reconstitution du bordereau est fausse;
3. Parce que les règles du calcul des probabilités n'ont pas été correctement appliquées.

En un mot, parce que les auteurs ont raisonné mal sur des documents faux.

Cette fois le jugement de Rennes est cassé et Dreyfus retrouve son honneur. Le rôle de Poincaré dans l'affaire Dreyfus a été minutieusement analysé par L. Rollet dans un récent article bien documenté⁴⁴

L'un des derniers congrès scientifiques auxquels Poincaré participe est le premier Conseil Solvay, qui se tient à Bruxelles, du 30 octobre au 3 novembre 1911, à l'Hôtel Métropole. C'est sans doute le seul palace où l'on peut contempler une photographie d'époque réunissant Lorentz, Poincaré, Planck, Marie Curie, Einstein, Perrin, Langevin, Rutherford et d'autres. Poincaré y apprend les derniers développements de la théorie quantique, sur laquelle il publie, le 24 février 1912, l'un de ses derniers articles. Pendant le conseil il met le doigt sur le véritable défi de la physique de l'époque, qui est de construire une théorie quantique véritablement cohérente⁴⁵:

Ce qui m'a frappé dans les discussions que nous venons d'entendre, c'est de voir une même théorie s'appuyer tantôt sur les principes de l'ancienne mécanique et tantôt sur les nouvelles hypothèses qui en sont la négation; on ne doit pas oublier qu'il n'est pas de proposition qu'on ne puisse aisément démontrer, pour peu que l'on fasse entrer dans la démonstration deux prémisses contradictoires.

Deux ans auparavant, Poincaré avait été fait docteur *honoris causa* de l'Université Libre de Bruxelles, pour le soixante-quinzième anniversaire de

⁴³Sur l'application du calcul des probabilités, in *Affaire Dreyfus. La révision du procès de Rennes. Enquête de la Chambre criminelle de la Cour de Cassation, 5 mars-19 novembre 1904*, tome 3, Ligue des Droits de l'Homme, Paris, 1909, pp. 500-600.

⁴⁴L. ROLLET, Autour de l'affaire Dreyfus. Henri Poincaré et l'action politique, *Revue historique*, 298 (1) (1998), 101.

⁴⁵P. MARAGE et G. WALLENBORN éd., *Les Conseils Solvay et les débuts de la physique moderne*, U.L.B., Bruxelles, 1995, p. 130.

sa fondation. A cette occasion, l'illustre mathématicien rappelle vigoureusement l'importance d'une science libre dans une conférence où toutes les entraves possibles à cette liberté sont finement analysées⁴⁶:

La liberté est pour la Science ce que l'air est pour l'animal; privée de liberté, elle meurt d'asphyxie comme un oiseau privé d'oxygène. Et cette liberté doit être sans limite, parce que, si on voulait lui en imposer, on n'aurait qu'une demi-science, et qu'une demi-science, ce n'est plus la science, puisque cela peut être, cela est forcément une science fausse. La pensée ne doit jamais se soumettre, ni à un dogme, ni à un parti, ni à une passion, ni à un intérêt, ni à une idée préconçue, ni à quoi que ce soit, si ce n'est aux faits eux-mêmes, parce que, pour elle, se soumettre, ce serait cesser d'être.

Deux ans plus tard, Poincaré insiste sur l'investissement à long terme que constitue la recherche fondamentale⁴⁷:

Le savant ne doit pas s'attarder à réaliser des fins pratiques. Il les obtiendra sans doute, mais il faut qu'il les obtienne par surcroît. Il ne doit jamais oublier que l'objet spécial qu'il étudie n'est qu'une partie de ce grand tout qui doit être l'unique ressort de son activité [...]. La science a eu de merveilleuses applications, mais la science qui n'aurait en vue que les applications ne serait plus la science, elle ne serait plus que la cuisine.

Ces paroles restent aujourd'hui d'une brûlante actualité. Victime de la démission grandissante des pouvoirs publics, la science est de plus en plus menacée, dans sa liberté, par des forces économiques dominées par la rentabilité immédiate, et la recherche fondamentale est sans cesse confondue, dans les esprits et dans les budgets, avec le développement.

13. Conclusion

Trois mois après le naufrage du Titanic, à la mi-juillet 1912, les sciences exactes perdent brusquement leur titan et le monde scientifique est en deuil. Mais il est loin d'être prêt pour profiter pleinement d'un tel héritage scientifique⁴⁸: plus de cinq cents notes, mémoires ou ouvrages; il faudra onze

⁴⁶ *L'Université de Bruxelles. 75^e anniversaire de la fondation. Relation des fêtes, novembre 1909*, Bruxelles, 1910, p. 98.

⁴⁷ H. POINCARÉ, *Les sciences et les humanités*, Fayard, Paris, 1911, p. 31.

⁴⁸ "Peu d'hommes étaient capables de suivre sa pensée [...]; il n'avait pas d'élèves. Mais ces quelques hommes firent comprendre quelles synthèses contenait ou exigeait cette oeuvre si originale, diverse, profonde ou prophétique [...]. L'homme et l'oeuvre éblouirent les contemporains. Après un siècle de travaux mathématiques, nous pouvons les comprendre avec plus d'aisance, parler plus familièrement d'eux; mais, plus nous les approchons, plus nous les admirons et respectons", J. LERAY, Henri Poincaré, *Encyclopaedia Universalis*, p. 203.

gros volumes pour contenir l'édition complète des seuls articles, commencée en 1916 et achevée en 1955⁴⁹. Quant à l'édition de la correspondance, elle débute à peine⁵⁰.

C'est surtout le modèle mathématique axiomatique et linéaire du grand rival scientifique de Poincaré, David Hilbert, le successeur de Klein à Göttingen, qui façonne le développement des mathématiques d'une bonne moitié du XXe siècle. C'est la mécanique quantique, élaborée mathématiquement à Göttingen, qui devient synonyme de physique. La vague bourbakiste fait peu de place aux mathématiques de Poincaré, par essence qualitatives, non linéaires, récalcitrantes à tout dogme, et l'école de Copenhague se soucie peu de physique macroscopique.

Aujourd'hui le vent a tourné, les mathématiques sont envahies par la non-linéarité et la physique redécouvre les richesses de la dynamique classique et les possibilités de la géométrie symplectique⁵¹.

Qui sait si Poincaré, longtemps considéré comme le dernier savant du XIX^e siècle, ne sera pas un jour qualifié de premier savant du XXI^e.

Jean Mawhin

Université Catholique de Louvain

Institut de recherche en mathématique et physique

Chemin du Cyclotron, 2, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

E-mail: Jean.Mawhin@uclouvain.be

⁴⁹I et II. Analyse pure. III. Analyse pure et théorie des fonctions. IV. Théorie des fonctions. V. Arithmétique. VI. Géométrie, topologie. VII et VIII. Mécanique analytique, mécanique céleste, astronomie. IX. Physique mathématique. X. Physique mathématique et théorie physique. XI. Mémoires divers, Hommages à Henri Poincaré, Livre du centenaire de la naissance, Gauthier-Villars, Paris.

⁵⁰PH. NABONNAND, éd., *La correspondance de Poincaré*. Volume I. *La correspondance entre Poincaré et Mittag-Leffler*, Publications des Archives Henri Poincaré, Akademie-Verlag, Berlin et Blanchard, Paris, 1998, sous presse.

⁵¹J. MAWHIN, The centennial legacy of Poincaré and Lyapunov in ordinary differential equations, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, (2) 34 (1994) Supplemento, pp. 9-46, et The early reception in France of the work of Poincaré and Lyapunov in the qualitative theory of differential equations, *Philosophia Scientiae*, 1, 4 (1996), pp. 119-133.